УДК 517.5

В. А. Сорич, канд. фіз.-мат. наук,
Н. М. Сорич, канд. фіз.-мат. наук

Кам'янець-Подільський національний університет
імені Івана Огієнка, м. Кам'янець-Подільський

НАБЛИЖЕННЯ СУМ ЗГОРТОК З ЯДРАМИ ПУАССОНА СУМАМИ ФУР'Є В РІВНОМІРНІЙ МЕТРИЦІ

Одержана асимптотична поведінка величини, що характеризує сумісне наближення деяких класів аналітичних функцій сумами Фур'є.

Ключові слова: *ядро Пуассона, сумісне наближення, суми Фур'є.*

Вступ. У цій статті запропонована нова постановка задачі сумісного наближення на класах згорток ядер Пуассона із елементами одиничної кулі простору сумовних 2π-періодичних функцій, для сум Фур'є в рівномірні метриці.

Постановка задачі. Нехай $0 < q_i < 1$, $\beta_i \in R$, $i = \overline{1,m}$. Функції вигляду $P_q^{\beta}(t) = \sum_{k=1}^{\infty} q^k \cos\left(kt + \frac{\beta\pi}{2}\right)$, де $0 < q < 1$, $\beta \in R$, називаються ядрами Пуассона. Ми будемо позначати через $P_i(t) = P_{q_i}^{\beta_i}(t)$. Нехай S_M^0 — одинична куля простору сумовних 2π-періодичних суттєво обмежених функцій, елементи яких ортогональні константі: $S_M^0 = \left\{\varphi \middle| ess\sup_x |\varphi(x)| \le 1, \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(x)\,dx = 0\right\}$. Якщо функція $f(x)$ є згорткою $\varphi(x) \in S_M^0$ із ядром Пуассона, то вона, як відомо [1, с. 88] буде звуженням на дійсну вісь функції $f(z)$, аналітичної в смузі $|\mathrm{Im}\, z| \le \ln\frac{1}{q}$. Тому для $\forall \varphi \in S_M^0$ всі функції $f_i = \varphi * P_i$ будуть аналітичними. Позначимо через $\sum_{n,m}(\varphi, x) = \sum_{i=1}^{m}\left(f_i(x) - S_n(f_i, x)\right)$, де $S_n(f, x)$ — частинна сума порядку n ряду Фур'є функції $f(x)$, а величину

$$\sigma_{n,m}\left(S_M^0\right)_c = \sup_{\varphi \in S_M^0} \left\| \sum\nolimits_{n,m}(\varphi, x) \right\|_c \qquad (1)$$

приймемо за величину сумісного наближення класів $P_{q_i}^{\beta_i} = \left\{ f \middle| f = \varphi \times P_i,\ \varphi \in S_M^0 \right\}$ сумами Фур'є в рівномірній метриці. В даній роботі дослідимо асимптотичну поведінку при $n \to \infty$ величини $\sigma_{n,m}\left(S_M^0\right)_c$, а саме виділимо головний член та вкажемо порядок залишкового члена.

Основним результатом статті є таке твердження.

Теорема 1. Якщо $0 < q_i < 1$, $\beta_i \in R$, $i = \overline{1,m}$, а $q = \max\limits_i q_i$, при $n \to \infty$

$$\sigma_{n,m}\left(S_M^0\right)_c = \sqrt{A^2 + B^2}\, q^n \left(\frac{8}{\pi^2} K(q) + O(1)\frac{1}{n} \right), \tag{2}$$

де $A = \sum\limits_{i:q_i = q} \cos\frac{\beta_i \pi}{2}$, $B = \sum\limits_{i:q_i = q} \sin\frac{\beta_i \pi}{2}$, $O(1)$ величина, рівномірно обмежена по n, β_i, $K(q)$ — повний еліптичний інтеграл першого роду

$$K(q) = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dt}{\sqrt{1 - q^2 \sin t}}. \tag{3}$$

При $m = 1$ асимптотична рівність була одержана Нікольським С. М. ([2]), з дещо зміненим залишковим членом Стєчкіним С. Б. ([3]).

Допоміжні твердження. Нехай $f_i = \varphi \times P_i$, тоді

$$f_i(x) = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} \varphi(x+t) \sum_{k=1}^{\infty} q_i^k \cos\left(kt + \frac{\beta_i \pi}{2} \right) dt,$$

тому для $\forall \varphi \in S_M^0$ для виразу $\sum_{n,m}(\varphi)$ справедливе таке подання

$$\sum\nolimits_{n,m}(\varphi, x) = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} \varphi(x+t) \sum_{i=1}^{m} \sum_{k=n}^{\infty} q_i^k \cos\left(kt + \frac{\beta_i \pi}{2} \right) dt. \tag{4}$$

При подальшому дослідженні асимптотичної поведінки величини (1) розглянемо два випадки: якщо всі числа q_i однакові та якщо серед цих чисел є різні.

Нехай $q_i = q$, $i = \overline{1,m}$, тоді із (4) одержимо,

$$\sum\nolimits_{n,m}(\varphi, x) = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} \varphi(x+t) \sum_{i=1}^{m} \sum_{k=n}^{\infty} q^k \cos\left(kt + \frac{\beta_i \pi}{2} \right) dt =$$

$$= \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} \varphi(x+t) \sum_{k=n}^{\infty} q^k \sum_{i=1}^{m} \cos\left(kt + \frac{\beta_i \pi}{2} \right) dt = \tag{5}$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\varphi(x+t)\sum_{k=n}^{\infty}q^k\left(\sum_{i=1}^{m}\cos\frac{\beta_i\pi}{2}\cos kt - \sum_{i=1}^{m}\sin\frac{\beta_i\pi}{2}\sin kt\right)dt.$$

Позначимо $\sum_{i=1}^{m}\cos\frac{\beta_i\pi}{2} = A$, $\sum_{i=1}^{m}\sin\frac{\beta_i\pi}{2} = B$, тоді існує $\beta \in [-2;2]$, що $\forall k \in N$,

$$\sum_{i=1}^{m}\cos\frac{\beta_i\pi}{2}\cos kt - \sum_{i=1}^{m}\sin\frac{\beta_i\pi}{2}\sin kt = \sqrt{A^2+B^2}\cos\left(kt+\frac{\beta\pi}{2}\right). \quad (6)$$

Об’єднаємо (5) та (6) і при q_i однакових одержимо

$$\sum\nolimits_{n,m}(\varphi,x) = \frac{\sqrt{A^2+B^2}}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\varphi(x+t)\sum_{k=n}^{\infty}q^k\cos\left(kt+\frac{\beta\pi}{2}\right)dt\,. \quad (7)$$

Нехай тепер серед q_i є різні, причому $q = \max_i q_i$. Якщо $q_i < q$, то

$$\left(\frac{q_i}{q}\right)^n = \sigma\left(\frac{1}{n}\right), \text{ або } \lim_{n\to\infty} n\left(\frac{q_i}{q}\right)^n = 0\,,$$

що очевидно.

Тому

$$\left|\sum_{k=n}^{\infty}q_i^k\cos\left(kt+\frac{\beta\pi}{2}\right)\right| \le \sum_{k=n}^{\infty}q_i^k = q_i^n\sum_{k=0}^{\infty}q_i^k = q^n\left(\frac{q_i}{q_i}\right)^n\frac{1}{1-q_i} = o\left(\frac{1}{n}\right)q^n. \quad (8)$$

А, отже, рівномірно по $\varphi \in S_M^0$, $x \in R, \beta_i \in R$ при $n \to \infty$

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\varphi(x+t)\sum_{k=n}^{\infty}q_i^k\cos\left(kt+\frac{\beta_i\pi}{2}\right)dt = o\left(\frac{1}{n}\right)q^n. \quad (9)$$

Якщо ж $q_i = q$, то розглянемо всі номери i з такою умовою та для них застосуємо той алгоритм, який був використаний при одержанні рівності (7)

Тому з урахуванням (9) одержимо, що

$$\sum\nolimits_{n,m}(\varphi,x) = \sqrt{A^2+B^2}\,\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\varphi(x+t)\sum_{k=n}^{\infty}q^k\cos\left(kt+\frac{\beta\pi}{2}\right)dt + o\left(\frac{1}{n}\right)q^n. \quad (10)$$

Об’єднаємо (7) та (10) і будемо мати таке твердження.

Теорема 2. Нехай $0 < q_i < 1, \beta_i \in R, i = \overline{1,m}, q = \max_i q_i$. Тоді для $\forall\varphi \in S_M^0$ при $n \to \infty$ справедлива асимптотична рівність

$$\sum\nolimits_{n,m}(\varphi,x) = \sqrt{A^2+B^2}\,\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\varphi(x+t)\sum_{k=n}^{\infty}q^k\cos\left(kt+\frac{\beta\pi}{2}\right)dt + o\left(\frac{1}{n}\right)q^n, \quad (11)$$

де $A = \sum_{i:q_i=q}\cos\frac{\beta_i\pi}{2}$; $B = \sum_{i:q_i=q}\sin\frac{\beta_i\pi}{2}$, $tg\,\frac{\beta\pi}{2} = \frac{B}{A}$.

Доведення теореми 1.

Нехай

$$P_q^\beta=\left\{f\,\middle|\,f(x)=\frac{a_0}{2}+\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\varphi(x+t)\sum_{k=1}^{\infty}q^k\cos\left(kt+\frac{\beta\pi}{2}\right)dt,\varphi\in S_M^0\right\},$$

тоді $\forall\varphi\in S_M^0$ існує функція $f^*(x)$ із класу така, що $f^*(x)-S_n(f^*;x)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\varphi(x+t)\sum_{k=n}^{\infty}q^k\cos\left(kt+\frac{\beta\pi}{2}\right)dt$. Тоді із (11) випливає, що при $n\to\infty$

$$\sigma_{n,m}\left(S_M^0\right)_c=\sqrt{A^2+B^2}\sup_{f\in P_q^\beta}\left\|f(x)-S_n(f,x)\right\|_c+\sigma(1)\frac{q^n}{n}. \quad (12)$$

Як випливає із робіт [2; 3]

$$\sup_{f\in P_q^\beta}\left\|f(x)-S_n(f,x)\right\|_c=\frac{8q^n}{\pi^2}\left(K(q)+O(1)\frac{1}{n}\right), \quad (13)$$

де $O(1)$ — величина рівномірно обмежена по n,β, а $K(q)$ — повний еліптичний інтеграл першого роду. Об’єднаємо співвідношення (12) та (13) і переконуємося у справедливості (2).

Теорема 1 доведена.

У 1909 р. А. Лебег ([4]) довів, що для будь-якої неперервної 2π-періодичної функції $f(x)$ при $\forall n\in N$ справедлива нерівність

$$\left\|f(x)-S_n(f,x)\right\|_c\le\left(4+\frac{4}{\pi^2}\ln n\right)E_n(f)_c, \quad (14)$$

де $E_n(f)_c=\inf\limits_{t_{n-1}}\left\|f(x)-t_{n-1}(x)\right\|_c$ — найкраще наближення функції $f(x)$ тригонометричними многочленами $t_{n-1}(x)$ порядку не вище ніж $n-1$ у рівномірній метриці. Знайдемо аналог нерівності Лебега для виразу $F(x)=\sum\limits_{i=1}^{m}f_i(x)$, де $f_i(x)$ мають той самий зміст,що і раніше, при умові, що $\varphi(x)$ — неперервна. Оскільки $\sum_{n,m}(\varphi,x)=F(x)-S_n(F,x)$, та функція $\sum\limits_{i=1}^{m}\sum\limits_{k=n}^{\infty}q_i^k\cos\left(kt+\frac{\beta_i\pi}{2}\right)$ ортогональна будь-якому тригонометричному многочлену $t_{n-1}(t)$ на періоді,то згідно теореми 2

$$\sum\nolimits_{n,m}(\varphi,x)=\sqrt{A^2+B^2}\,\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\delta_n(\varphi,x,t)\sum_{k=n}^{\infty}q^k\cos\left(kt+\frac{\beta\pi}{2}\right)dt+\sigma(1)q^n\frac{1}{n},$$

де $\delta_n(\varphi, x, t) = \varphi(x+t) - t_{n-1}(x+t)$.

Тому $\forall \varphi \in S_M^0 \cap C_{[-\pi;\pi]}$

$$\left\|\sum\nolimits_{n,m}(\varphi, x)\right\|_c \le \sqrt{A^2+B^2}\,\frac{1}{\pi}E_n(\varphi)_c \int_{-\pi}^{\pi}\left|\sum_{k=n}^{\infty} q^k \cos\left(kt + \frac{\beta\pi}{2}\right)\right| dt + \sigma(1) q^n \frac{1}{n}, \quad (15)$$

Далі використовуємо доведення асимптотичної рівності (13) і приходимо до справедливості такого твердження.

Теорема 3. Якщо $0 < q_i < 1, \beta_i \in R, i = \overline{1, m},$ то для $\forall \varphi \in C_{[-\pi;\pi]}$ при $n \to \infty$,

$$\left\|\sum\nolimits_{n,m}(\varphi, x)\right\|_c \le \sqrt{A^2+B^2}\,\frac{8q^n}{\pi^2}\left(K(q) + O(1)\frac{1}{n}\right)E_n(\varphi)_c,$$

де вирази $A, B, K(q), q, O(1)$ мають той самий зміст,що і в теоремі 1.

Зауваження. Твердження теореми 1 та 3 можна поширити на множину S_1^0 — одиничну кулю в просторі сумовних 2π-періодичних функцій та випадок інтегральної метрики.

Висновки. Як випливає із асимптотичної рівності (2), коефіцієнти при головному члені $\sqrt{A^2+B^2}$ залежить лише від тих доданків виразу $\sum_{n,m}(\varphi, x)$, у яких твірні Ядер Пуассона q_i набувають найбільших значень. Крім того, для величини сумісного наближення згідно робіт [2 ; 3] можна одержати асимптотичну оцінку зверху, яка буде не меншою, а в деяких випадках більшою за вираз в (2), що обґрунтовує доцільність запропонованої постановки задачі сумісного наближення при тих обмеженнях, що наводяться.

Список використаних джерел:

1. Бари Н. К. Тригонометрические ряды / Н. К. Бари. — М. : Гос. изд-во физ.-мат. литературы, 1961. — 936 с.
2. Никольский С. М. Приближение функций тригонометрическими полиномами в среднем / С. М. Никольский // Изв. АН СССР. Сер. Мат. — 1946. — Т. 10, №3. — С. 207–256.
3. Стечкин С. Б. Оценка остатка ряда Фурье для дифференцируемых функций / С. Б. Стечкин // Тр. Мат. ин.-та АН СССР. — 1980. — Т. 145. — С. 126–151.
4. Lebesque H. Sur les integrals sinqulieres / H. Lebesque // Ann. de Toulous. — 1909. — T. 1. — P. 25–117.

Asymptotic behavior of size characterizing the joint approximation of some classes of analytical functions the sums of Fourier is got.

Key words: *Poisson's kernel, joint approximation, sums of Fourier.*

Отримано: 20.11.2013