



УДК 539.3

К. М. Довбня, Ю. В. Григорчук

Напружений стан оболонки двоякої кривини з двома паралельними тріщинами при згинальному навантаженні

(Представлено академіком НАН України В. П. Шевченком)

Розглядається ізотропна оболонка двоякої кривини, послаблена двома наскрізними паралельними тріщинами, берега яких контактують при згині оболонки. Розв'язок задачі отримано за допомогою теорії узагальнених функцій та двовимірного інтегрального перетворення Фур'є. Для розв'язання сингулярних інтегральних рівнянь застосовується метод механічних квадратур. Проведено чисельне дослідження залежності коефіцієнтів інтенсивності від розміру тріщин, відстані між ними та кривини серединної поверхні оболонки.

Дослідження напружено-деформованого стану оболонок із тріщинами зазвичай проводяться за умови, що поверхні розрізів не контактують між собою [1, 2]. Однак у випадку, коли оболонка знаходиться під дією згинального навантаження, має місце контакт берегів тріщини. В роботах [1–3] для розв'язання задачі про згин пологої сферичної оболонки використовується модель, що враховує контакт берегів вздовж лінії тріщини на зовнішній поверхні оболонки.

У роботах [4, 5] одержано теоретичні результати, які були перевірені методом скінченних елементів. Отримано результати щодо впливу контакту берегів тріщини на коефіцієнти інтенсивності. Розрахунки проводилися методом скінченних елементів.

У даній роботі методику [1] у поєднанні з моделлю [3] поширено на оболонки двоякої кривини з двома паралельними тріщинами під дією згинального навантаження. Оболонка, що розглядається, має сталу товщину h . Тріщини завдовжки $2l$ кожна розташовані паралельно одна одній на відстані $2d$ вздовж лінії кривини. Оболонка знаходиться під дією симетричного відносно лінії тріщин згинального навантаження. Задачу будемо розглядати за допомогою двовимірної теорії оболонок, в рамках якої тріщини моделюються як математичні розрізи серединної поверхні оболонки. Виходячи з лінійності задачі, напружений стан в оболонці подаємо у вигляді суми напруженого стану в оболонці без тріщин при заданому зовнішньому навантаженні, яке вважається відомим (воно буде позначатися величинами

© К. М. Довбня, Ю. В. Григорчук, 2013

з зірочками), та шуканого додаткового (збуреного) напруженого стану, викликаного наявністю тріщин.

Дослідимо вплив контакту берегів тріщин внаслідок згину оболонки на її напружено-деформований стан.

Система координат $Oxyz$ орієнтована вздовж ліній головних кривин оболонки з центром в середині розрізу L .

Зважаючи на симетрію задачі відносно осі абсцис, запишемо крайові умови контакту на лінії розрізу [1–3, 6]:

$$[v] = \frac{h}{2} |\theta_2| \geq 0, \quad M_2 = -M_2^* + \frac{h}{2} T_2 \operatorname{sgn}[\theta_2], \quad T_2 \leq 0, \quad x \in L. \quad (1)$$

У формулах (1) $[v]$ — стрибок компонента вектора переміщень на серединній поверхні оболонки; $[\theta_2]$ — стрибок кута повороту нормалі; T_2 — мембранне зусилля; M_2 — згинальний момент.

Методику дослідження напруженого стану оболонок двоякої кривини з концентраторами напружень розроблено в [1, 2]. Збурений напружений стан описується за допомогою рівнянь теорії пологих оболонок.

Враховуючи, що тріщини перебувають в однакових умовах, запишемо інтегральні подання зусилля T_2 та моменту M_2 на правому розрізі через похідні від стрибків переміщення та кута повороту нормалі [1, 2] на

$$T_2(x, y) = -\frac{B}{4l\pi} \int_{-1}^1 \left((K_{11}(t - \tau, 0) - K_{11}(t - \tau, 2\gamma)) \frac{d[v]}{dt} + (K_{13}(t - \tau, 0) - K_{13}(t - \tau, 2\gamma)) a(1 - \nu)(3 + \nu) \frac{d[\theta_2]}{dt} \right) dt, \quad (2)$$

$$M_2(x, y) = -\frac{Ba}{4l\pi} \int_{-1}^1 \left((K_{31}(t - \tau, 0) - K_{31}(t - \tau, 2\gamma)) \frac{d[v]}{dt} + (K_{33}(t - \tau, 0) - K_{33}(t - \tau, 2\gamma)) a(1 - \nu)(3 + \nu) \frac{d[\theta_2]}{dt} \right) dt, \quad (3)$$

де

$$K_{11}(x, y) = \frac{1}{r} - 2\tilde{\beta}^2 r \sum_{n=1}^{\infty} a_n^{(1)}(\tilde{\beta}r) \cos(2n - 1)\varphi;$$

$$K_{31}(x, y) = 2\tilde{\beta}^2 r \sum_{n=1}^{\infty} n^{(2)}(\tilde{\beta}r) \cos(2n - 1)\varphi;$$

$$K_{13}(x, y) = \frac{1}{(1 - \nu)(3 + \nu)} K_{31}(x, y);$$

$$K_{33}(x, y) = \frac{1}{r} - \frac{2\tilde{\beta}^2 r}{(1 - \nu)(3 + \nu)} \sum_{n=1}^{\infty} a_n^{(3)}(\tilde{\beta}r) \cos(2n - 1)\varphi;$$

$$a_n^{(1)}(s) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} |d^2| \cos^3 \theta \cos((2n-1)\theta) \operatorname{Im} G_{n,n-1}(s|d|\sqrt{i}) d\theta;$$

$$a_n^{(2)}(s) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} d^2 \cos \theta (\nu \cos^2 \theta + \sin^2 \theta) \cos(2n-1)\theta \operatorname{Re} G_{n,n-1}(s|d|\sqrt{i}) d\theta;$$

$$a_n^{(3)}(s) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} |d^2| (\nu \cos^2 \theta + \sin^2 \theta)^2 \frac{\cos((2n-1)\theta)}{\cos \theta} \operatorname{Im} G_{n,n-1}(s|d|\sqrt{i}) d\theta;$$

$B = Eh$, $a = h/\sqrt{12(1-\nu^2)}$, $|\tau| < 1$, $\gamma = d/l$ ($2d$ – відстань між центрами тріщин).

Підставляючи вирази (2), (3) у крайові умови (1) і виключаючи з рівнянь стрибок, одержимо сингулярне інтегральне рівняння для визначення стрибка повороту нормалі [2]

$$M_2^* = \frac{1}{4\pi l} \frac{Bah}{2\sqrt{3(1-\nu^2)}} \int_{-1}^1 \frac{d[\theta_2]}{dt} (3(1-\nu^2)(K_{11}(t-\tau, 0) - K_{11}(t-\tau, 2\gamma)) +$$

$$+ 2 \operatorname{sgn} M_2^* \sqrt{3(1-\nu^2)}(K_{31}(t-\tau, 0) - K_{31}(t-\tau, 2\gamma)) +$$

$$+ (1-\nu)(3+\nu)(K_{33}(t-\tau, 0) - K_{33}(t-\tau, 2\gamma))) dt. \quad (4)$$

Тут враховано, що $\operatorname{sgn}[\theta_2] = -\operatorname{sgn} M_2^*$.

Шукані функції з рівняння (4) слід підпорядкувати ще додатковій умові неперервності кута повороту на кінцях розрізу:

$$[\theta_2](\pm l) = 0. \quad (5)$$

Розв'язок сформульованої задачі побудовано за допомогою методу механічних квадратур, який дозволяє звести СІР до системи лінійних алгебраїчних рівнянь відносно значень невідомих підінтегральних функцій у певних точках (вузлах інтерполяційного полінома). Розв'язавши її і побудувавши інтерполяційний поліном, знаходимо значення невідомих функцій у довільних точках проміжку інтегрування, зокрема у вершинах тріщин.

Числовий розв'язок сформульованої задачі (4), (5) отримано для ізотропного матеріалу ($\nu = 0,3$). Коефіцієнти інтенсивності моментів та зусиль у вершинах тріщини обчислювали за формулами

$$K_M^\pm = \pm(3-2\nu-\nu^2) \frac{Bah}{8\sqrt{3(1-\nu^2)}} \lim_{t \rightarrow \pm 1} \sqrt{1-t^2} \frac{d[\theta_2]}{dt}(t),$$

$$K_T^\pm = \mp \frac{B}{4} \lim_{t \rightarrow \pm 1} \sqrt{1-t^2} \frac{d[v]}{dt}(t).$$

Дослідження проводилися для випадку, коли тріщини розташовані на внутрішній лицьовій поверхні оболонки ($M_2^* > 0$).

Залежності безрозмірних значень коефіцієнтів інтенсивності зусиль і моментів від параметра взаємного розташування дефектів $\rho = l/d$ будували для фіксованих значень параметра кривини $\lambda = R_2/R_1$ оболонки та параметра $\beta = cl = \frac{\sqrt[4]{12(1-\nu^2)}}{\sqrt{Rh}} l$, де $R = \min(|R_1|, |R_2|)$.

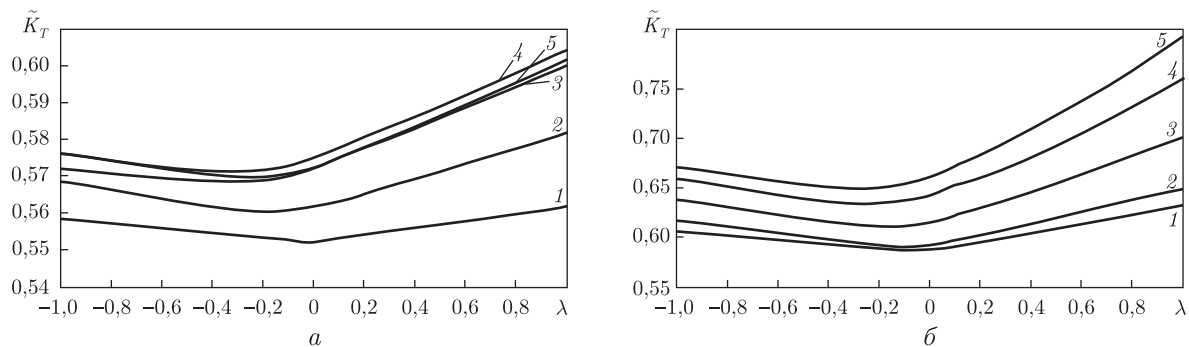


Рис. 1. Залежність коефіцієнта інтенсивності зусилля $\tilde{K}_T = hK_T/M^*l$ від кривини оболонки для фіксованого значення $\beta = 1/2$ (а), $\beta = 1$ (б) та різних значень параметра ρ – відстані між тріщинами

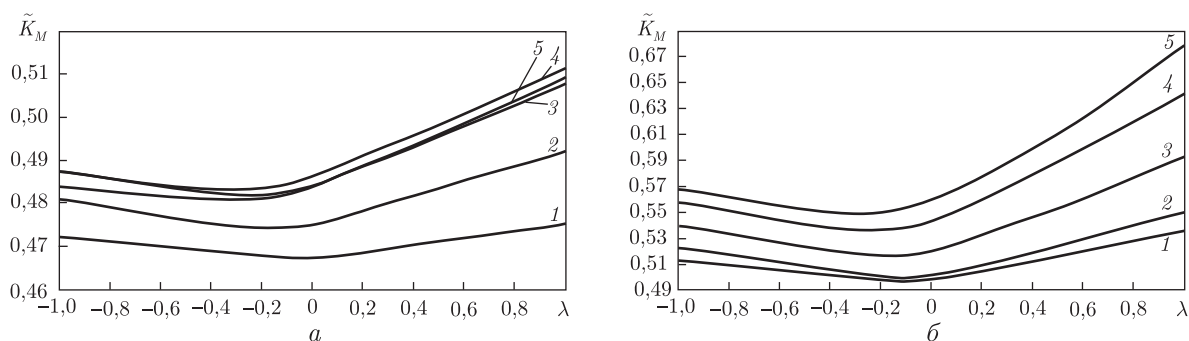


Рис. 2. Залежність коефіцієнта інтенсивності моменту $\tilde{K}_M = K_M/(ml)$ від кривини оболонки для фіксованого значення $\beta = 1/2$ (а), $\beta = 1$ (б) та різних значень параметра ρ – відстані між тріщинами

На рис. 1, 2 наведено залежність коефіцієнтів інтенсивності зусилля та моменту від кривини оболонки для $\beta = 0,5$ (криві 1, 2), $\beta = 1$ (3, 4) відповідно.

Отримані тут результати у граничних випадках збігаються з одержаними у роботі [3].

Таким чином, із збільшенням кривини оболонки та розміру тріщини значення коефіцієнта інтенсивності зусиль і моментів зростає, що призводить до зменшення несучої здатності оболонки.

Залежність коефіцієнтів від відстані між тріщинами є немонотонною, а також вона посилюється із зменшенням відстані.

1. *Механіка композитов*. В 12 т. / Под общей ред. А. Н. Гузя. – Киев: Наук. думка, 1993. – Т. 7. Концентрация напряжений / А. Н. Гузь, А. С. Космодамианский, В. П. Шевченко и др.. – Киев: А. С. К., 1998. – 387 с.
2. Довбня Е. Н., Силкина А. А. К оценке погрешности применения теории специальной ортотропии при расчете оболочек произвольной кривизны с двумя параллельными трещинами // Вісн. Донецьк. ун-ту. Сер. А. – 2004. – № 1. – С. 139–143.
3. Шацький І. П., Маковійчук М. В. Рівновага сферичної пологої оболонки з урахуванням закриття колінарних тріщин при згині // Фіз.-мат. моделювання та інформаційні технології. – 2010. – Вип. 12. – С. 189–195.
4. Liu R., Zhao J., Wu X. J. An improved shell theory applied for failure analysis of pressure vessels // Pressure Vessels and Piping Conference. – 2011. – 3. – P. 715–756.
5. Liu R., Zhang T., Wu X. J., Wang C. H. Determination of stress intensity factors for a cracked shell under bending with improved shell theories // J. of Aerospace Engineering. – 2006. – 19, Is. 1. – P. 21–28.

6. Шацький І. П. Інтегральні рівняння задачі згину пологої оболонки, ослабленої розрізом з контактними кромками // Доп. АН УРСР. Сер. А. – 1991. – № 2. – С. 26–29.

Донецький національний університет

Надійшло до редакції 13.03.2013

Е. Н. Довбня, Ю. В. Григорчук

Напряженное состояние оболочки двоякой кривизны с двумя параллельными трещинами при изгибающем нагружении

Рассматривается изотропная оболочка двоякой кривизны, ослабленная двумя сквозными параллельными трещинами, берега которых контактируют при изгибе оболочки. Решение задачи построено с помощью метода сингулярных интегральных уравнений и численного метода механических квадратур. Проведено численное исследование зависимости коэффициентов интенсивности от размеров трещин и кривизны оболочки.

K. M. Dovbnya, J. V. Grigorchuk

The stressed state of a dual curvature shell with two parallel cracks under bending

An isotropic dual curvature shell weakened by two collinear through-cracks with the edges contacting at a bending of the shell is considered. The solution of the problem is obtained, by using the theory of distributions and the integral two-dimensional Fourier transformation. The method of mechanical quadratures is used for the solution of singular integral equations. A numerical investigation of the dependence of the intensity ratios on the dimensions of the cracks, the distance between them, and the curvature of shell's middle surface is conducted.