УДК 518.25

Л. М. Семчишин, канд. фіз.-мат. наук
Чортківський навчально-науковий інститут
підприємництва і бізнесу Тернопільського національного
економічного університету, м. Чортків

РОЗВ'ЯЗАННЯ ЧИСЛОВИХ СИСТЕМ ЛІНІЙНИХ АЛГЕБРИЧНИХ РІВНЯНЬ З БЛОЧНИМИ ЕЛЕМЕНТАМИ В СЕРЕДОВИЩІ MATLAB

У статті розглянуто новий підхід до розріджених систем лінійних алгебричних рівнянь із блочними елементами. Розкладено невідомі x_i даної розрідженої системи лінійних алгебричних рівнянь у скінченні матричні ланцюгові дроби. Протестовано алгоритм розв'язання деяких типів розріджених числових систем лінійних алгебричних рівнянь. Показано ефективність запропонованого алгоритму.

Ключові слова: *розріджені системи, ланцюгові дроби, скінченні суми, складність алгоритму, тестування алгоритму.*

Вступ. Розв'язування систем лінійних алгебричних рівнянь (СЛАР) є однією із актуальних задач обчислювальної математики. Обчислювальна математика вивчає чисельні методи розв'язування різних математичних задач, тобто методи, які ґрунтуються на побудові скінченної послідовності дій над скінченною множиною чисел. Обчислювальні методи — одні з базових інструментів математичного моделювання і важлива частина програмного забезпечення для комп'ютерів усіх поколінь. За умови використання таких обчислювальних методів застосовують математичне моделювання до розв'язку математичної задачі. Тоді розв'язок одержується у вигляді числового результату.

Постановка проблеми. Сьогодні існує й успішно розвивається декілька напрямків і концепцій щодо виконання символьних перетворень. Із комп'ютерних систем універсального характеру широкого розповсюдження набули REDUCE, muMATH, SCRATCHPAD, MATHEMATICA, MAPLE, MatLab, DERIVE, MatCad. З більшим чи меншим успіхом їх можна застосувати для різних задач комп'ютерної алгебри, у тому числі й розв'язання систем лінійних алгебричних рівнянь. Однак цей розділ ще не настільки високо розвинутий, як методи для числових систем.

Зупинимося на специфіці побудови ефективних алгоритмів для розв'язання числових систем лінійних алгебричних рівнянь з блочними елементами в середовищі MatLab.

Аналіз останніх публікацій. У роботі [6, с. 213–222] запропоновано аналіз обчислювальної стійкості алгоритмів розв'язання систем лінійних алгебричних рівнянь з λ – матрицями в середовищі MatLab.

Актуальність теми. Розв'язання систем лінійних алгебричних рівнянь з блочними елементами в середовищі MatLab вимагає застосування ефективних чисельних методів.

Слід зауважити, що питання розв'язання розріджених систем лінійних рівнянь з блочними елементами розглядалися у праці [5, с. 128–135].

Однак, лише в окремих з них розглядаються питання щодо застосування методу відсічених систем в середовищі MatLab [1; 2; 4].

Мета роботи. Метою цієї роботи є дослідження розв'язування розріджених систем лінійних алгебричних рівнянь із блочними елементами. Тестування алгоритмів розв'язання деяких типів розріджених числових систем лінійних алгебричних рівнянь в середовищі MatLab.

Теоретичну та методологічну основу дослідження складають методи оптимізації та математичне моделювання.

Основна частина. Розглянемо метод розв'язування розріджених систем із деякими найхарактернішими способами заповнення.

Розглянемо систему лінійних алгебричних рівнянь

$$\begin{pmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ A_{2,1} & A_{2,2} & A_{2,3} & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & A_{3,2} & A_{3,3} & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & A_{n-1,n-2} & A_{n-1,n-1} & A_{n-1,n} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & A_{n,n-1} & A_{n,n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \dots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{1,n+1} \\ A_{2,n+1} \\ A_{3,n+1} \\ \dots \\ A_{n-1,n+1} \\ A_{n,n+1} \end{pmatrix}, \quad (1)$$

елементи якої A_{ij} — це блоки розмірності $m \times m$. Позначимо через $A\begin{bmatrix} i_1 & i_2 & \dots & i_k \\ j_1 & j_2 & \dots & j_k \end{bmatrix}$ мінор, розміщений на перетині блочних стрічок $i_1, i_2, \dots, i_k$ та блочних стовпців $j_1, j_2, \dots, j_k$. За узагальненим правилом Крамера [4]

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} A_{1,1} & A_{2,1} & \cdots & A_{1,n+1} & 0 & 0 \\ A_{1,2} & A_{2,2} & \ddots & A_{2,n+1} & \ddots & 0 \\ \ddots & A_{3,2} & \ddots & A_{3,n+1} & \ddots & \cdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & A_{n-1,n} \\ 0 & 0 & \ddots & A_{n,n+1} & \cdots & A_{n,n} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} & 0 & \cdots & 0 \\ A_{2,1} & A_{2,2} & A_{2,3} & \cdots & 0 \\ 0 & A_{3,2} & A_{3,3} & \ddots & 0 \\ \cdots & \cdots & \ddots & \ddots & A_{n-1,n} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & A_{n,n} \end{vmatrix}}$$

Розкладаючи чисельник за мінорами, можна записати

$$x_i = \left(A\begin{bmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ 1 & 2 & \dots & n \end{bmatrix} \right)^{-1} \times$$
$$\times \left(\sum_{k=1}^{n} (-1)^{i+k} A_{k,n+1} A\begin{bmatrix} 1 & 2 & \dots & i-1 \\ 1 & 2 & \dots & i-1 \end{bmatrix} \cdot \prod_{s=i+1}^{k-1} A_{s,s+1} A\begin{bmatrix} k+1 & \dots & \dots & n \\ k+1 & \dots & \dots & n \end{bmatrix} \right). \tag{2}$$

Введемо позначення

$$\alpha_{ik} = A\begin{bmatrix} 1 & 2 & \dots & i-1 \\ 1 & 2 & \dots & i-1 \end{bmatrix} \cdot \prod_{s=i+1}^{k-1} A_{s,s+1} A\begin{bmatrix} k+1 & \dots & \dots & n \\ k+1 & \dots & \dots & n \end{bmatrix}, \; i,k = \overline{1,n}.$$

Тоді для визначення невідомої x_1 маємо співвідношення

$$x_1 = \left(A\begin{bmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ 1 & 2 & \dots & n \end{bmatrix} \right)^{-1} \sum_{k=1}^{n} (-1)^{i+k} A_{k,n+1} \alpha_{i,k}. \tag{3}$$

Для компактності запису надалі будемо позначати результат виконання операції множення на обернену матрицю зліва у вигляді $C^{-1}D = D / C$. Тоді вираз $D_1 / (C_1 + D_2 / C_2)$ означатиме $(C_1 + C_2^{-1} D_2)^{-1} \cdot D_1$.

Якщо до співвідношення (3) застосувати відому рівність Ейлера [4], яка пов'язує ланцюгові дроби з рядами та скінченними сумами, то для x_1 одержимо

$$x_1 = \left(A\begin{bmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ 1 & 2 & \dots & n \end{bmatrix} \right)^{-1} \sum_{k=1}^{n} (-1)^{1+k} A_{k,n+1} \alpha_{i,k} = \frac{A\begin{bmatrix} 2 & 3 & \dots & n \\ 2 & 3 & \dots & n \end{bmatrix}}{A\begin{bmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ 1 & 2 & \dots & n \end{bmatrix}} \times$$
$$\times \cfrac{A_{1,n+1}}{E + \cfrac{A_{2,n+1}\alpha_{1,2} / A_{1,n+1}\alpha_{1,1}}{E - \cfrac{A_{2,n+1}\alpha_{1,2}}{A_{1,n+1}\alpha_{1,2}} + \cfrac{A_{3,n+1}\alpha_{1,3} / A_{2,n+1}\alpha_{1,2}}{E - \cfrac{A_{3,n+1}\alpha_{1,3}}{A_{2,n+1}\alpha_{1,2}} + \ddots}}} \tag{4}$$
$$\ddots + \cfrac{A_{n,n+1}\alpha_{1,n} / A_{n-1,n+1}\alpha_{1,n-1}}{E - \cfrac{A_{n,n+1}\alpha_{1,n}}{A_{n-1,n+1}\alpha_{1,n-1}}}.$$

Тут і далі E — означає одиничну матрицю.

Вираз $\alpha_{1,k+1}^{-1} \cdot \alpha_{1,k} \; (k = 1, 2, \dots)$ також можна розкласти в ланцюгові дроби [7]

$$\frac{\alpha_{1,k}}{\alpha_{1,k+1}}=\frac{A_{1,k}A\begin{bmatrix}1&\ldots&k\\1&\ldots&k\end{bmatrix}}{A_{k+1,k+1}A\begin{bmatrix}1&\ldots&k\\1&\ldots&k\end{bmatrix}-A_{k+1,k}A\begin{bmatrix}1&\ldots&k-1\\1&\ldots&k-1\end{bmatrix}}=$$

$$=\frac{A_{1,k}\begin{bmatrix}1&\ldots&k\\1&\ldots&k\end{bmatrix}}{A_{k+1,k+1}A\begin{bmatrix}1&\ldots&k\\1&\ldots&k\end{bmatrix}-A_{k+1,k}A_{k,k+1}A\begin{bmatrix}1&\ldots&k-1\\1&\ldots&k-1\end{bmatrix}}=$$

$$=\frac{E}{A_{k+1,k+1}-A_{k+1,k}A_{k,k+1}A\begin{bmatrix}1&\ldots&k-1\\1&\ldots&k-1\end{bmatrix}A^{-1}\begin{bmatrix}1&\ldots&k\\1&\ldots&k\end{bmatrix}}= \tag{5}$$

$$=\frac{E}{A_{k+1,k+1}-A_{k+1,k}A_{k,k+1}\left(A^{-1}\begin{bmatrix}1&\ldots&k\\1&\ldots&k\end{bmatrix}^{T}A^{T}\begin{bmatrix}1&\ldots&k-1\\1&\ldots&k-1\end{bmatrix}\right)^{T}}=$$

$$=\ldots=\cfrac{E}{A_{k+1,k+1}-\cfrac{A_{k+1,k}A_{k,k+1}}{A_{k,k}-\cfrac{A_{k-1,k}A_{k,k-1}}{A_{k-1,k-1}-\ddots\,\ddots-\cfrac{A_{1,2}A_{2,1}}{A_{1,1}}}}}.\qquad k=\overline{1,n}.$$

У подібний спосіб

$$\frac{A\begin{bmatrix}2&3&\ldots&n\\2&3&\ldots&n\end{bmatrix}}{A\begin{bmatrix}1&2&\ldots&n\\1&2&\ldots&n\end{bmatrix}}=\frac{E}{A_{1,1}-A_{2,1}A_{1,2}\left[A^{-1}\begin{bmatrix}2&3&\ldots&n\\2&3&\ldots&n\end{bmatrix}^{T}A\begin{bmatrix}3&4&\ldots&n\\3&4&\ldots&n\end{bmatrix}^{T}\right]}=$$

$$=\ldots=\cfrac{E}{A_{1,1}-\cfrac{A_{2,1}A_{1,2}}{A_{2,2}-\cfrac{A_{2,3}A_{3,2}}{A_{3,3}-\ddots\,\ddots-\cfrac{A_{n-1,n}A_{n,n-1}}{A_{n,n}}}}}.$$

За аналогічною схемою знаходимо решту невідомих x_i

$$x_i = \left(A\begin{bmatrix} 1 & 2 & \ldots & n \\ 1 & 2 & \ldots & n \end{bmatrix} \right)^{-1} \left(\frac{A_{i,n+1}}{2}\alpha_{i,i} + \sum_{k=1}^{i-1} (-1)^{i+k} A_{k,n+1}\alpha_{i,k} + \right.$$

$$\left. + \frac{A_{i,n+1}}{2}\alpha_{i,i} + \sum_{k=i+1}^{n} (-1)^{i+k} A_{k,n+1}\alpha_{i,k} \right) =$$

$$= \left[(-1)^{2i-1} A_{i-1,i}\alpha_{i,i-1} / \alpha_{i,i} + (-1)^{2i} A_{i,i} + (-1)^{2i+1} A_{i+1,i}\alpha_{i,i+1} / \alpha_{i,i} \right]^{-1} \times$$

$$\times [\frac{\frac{1}{2}A_{i,n+1}}{E - \cfrac{2\left(A_{i,n+1}\alpha_{i,i}\right)^{-1} A_{i-1,n+1}\alpha_{i,i-1}}{E + \cfrac{2A_{i-1,n+1}\alpha_{i,i-1}}{A_{i,n+1}\alpha_{i,i}} - \ddots \ddots - \cfrac{\cfrac{A_{1,n+1}\alpha_{i,1}}{A_{2,n+1}\alpha_{i,2}}}{E + \cfrac{A_{1,n+1}\alpha_{i,1}}{A_{2,n+1}\alpha_{i,2}}}}} -$$

$$\frac{\frac{1}{2}A_{i,n+1}}{E - \cfrac{2\left(A_{i,n+1}\alpha_{i,i}\right)^{-1} A_{i+1,n+1}\alpha_{i,i+1}}{E + \cfrac{2A_{i+1,n+1}\alpha_{i,i+1}}{A_{i,n+1}\alpha_{i,i}} - \ddots \ddots - \cfrac{\cfrac{A_{n,n+1}\alpha_{i,n}}{A_{n-1,n+1}\alpha_{i,n-1}}}{E + \cfrac{A_{n,n+1}\alpha_{i,n}}{A_{n-1,n+1}\alpha_{i,n-1}}}}}].$$

А для кожного відношення $\alpha_{i,k} / \alpha_{i,k+1}$ в свою чергу можна записати:

$$\frac{\alpha_{i,k}}{\alpha_{i,k+1}} = \frac{A\begin{bmatrix} 1 & 2 & \ldots & i-1 \\ 1 & 2 & \ldots & i-1 \end{bmatrix} \prod_{s=i+1}^{k-1} A_{s,s+1} A\begin{bmatrix} k+1 & \ldots & \ldots & n \\ k+1 & \ldots & \ldots & n \end{bmatrix}}{A\begin{bmatrix} 1 & 2 & \ldots & i-1 \\ 1 & 2 & \ldots & i-1 \end{bmatrix} \prod_{s=i+1}^{k} A_{s,s+1} A\begin{bmatrix} k+2 & \ldots & \ldots & n \\ k+2 & \ldots & \ldots & n \end{bmatrix}} =$$

$$= \frac{A\begin{bmatrix} k+1 & \ldots & \ldots & n \\ k+1 & \ldots & \ldots & n \end{bmatrix}}{A_{k,k+1} A\begin{bmatrix} k+1 & \ldots & \ldots & n \\ k+1 & \ldots & \ldots & n \end{bmatrix}} =$$

$$= \frac{A_{k+1,k+1}}{A_{k,k+1}} - \frac{A_{k+1,k+2}A_{k+2,k+1}}{A_{k,k+1}\left(A^{-1}\begin{bmatrix} k+3 & \dots & n \\ k+3 & \dots & n \end{bmatrix}^T A^T \begin{bmatrix} k+2 & \dots & n \\ k+2 & \dots & n \end{bmatrix}\right)^T} =$$

$$= \dots = \frac{A_{k+1,k+1}}{A_{k,k+1}} - \frac{A_{k+1,k+2}A_{k+2,k+1} / A_{k,k+1}}{A_{k+2,k+2} - \cfrac{A_{k+3,k+2}A_{k+2,k+3}}{A_{k+3,k+3} - \cfrac{A_{k+3,k+4}A_{k+4,k+3}}{A_{k+4,k+4} - \ddots}}}.$$

$$\ddots - \frac{A_{n-1,n}A_{n,n-1}}{A_{n,n}}$$

Отже, одержуємо аналітичне розвинення невідомих x_i даної розрідженої системи лінійних алгебричних рівнянь у скінченні матричні ланцюгові дроби.

2. Тестування алгоритму розв'язання розріджених числових систем лінійних алгебричних рівнянь

Опис тестування функції FC_Three_Diag_Sys

Для перевірки алгоритму розв'язання трьохдіагональних систем лінійних алгебричних рівнянь методом ланцюгових дробів [3] була використана система рівнянь наступного вигляду:

$$\begin{pmatrix} 1.5 & 1 & ... & 0 & 0 \\ -1 & 1.5 & ... & 0 & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & 1.5 & 1 \\ 0 & 0 & ... & -1 & 1.5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ ... \\ x_{n-1} \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ ... \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Це несиметрична система рівнянь, без діагонального домінування із середнім значенням спектрального числа обумовленості.

Для розв'язання систем лінійних алгебричних рівнянь з числовими елементами в середовищі MatLab написана і протестована функція FC_Three_Diag_Sys. Ця функція реалізує алгоритм розв'язування систем лінійних алгебричних рівнянь методом ланцюгових дробів і написана за допомогою об’єктно-орієнтованої макромови MatLab.

Для спрощення її можливого використання поданий текст разом з блоком формуванням системи лінійних алгебричних рівнянь, яка має описану матрицю.

```
function [] =FC_Three_Diag_Sys( )
```

% Розв'язування трьохдіагональних систем лінійних алгебричних рівнянь

```
% Ax=b
% за допомогою матричних ланцюгових дробів
clc
n=25;
% формування тестової системи лінійних рівнянь
for i=1 : n
for j=1: n
A(i,j)=0;
if (i==j) A(i,j)=1.5; end
if(i==j+1) A(i,j)=-1; end
if(j==i+1) A(i,j)=1; end
end
b(i)=0;
end;
b(1)=3;
%, обчислення X(1) і решти невідомих
D(n)=A(n,n);
i=n;
while (i>1);
i = i-1;
D(i)=A(i,i)-A(i+1,i)*A(i,i+1)/D(i+1);
end;
x(1)=b(1)/D(1);
i=1;
while (i<n)
i=i+1;
x(i)=-A(i,i-1)*x(i-1)/D(i);
end
x
end
```

Результати тестування функції FC_Three_Diag_Sys для $n = 25$ скопійовані з вікна MatLab і подані в наступній таблиці

Значення n	**Значення невідомих** x_i
25	1.5000 0.7500 0.3750 0.1875 0.0938 0.0469 0.0234 0.0117 0.0059 0.0029 0.0015 0.0007 0.0004 0.0002 0.0001 0.0000 0.0000 0.0000 0.0000 0.0000 0.0000 0.0000 0.0000 0.0000 0.0000

Нескладна перевірка показує високу точність запропонованого методу розв'язання трьохдіагональних систем методом ланцюгових дробів.

Висновки. У статті розглянуто новий підхід до розв'язування розріджених систем лінійних алгебричних рівнянь із блочними елементами. Розкладено невідомі x_i даної розрідженої системи лінійних алгебричних рівнянь у скінчені матричні ланцюгові дроби. Протестовано алгоритм розв'язання розріджених числових систем лінійних алгебричних рівнянь в пакеті MatLab.

Запропонований алгоритм може ефективно використовуватися в системах комп'ютерної алгебри та для аналітично-числового розв'язування інженерних та прикладних задач.

Список використаних джерел:

1. Воеводин В. В. Численные методы алгебры. Теория и алгоритмы / В. В. Воеводин. — М. : Наука, 1976. — 312 с.
2. Гантмахер Ф. Р. Теория матриц / Ф. Р. Гантмахер. — М. : Наука, 1967. — 324 с.
3. Дэвенпорт Дж. Компьютерная алгебра / Дж. Дэвенпорт, И. Сирэ, Э. Турнье. — М. : Мир, 1991. — 352 с.
4. Недашковський М. О. Обчислення з λ–матрицями / М. О. Недашковський, О. Я. Ковальчук. — К. : Наук. думка, 2007. — 294 с.
5. Семчишин Л. М. Розв’язання розріджених систем лінійних алгебраїчних рівнянь із блочними елементами / Л. М. Семчишин // Фізико-математичне моделювання та інформаційні технології. — Львів, 2007. — Вип. 6. — С. 128–135.
6. Семчишин Л. М. Аналіз обчислювальної стійкості алгоритмів розв'язання систем лінійних алгебричних рівнянь з $\lambda -$матрицями / Л. М. Семчишин // Вісник Тернопільського національного технічного університету. — Тернопіль, 2013. — №1. — С. 213–222.
7. Тыртышников Е. Е. Матричный анализ и линейная алгебра / Е. Е. Тыртышников. — М. : Физматлит, 2007. — 480 с.

New approach to the linear algebraic equations rarefied systems with block elements solution and the method of rarefied systems with the specific ways of filling solution is suggested in the article. The variables of the x_i rarefied system of the linear algebraic equations into the finite matrix chain fractions are decomposed.

Key words: *rarefied systems, chain fractions, finite sums, algorithm difficulty, algorithm testing.*

Отримано: 17.10.2013