УДК 517.946

**Т. М. Пилипюк,** асистент

Кам'янець-Подільський національний університет
імені Івана Огієнка, м. Кам'янець-Подільський

# ІНТЕГРАЛЬНЕ ЗОБРАЖЕННЯ РОЗВ'ЯЗКУ МІШАНОЇ ЗАДАЧІ ДЛЯ СИСТЕМИ ЕВОЛЮЦІЙНИХ РІВНЯНЬ ПАРАБОЛІЧНОГО ТИПУ, ЗМОДЕЛЬОВАНИХ МЕТОДОМ ГІБРИДНОГО ДИФЕРЕНЦІАЛЬНОГО ОПЕРАТОРА ФУР'Є-ФУР'Є-ЛЕЖАНДРА НА КУСКОВО-ОДНОРІДНІЙ ПОЛЯРНІЙ ОСІ З М'ЯКИМИ МЕЖАМИ

Методом гібридного інтегрального перетворення типу Фур'є-Фур'є-Лежандра із спектральним параметром одержано інтегральне зображення точного аналітичного розв'язку мішаної задачі для сепаратної системи рівнянь параболічного типу на трискладовій полярній осі $r \geq R_0 \geq 0$ з м'якими межами. Моделювання еволюційного процесу здійснено методом гібридного диференціального оператора Фур'є-Фур'є-Лежандра.

**Ключові слова**: *гібридний диференціальний оператор, функції Коші та функції впливу крайової задачі, гібридне інтегральне перетворення із спектральним параметром, основна тотожність, головні розв'язки.*

**Постановка проблеми та її аналіз**. Еволюційні процеси, зокрема процес поширення тепла відіграють фундаментальну роль в інтенсивних виробничих і технологічних процесах. Найпростішою математичною моделлю процесу теплоперенесення є диференціальне рівняння теплопровідності параболічного типу [1]

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \gamma^2 u - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} = f(t,r), \quad r \geq R_0 \geq 0$$

з відповідними початковою та крайовими умовами.

З появою композитних матеріалів фізико-технічні характеристики матеріалів композиту зображали як єдину функцію з допомогою одиничних функцій Гевісайда [8]. Та це приводило до диференціальних рівнянь другого порядку із сингулярними коефіцієнтами типу дельта-функції та похідних від неї. На жаль, інтегральне зображення точного аналітичного розв'язку задачі теплопровідності, змодельованої цим методом кусково-сталих фізико-технічних характеристик, одержати неможливо. Ми пропонуємо процеси поширення тепла та інші еволюційні процеси в композитних матеріалах apriori моделювати гібридними диференціальними операторами з відомою фундаментальною системою розв'язків, яка володіє нормальними асимптотичними властивостями. Це дозволяє запровадити відповідні гібридні інтегральні перетворення зі спектральним параметром й цим методом одержати інтегральне зображення точного аналітичного розв'язку параболічної задачі в кусково-однорідних середовищах з м'якими межами.

**Основна частина**. Розглянемо задачу про знаходження обмеженого в області

$$D_2^+ = \left\{(t,r) : t \in (0,\infty); r \in I_2^+ = (R_0, R_1) \cup (R_1, R_2) \cup (R_2, \infty); R_0 \geq 0\right\}$$

розв'язку сепаратної системи диференціальних рівнянь параболічного типу [1]

$$\begin{aligned} &\frac{\partial u_1}{\partial t} + \gamma_1^2 u_1 - a_1^2 \frac{\partial^2 u_1}{\partial r^2} = f_1(t,r), \quad r \in (R_0, R_1), \\ &\frac{\partial u_2}{\partial t} + \gamma_2^2 u_2 - a_2^2 \frac{\partial^2 u_2}{\partial r^2} = f_2(t,r), \quad r \in (R_1, R_2), \\ &\frac{\partial u_3}{\partial t} + \gamma_3^2 u_3 - a_3^2 \Lambda_{(\mu)}[u_3] = f_3(t,r), \quad r \in (R_2, \infty) \end{aligned} \tag{1}$$

з нульовими початковими умовами, крайовими умовами

$$\left[\left(\alpha_{11}^0 + \delta_{11}^0 \frac{\partial}{\partial t}\right)\frac{\partial}{\partial r} + \beta_{11}^0 + \gamma_{11}^0 \frac{\partial}{\partial t}\right] u_1(t,r)\Bigg|_{r=R_0} = g_0(t), \quad \lim_{r\to\infty} \frac{\partial^k u_3}{\partial r^k} = 0, \; k = 0,1 \tag{2}$$

та умовами спряження

$$\begin{aligned} &\left\{\left[\left(\alpha_{j1}^k + \delta_{j1}^k \frac{\partial}{\partial t}\right)\frac{\partial}{\partial r} + \beta_{j1}^k + \gamma_{j1}^k \frac{\partial}{\partial t}\right] u_k(t,r) - \left[\left(\alpha_{j2}^k + \delta_{j2}^k \frac{\partial}{\partial t}\right)\frac{\partial}{\partial r} + \right.\right. \\ &\left.\left. + \beta_{j2}^k + \gamma_{j2}^k \frac{\partial}{\partial t}\right] u_{k+1}(t,r)\right\}\Bigg|_{r=R_k} = \omega_{jk}(t), \quad j,k = 1,2. \end{aligned} \tag{3}$$

У системі (1) беруть участь диференціальні оператори Фур'є другого порядку $\frac{\partial^2}{\partial r^2}$ [2] та узагальнений диференціальний оператор Лежандра $\Lambda_{(\mu)} = \frac{d^2}{dr^2} + cthr\frac{d}{dr} + \frac{1}{4} + \frac{1}{2}\left(\frac{\mu_1^2}{1-chr} + \frac{\mu_2^2}{1+chr}\right)$ [3].

Припускаємо, що виконані умови на коефіцієнти: $\alpha_{11}^0 \leq 0$, $\beta_{11}^0 \geq 0$, $|\alpha_{11}^0| + \beta_{11}^0 \neq 0$, $\gamma_j^2 \geq 0$, $a_j^2 > 0$, $j = \overline{1,3}$; $\alpha_{jm}^k \geq 0$, $\beta_{jm}^k \geq 0$, $\delta_{jm}^k \geq 0$, $\gamma_{jm}^k \geq 0$, $c_{j1,k} = \alpha_{2j}^k \beta_{1j}^k - \alpha_{1j}^k \beta_{2j}^k$, $\mu_1 \geq \mu_2 \geq 0$, $(\mu) = (\mu_1, \mu_2)$.

Із коефіцієнтів, що беруть участь у формулюванні умов спряження (3), складемо матриці

$$A_{j1,k} = \begin{bmatrix} \alpha_{1j}^k & \beta_{1j}^k \\ \alpha_{2j}^k & \beta_{2j}^k \end{bmatrix}, \; A_{j2,k} = \begin{bmatrix} \delta_{1j}^k & \gamma_{1j}^k \\ \delta_{2j}^k & \gamma_{2j}^k \end{bmatrix}, \; j,k = 1,2.$$

Визначимо числа:

$$c_{j1,k} = -\det A_{j1,k} = \alpha_{2j}^k \beta_{1j}^k - \alpha_{1j}^k \beta_{2j}^k, \; c_{j2,k} = -\det A_{j2,k} = \delta_{2j}^k \gamma_{1j}^k - \delta_{1j}^k \gamma_{2j}^k,$$

$$c_{11,12}^{12,k} = \alpha_{11}^k \gamma_{21}^k - \alpha_{21}^k \gamma_{11}^k, \; c_{11,12}^{21,k} = \beta_{11}^k \delta_{21}^k - \beta_{21}^k \delta_{11}^k, \; j,k = 1,2, \tag{4}$$

$$c_{21,22}^{12,k} = \alpha_{12}^k \gamma_{22}^k - \alpha_{22}^k \gamma_{12}^k, \; c_{21,22}^{21,k} = \beta_{12}^k \delta_{22}^k - \beta_{22}^k \delta_{12}^k.$$

У подальшому вимагаємо виконання рівностей:

$$c_{11,k} c_{21,k} > 0, \; c_{j2,k} = 0, \; c_{11,12}^{12,k} = c_{11,12}^{21,k}, \; c_{21,22}^{12,k} = c_{21,22}^{21,k}. \tag{5}$$

**Зауваження 1.** Якщо початкові умови ненульові, тобто $u_j(t,r)\big|_{t=0} = g_j(r)$, то переходимо до нової функції $v_j(t,r)$ за правилом

$$u_j(t,r) = v_j(t,r) + g_j(r), \; j = \overline{1,3}.$$

Очевидно, що $v_j(t,r)\big|_{t=0} = 0$. Неважко переписати задачу (1)—(3) для нової шуканої функції $v(t,r) = \{v_1(t,r); v_2(t,r); v_3(t,r)\}$.

**Зауваження 2.** Наявність диференціального оператора $\dfrac{\partial}{\partial t}$ в умовах спряження й крайовій умові в точці $r = R_0$ означає, що межі середовища м'які по відношенню до відбиття хвиль.

**Зауваження 3.** У випадку, коли межі середовища жорсткі по відношенню до відбиття хвиль ($\delta_{11}^0 = 0$, $\gamma_{11}^0 = 0$, $\delta_{jm}^k = 0$, $\gamma_{jm}^k = 0$), інтегральне зображення аналітичного розв'язку задачі (1)—(3) можна побудувати методом гібридного інтегрального перетворення Фур'є-Фур'є-Лежандра, запровадженого в роботі [4] (при $\mu_1 = \mu_2 = \mu$).

Побудуємо аналог гібридного інтегрального перетворення Фур'є-Фур'є-Лежандра для нашого випадку методом дельта-подібної послідовності — ядро Коші: фундаментальна матриця розв'язків задачі Коші для сепаратної системи рівнянь параболічного типу, породженої на множині $I_2^+$ гібридним диференціальним оператором (ГДО)

$$\begin{gathered} M_{(\mu)} = a_1^2 \theta(r - R_0)\theta(R_1 - r)\frac{d^2}{dr^2} + \\ + a_2^2 \theta(r - R_1)\theta(R_2 - r)\frac{d^2}{dr^2} + a_3^2 \theta(r - R_2)\Lambda_{(\mu)}, \end{gathered} \tag{6}$$

де $\theta(x)$ — одинична функція Гевісайда [5].

Розглянемо задачу побудови обмеженого в області $D_2^+$ розв’язку сепаратної системи рівнянь параболічного типу [1]

$$\frac{1}{a_1^2}\left(\frac{\partial}{\partial t}+\gamma_1^2\right)u_1(t,r)-\frac{\partial^2 u_1}{\partial r^2}=0,\quad r\in(R_0,R_1),$$
$$\frac{1}{a_2^2}\left(\frac{\partial}{\partial t}+\gamma_2^2\right)u_2(t,r)-\frac{\partial^2 u_2}{\partial r^2}=0,\quad r\in(R_1,R_2), \tag{7}$$
$$\frac{1}{a_3^2}\left(\frac{\partial}{\partial t}+\gamma_3^2\right)u_3(t,r)-\Lambda_{(\mu)}[u_3]=0,\quad r\in(R_2,\infty)$$

з початковими умовами

$$u_1(t,r)\big|_{t=0}=g_1(r),\quad r\in(R_0,R_1),$$
$$u_2(t,r)\big|_{t=0}=g_2(r),\quad r\in(R_1,R_2), \tag{8}$$
$$u_3(t,r)\big|_{t=0}=g_3(r),\quad r\in(R_2,\infty),$$

крайовими умовами

$$\left[\left(\alpha_{11}^0+\delta_{11}^0\frac{\partial}{\partial t}\right)\frac{\partial}{\partial r}+\beta_{11}^0+\gamma_{11}^0\frac{\partial}{\partial t}\right]u_1(t,r)\Bigg|_{t=0}=0,\quad \lim_{r\to\infty}\frac{\partial^k u_3}{\partial r^k}=0,\ k=0,1 \tag{9}$$

та однорідними умовами спряження

$$\left\{\left[\left(\alpha_{j1}^k+\delta_{j1}^k\frac{\partial}{\partial t}\right)\frac{\partial}{\partial r}+\beta_{j1}^k+\gamma_{j1}^k\frac{\partial}{\partial t}\right]u_k(t,r)-\left[\left(\alpha_{j2}^k+\delta_{j2}^k\frac{\partial}{\partial t}\right)\frac{\partial}{\partial r}+\right.\right.$$
$$\left.\left.+\beta_{j2}^k+\gamma_{j2}^k\frac{\partial}{\partial t}\right]u_{k+1}(t,r)\right\}\Bigg|_{r\,=\,R_k}=0,\quad j,k=1,2. \tag{10}$$

Припустимо, що функція $u(t,r)=\{u_1(t,r);u_2(t,r);u_3(t,r)\}$ є оригіналом за Лапласом щодо $t$ [6]. У зображенні за Лапласом задачі (7)—(10) відповідає крайова задача: побудувати обмежений на множині $I_2^+$ розв'язок сепаратної системи неоднорідних звичайних диференціальних рівнянь другого порядку Фур'є та Лежандра для модифікованих функцій [2; 3]

$$\left(\frac{d^2}{dr^2}-q_1^2\right)u_1^*(p,r)=-\overline{g}_1(r),\ r\in(R_0,R_1),$$
$$\left(\frac{d^2}{dr^2}-q_2^2\right)u_2^*(p,r)=-\overline{g}_2(r),\ r\in(R_1,R_2), \tag{11}$$
$$\left(\Lambda_{(\mu)}-q_3^2\right)u_3^*(p,r)=-\overline{g}_3(r),\ r\in(R_2,\infty),$$

з крайовими умовами

$$\left(\overline{\alpha}_{11}^0\frac{d}{dr}+\overline{\beta}_{11}^0\right)u_1^*\big|_{r=0}=\psi_0;\quad \lim_{r\to\infty}\frac{du_3^*}{dr}=0 \tag{12}$$

та умовами спряження

$$\left[\left(\bar{\alpha}_{j1}^{k}\frac{d}{dr}+\bar{\beta}_{j1}^{k}\right)u_{k}^{*}-\left(\bar{\alpha}_{j2}^{k}\frac{d}{dr}+\bar{\beta}_{j2}^{k}\right)u_{k+1}^{*}\right]\Bigg|_{r=R_k}=\bar{\psi}_{jk};\quad j,k=1,2. \qquad (13)$$

У рівностях (11)—(13) прийняті позначення:

$$q_j^2=a_j^{-2}(p+\gamma_j^2),\ \bar{g}_j=a_j^{-2}g_j(r),\ \bar{\alpha}_{jk}^m=\alpha_{jk}^m+\delta_{jk}^m p,\ \bar{\beta}_{jk}^m=\beta_{jk}^m+\gamma_{jk}^m p,$$

$$\bar{\alpha}_{11}^0=\alpha_{11}^0+\delta_{11}^0 p,\ \bar{\beta}_{11}^0=\beta_{11}^0+\gamma_{11}^0 p,\ \psi_0=\delta_{11}^0 g_1'(R_0)+\gamma_{11}^0 g_1(R_0),$$

$$\bar{\psi}_{jk}=\delta_{j1}^k g_k'(R_k)+\gamma_{j1}^k g_k(R_k)-[\delta_{j2}^k g_{k+1}'(R_k)+\gamma_{j2}^k g_{k+1}(R_k)],$$

$$u_j^*(p,r)=\int_0^\infty u_j(t,r)e^{-pt}dt\ .$$

Можна вважати, що $\psi_0=0$ та $\bar{\psi}_{jk}=0$. Якщо це не так, то покладемо $g_j(r)=\varphi_j(r)+a_j r+b_j$, $j=\overline{1,3}$, $a_3=0$, і знайдемо $a_j$, $b_j$ із системи рівнянь:

$$\begin{gathered}(\delta_{11}^0+\gamma_{11}^0 R_0)a_1+\gamma_{11}^0 b_1=\psi_0,\\ \left(\delta_{j1}^k+\gamma_{j1}^k R_k\right)a_k+\gamma_{j1}^k b_k-\left[\left(\delta_{j2}^k+\gamma_{j2}^k R_k\right)a_{k+1}+\gamma_{j2}^k b_{k+1}\right]=\bar{\psi}_{jk},\ j,k=1,2.\end{gathered} \qquad (14)$$

При виконанні умов на коефіцієнти, алгебраїчна система (14) завжди має єдиний розв'язок.

Фундаментальну систему розв'язків для диференціального рівняння Фур'є $\left(\frac{d^2}{dr^2}-q_j^2\right)v=0$ утворюють функції $ch(b_j r)$ та $sh(b_j r)$ [2]; фундаментальну систему розв'язків для диференціального рівняння Лежандра $\left(\Lambda_{(\mu)}-q_3^2\right)v=0$ утворюють узагальнені приєднані функції Лежандра першого роду $P_{\upsilon_3}^{(\mu)}(chr)$ та другого роду $L_{\upsilon_3}^{(\mu)}(chr)$, $\upsilon_3=-1/2+q_3$ [3].

Наявність фундаментальної системи розв'язків дозволяє побудувати розв'язок крайової задачі (11)—(13) методом функцій Коші [2; 5]:

$$u_1^*(p,r)=A_1 chq_1 r+B_1 shq_1 r+\int_{R_0}^{R_1}E_1^*(p,r,\rho)\bar{g}_1(\rho)d\rho\ ,$$

$$u_2^*(p,r)=A_2 chq_2 r+B_2 shq_2 r+\int_{R_1}^{R_2}E_2^*(p,r,\rho)\bar{g}_2(\rho)d\rho\ , \qquad (15)$$

$$u_3^*(p,r)=B_3 L_{\upsilon_3}^{(\mu)}(chr)+\int_{R_2}^{\infty}E_3^*(p,r,\rho)\bar{g}_3(\rho)sh\rho d\rho\ .$$

У рівностях (15) $E_j^*(p,r,\rho)$ — функції Коші [2; 5]:

$$E_j^*(p,r,\rho)\Big|_{r=\rho+0}-E_j^*(p,r,\rho)\Big|_{r=\rho-0}=0.$$

$$\left.\frac{dE_j^*(p,r,\rho)}{dr}\right|_{r=\rho+0}-\left.\frac{dE_j^*(p,r,\rho)}{dr}\right|_{r=\rho-0}=-\frac{1}{z_j}, \tag{16}$$

де $z_1=1,\ z_2=1,\ z_3=sh\rho$.

Визначимо функції:

$$V_{jk}^{m1}(q_sR_m)=\bar{\alpha}_{jk}^m q_s shq_sR_m+\bar{\beta}_{jk}^m chq_sR_m,$$

$$V_{jk}^{m2}(q_sR_m)=\bar{\alpha}_{jk}^m q_s chq_sR_m+\bar{\beta}_{jk}^m shq_sR_m,$$

$$Z_{\upsilon_s;jk}^{(\mu),m1}(chR_m)=\left(\bar{\alpha}_{jk}^m\frac{d}{dr}+\bar{\beta}_{jk}^m\right)P_{\upsilon_s}^{(\mu)}(chr)\Big|_{r=R_m},$$

$$Z_{\upsilon_s;jk}^{(\mu),m2}(chR_m)=\left(\bar{\alpha}_{jk}^m\frac{d}{dr}+\bar{\beta}_{jk}^m\right)L_{\upsilon_s}^{(\mu)}(chr)\Big|_{r=R_m},$$

$$d_j^*=V_{11}^{01}(q_1R_0)V_{j1}^{12}(q_1R_1)-V_{11}^{02}(q_1R_0)V_{j1}^{11}(q_1R_1),$$

$$\Delta_{jk}(q_2R_1;q_2R_2)=V_{j2}^{11}(q_2R_1)V_{k1}^{22}(q_2R_2)-V_{j2}^{12}(q_2R_1)V_{k1}^{21}(q_2R_2);\quad j,k=1,2;$$

$$\Phi_{jk}^m(q_sR_m,q_sr)=V_{jk}^{m2}(q_sR_m)chq_sr-V_{jk}^{m1}(q_sR_m)shq_sr,$$

$$F_{\upsilon_s;jk}^{(\mu),m}(chR_m,chr)=Z_{\upsilon_s;jk}^{(\mu),m1}(chR_m)L_{\upsilon_s}^{(\mu)}(chr)-Z_{\upsilon_s;jk}^{(\mu),m2}(chR_m)P_{\upsilon_s}^{(\mu)}(chr),$$

$$B_{(\mu)}(q_s)=\frac{\pi}{2}\frac{2^{\mu_1}\Gamma(1/2+q_s-\mu_{12}^+)\Gamma(1/2+q_s-\mu_{12}^-)}{2^{\mu_2}\Gamma(1/2+q_s+\mu_{12}^+)\Gamma(1/2+q_s+\mu_{12}^-)},\quad \mu_{12}^{\pm}=\frac{1}{2}(\mu_1\pm\mu_2).$$

Безпосередньо перевіряється, що за функції Коші $E_j^*(p,r,\rho)$ можна взяти функції:

$$E_1^*(p,r,\rho)=\frac{-1}{q_1d_1^*}\begin{cases}\Phi_{11}^0(q_1R_0,q_1r)\Phi_{11}^1(q_1R_1,q_1\rho), & R_0<r<\rho<R_1,\\ \Phi_{11}^0(q_1R_0,q_1\rho)\Phi_{11}^1(q_1R_1,q_1r), & R_0<\rho<r<R_1.\end{cases} \tag{17}$$

$$E_2^*(p,r,\rho)=-\frac{1}{\Delta_{11}(q_2R_1,q_2R_2)q_2}\times$$
$$\times\begin{cases}\Phi_{12}^1(q_2R_1,q_2r)\Phi_{11}^2(q_2R_2,q_2\rho), & R_1<r<\rho<R_2,\\ \Phi_{12}^1(q_2R_1,q_2\rho)\Phi_{11}^2(q_2R_2,q_2r), & R_1<\rho<r<R_2.\end{cases} \tag{18}$$

$$E_3^*(p,r,\rho)=\frac{-B_{(\mu)}(q_3)}{Z_{\upsilon_3;12}^{(\mu);22}(chR_2)}\begin{cases}F_{\upsilon_3;12}^{(\mu),2}(chR_2,chr)L_{\upsilon_3}^{(\mu)}(ch\rho), & R_2<r<\rho<\infty,\\ F_{\upsilon_3;12}^{(\mu),2}(chR_2,ch\rho)L_{\upsilon_3}^{(\mu)}(chr), & R_2<\rho<r<\infty.\end{cases} \tag{19}$$

Крайова умова в точці $r = R_0$ та умови спряження (13) для визначення величин $A_j$ $(j=1,2)$ й $B_k$ $(k=\overline{1,3})$ дають неоднорідну систему з п'яти рівнянь:

$$V_{11}^{01}(q_1R_0)A_1 + V_{11}^{02}(q_1R_0)B_1 = 0,$$

$$V_{j1}^{11}(q_1R_1)A_1 + V_{j1}^{12}(q_1R_1)B_1 - V_{j2}^{11}(q_2R_1)A_2 - V_{j2}^{12}(q_2R_1)B_2 = \delta_{j2}G_{12}^*,\ j=1,2;$$

$$V_{j1}^{21}(q_2R_2)A_2 + V_{j1}^{22}(q_2R_2)B_2 - Z_{\upsilon_3;j2}^{(\mu);22}(chR_2)B_3 = \delta_{j2}G_{23}^*. \qquad (20)$$

У системі (20) беруть участь функції

$$G_{12}^* = -c_{11}^*\int_{R_0}^{R_1}\frac{\Phi_{11}^0(q_1R_0,q_1\rho)}{d_1^*(q_1R_0,q_1R_1)}\bar{g}_1(\rho)d\rho + c_{21}^*\int_{R_1}^{R_2}\frac{\Phi_{11}^2(q_2R_2,q_2\rho)}{\Delta_{11}(q_2R_1,q_2R_2)}\bar{g}_2(\rho)d\rho\,,$$

$$G_{23}^* = -c_{12}^*\int_{R_1}^{R_2}\frac{\Phi_{12}^1(q_2R_1,q_2\rho)}{\Delta_{11}(q_2R_1,q_2R_2)}\bar{g}_2(\rho)d\rho + \frac{c_{22}^*}{shR_2}\int_{R_2}^{\infty}\frac{L_{\upsilon_3}^{(\mu)}(ch\rho)}{Z_{\upsilon_3;12}^{(\mu);22}(chR_2)}\bar{g}_3(\rho)sh\rho d\rho$$

та символ Кронекера $\delta_{j2}$ ( $\delta_{12}=0$ , $\delta_{22}=1$ ).

Введемо до розгляду функції:

$$A_j(p) = d_1^*(q_1R_0,q_1R_1)\Delta_{2j}(q_2R_1,q_2R_2) -$$
$$-d_2^*(q_1R_0,q_1R_1)\Delta_{1j}(q_2R_1,q_2R_2);\quad j=1,2,$$

$$B_{(\mu);j}(p) = Z_{\upsilon_3;12}^{(\mu);22}(chR_2)\Delta_{j2}(q_2R_1,q_2R_2) - Z_{\upsilon_3;22}^{(\mu);22}(chR_2)\Delta_{j1}(q_2R_1,q_2R_2)\,,$$

$$\Theta_1(p,r) = d_1^*(q_1R_0,q_1R_1)\Phi_{22}^1(q_2R_1,q_2r) - d_2^*(q_1R_0,q_1R_1)\Phi_{12}^1(q_2R_1,q_2r)\,,$$

$$\Theta_{(\mu);2}(p,r) = Z_{\upsilon_3;12}^{(\mu),22}(chR_2)\Phi_{21}^2(q_2R_2,q_2r) - Z_{\upsilon_3;22}^{(\mu),22}(chR_2)\Phi_{11}^2(q_2R_2,q_2r)\,.$$

Припустимо, що виконана умова однозначної розв'язності крайової задачі (11)—(13): для $p=\sigma+is$ із $\operatorname{Re}p=\sigma>\sigma_0$, де $\sigma_0$ — абсциса збіжності інтеграла Лапласа, та $\operatorname{Im}p = s\in(-\infty,+\infty)$ визначник алгебраїчної системи (20) відмінний від нуля

$$\Delta_{(\mu)}(p) \equiv A_1(p)Z_{\upsilon_3;22}^{(\mu),22}(chR_2) - A_2(p)Z_{\upsilon_3;12}^{(\mu),22}(chR_2) =$$
$$= B_{(\mu);2}(p)d_1^*(q_1R_0,q_1R_1) - B_{(\mu);1}(p)d_2^*(q_1R_0,q_1R_1) \neq 0. \qquad (21)$$

Визначимо породжені неоднорідністю системи (11) функції впливу:

$$H_{(\mu);11}^*(p,r,\rho) = \frac{1}{q_1\Delta_{(\mu)}(p)}\begin{cases}\Phi_{11}^0(q_1R_0,q_1r)\Big[B_{(\mu);1}(p)\Phi_{21}^1(q_1R_1,q_1\rho) - \\ \quad - B_{(\mu);2}(p)\Phi_{11}^1(q_1R_1,q_1\rho)\Big],\quad R_0<r<\rho<R_1, \\ \Phi_{11}^0(q_1R_0,q_1\rho)\Big[B_{(\mu);1}(p)\Phi_{21}^1(q_1R_1,q_1r) - \\ \quad - B_{(\mu);2}(p)\Phi_{11}^1(q_1R_1,q_1r)\Big],\quad R_0<\rho<r<R_1,\end{cases}$$

$$H^*_{(\mu);12}(p,r,\rho) = -\frac{\overset{*}{c}_{21}}{\Delta_{(\mu)}(p)}\Phi^0_{11}(q_1R_0, q_1r)\Theta_{(\mu);2}(p,\rho),$$

$$H^*_{(\mu);13} = -\frac{\overset{*}{c}_{21}q_2\overset{*}{c}_{22}}{shR_2\Delta_{(\mu)}(p)} \times \Phi^0_{11}(q_1R_0, q_1r)L^{(\mu)}_{\upsilon_3}(ch\rho),$$

$$H^*_{(\mu);21}(p,r,\rho) = -\frac{\overset{*}{c}_{11}}{\Delta_{(\mu)}(p)}\Phi^0_{11}(q_1R_0, q_1\rho)\Theta_{(\mu);2}(p,r), \qquad (22)$$

$$H^*_{(\mu);22}(p,r,\rho) = \frac{1}{q_2\Delta_{(\mu)}(p)}\begin{cases}\Theta_1(p,r)\Theta_{(\mu);2}(p,\rho), & R_1 < r < \rho < R_2,\\ \Theta_1(p,\rho)\Theta_{(\mu);2}(p,r), & R_1 < \rho < r < R_2,\end{cases}$$

$$H^*_{(\mu);23}(p,r,\rho) = \frac{\overset{*}{c}_{22}}{\Delta_{(\mu)}(p)shR_2}\cdot\Theta_1(p,r)L^{(\mu)}_{\upsilon_3}(ch\rho);$$

$$H^*_{(\mu);31}(p,r,\rho) = -\frac{\overset{*}{c}_{11}\overset{*}{c}_{12}q_2}{\Delta_{(\mu)}(p)} \times\Phi^0_{11}(q_1R_0, q_1\rho)L^{(\mu)}_{\upsilon_3}(ch\rho),$$

$$H^*_{(\mu);32}(p,r,\rho) = \frac{\overset{*}{c}_{12}}{\Delta_{(\mu)}(p)}\Theta_1(p,\rho)L^{(\mu)}_{\upsilon_3}(chr),$$

$$H^*_{(\mu);33}(p,r,\rho) = \frac{B_{(\mu)}(q_3)}{\Delta_{(\mu)}(p)}\begin{cases}L^{(\mu)}_{\upsilon_3}(ch\rho)\Big[A_2(p)F^{(\mu);2}_{\upsilon_3;12}(chR_2, chr) -\\ L^{(\mu)}_{\upsilon_3}(chr)\Big[A_2(p)F^{(\mu);2}_{\upsilon_3;12}(chR_2, ch\rho) -\end{cases}$$

$$-A_1(p)F^{(\mu);2}_{\upsilon_3;22}(chR_2, chr)\Big], \quad R_2 < r < \rho < \infty,$$

$$-A_1(p)F^{(\mu);2}_{\upsilon_3;22}(chR_2, ch\rho)\Big], \quad R_2 < \rho < r < \infty.$$

У результаті однозначної розв'язності алгебраїчної системи (20), підстановки отриманих значень $A_j$ та $B_k$ у формули (15) й низки елементарних перетворень одержуємо єдиний розв'язок крайової задачі (11)—(13):

$$u^*_j(p,r) = \int_{R_0}^{R_1} H^*_{(\mu);j1}(p,r,\rho)\overline{g}_1(\rho)d\rho + \int_{R_1}^{R_2} H^*_{(\mu);j2}(p,r,\rho)\overline{g}_2(\rho)d\rho +$$
$$+\int_{R_2}^{\infty} H^*_{(\mu);j3}(p,r,\rho)\overline{g}_3(\rho)sh\rho d\rho, \quad j=\overline{1,3}. \qquad (23)$$

Повертаючись у рівності (23) до оригіналу, маємо єдиний розв'язок задачі (7)—(10):

$$u_j(t,r)=\int_{R_0}^{R_1} H_{(\mu);j1}(t,r,\rho)\overline{g}_1(\rho)d\rho+\int_{R_1}^{R_2} H_{(\mu);j2}(t,r,\rho)\overline{g}_2(\rho)d\rho+$$
$$+\int_{R_2}^{\infty} H_{(\mu);j3}(t,r,\rho)\overline{g}_3(\rho)sh\rho d\rho,\quad j=\overline{1,3}. \qquad (24)$$

Тут за означенням [6] функції

$$H_{(\mu);jk}(t,r,\rho)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma_0-i\infty}^{\sigma_0+i\infty} H^*_{(\mu);jk}(p,r,\rho)e^{pt}d\rho,\ j,k=\overline{1,3}. \qquad (25)$$

Особливими точками функцій впливу $H^*_{(\mu);jk}(p,r,\rho)$ є точки галуження $p=-\gamma_1^2$, $p=-\gamma_2^2$, $p=-\gamma_3^2$ та $p=\infty$. Покладемо $q_j=ib_ja_j^{-1}=$ $=ia_j^{-1}(\beta^2+k_j^2)^{1/2}$, де $k_j^2\geq 0$, $\beta$ — спектральний параметр, $\beta\in(0,\infty)$. Тоді одержимо: $p+\gamma_j^2=(\beta^2+k_j^2)\exp\pi i$, $p=-(\beta^2+k_j^2+\gamma_j^2)=$ $=-(\beta^2+\gamma^2)\equiv\exp\pi i(\beta^2+\gamma^2)$; $dp=-2\beta d\beta$, $k_j^2=\gamma^2-\gamma_j^2$, $\gamma^2=\max\left\{\gamma_1^2;\gamma_2^2;\gamma_3^2\right\}$. Якщо $\gamma^2=\gamma_1^2>0$, то $k_1^2=0$, $k_2^2=\gamma_1^2-\gamma_2^2\geq 0$, $k_3^2=\gamma_1^2-\gamma_3^2\geq 0$; якщо $\gamma^2=\gamma_2^2>0$, то $k_1^2=\gamma_2^2-\gamma_1^2\geq 0$, $k_2^2=0$, $k_3^2=\gamma_2^2-\gamma_3^2\geq 0$; якщо $\gamma^2=\gamma_3^2>0$, то $k_1^2=\gamma_3^2-\gamma_1^2\geq 0$, $k_2^2=\gamma_3^2-\gamma_2^2\geq 0$, $k_3^2=0$.

Методом контурного інтегралу з використанням леми Жордана й теореми Коші [6] приводимо формули (25) до розрахункових:

$$H_{(\mu);jk}(t,r,\rho)=-\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}\mathrm{Im}\left[H^*_{(\mu);jk}\left(e^{i\pi}(\beta^2+\gamma^2),r,\rho\right)\right]e^{-(\beta^2+\gamma^2)t}\beta d\beta;$$
$$j,k=\overline{1,3}. \qquad (26)$$

Встановимо необхідні в подальшому співвідношення [7]:

$$ch(q_jx)=ch(i\overline{b}_jx)=\cos(\overline{b}_jx);\ sh(q_jx)=i\sin(\overline{b}_jx),$$
$$\overline{b}_j(\beta)=a_j^{-1}b_j(\beta);\quad i^2=-1;$$
$$\overline{\alpha}_{jm}^k(p)=\alpha_{jm}^k-(\beta^2+\gamma^2)\delta_{jm}^k\equiv\tilde{\alpha}_{jm}^k,\ \overline{\beta}_{jm}^k=\beta_{jm}^k-(\beta^2+\gamma^2)\gamma_{jm}^k\equiv\tilde{\beta}_{jm}^k;$$
$$V_{jk}^{m1}(i\overline{b}_sR_m)=-\tilde{\alpha}_{jm}^k\overline{b}_s\sin(\overline{b}_sR_m)+\tilde{\beta}_{jm}^k\cos(\overline{b}_sR_m)\equiv v_{jk}^{m1}(\overline{b}_sR_m),$$
$$V_{jk}^{m2}(i\overline{b}_sR_m)=i[\tilde{\alpha}_{jm}^k\overline{b}_s\cos(\overline{b}_sR_m)+\tilde{\beta}_{jm}^k\sin(\overline{b}_sR_m)]\equiv iv_{jk}^{m2}(\overline{b}_sR_m),$$
$$\Delta_{jk}(i\overline{b}_2R_1,i\overline{b}_2R_2)=i[v_{j2}^{11}(\overline{b}_2R_1)v_{k1}^{22}(\overline{b}_2R_2)-$$
$$-v_{j2}^{12}(\overline{b}_2R_1)v_{k1}^{21}(\overline{b}_2R_2)]\equiv i\delta_{jk}(\overline{b}_2R_1,\overline{b}_2R_2),$$

$$d_j^*(i\overline{b}_1 R_0, i\overline{b}_1 R_1) = i[v_{11}^{01}(\overline{b}_1 R_0) v_{j1}^{12}(\overline{b}_1 R_1) - v_{11}^{02}(\overline{b}_1 R_0) v_{j1}^{11}(\overline{b}_1 R_1)] \equiv i d_j(\overline{b}_1 R_0, \overline{b}_1 R_1),$$

$$\Phi_{jk}^m(i\overline{b}_s x, i\overline{b}_s y) = i[v_{jk}^{m2}(\overline{b}_s x)\cos\overline{b}_s y - v_{jk}^{m1}(\overline{b}_s x)\sin(\overline{b}_s y)] \equiv i\varphi_{jk}^m(\overline{b}_s x, \overline{b}_s y).$$

Якщо скористатися співвідношеннями [3]

$$P_{\upsilon_3^*}^{(\mu)}(chr) = \sin\mu_1\pi \cdot A_{\upsilon_3^*}^{(\mu)}(chr) + \cos\mu_1\pi \cdot B_{\upsilon_3^*}^{(\mu)}(chr), \quad \upsilon_3^* = -1/2 + i\overline{b}_3(\beta),$$

$$L_{\upsilon_3^*}^{(\mu)}(chr) = A_{\upsilon_3^*}^{(\mu)}(chr) - i\gamma_{(\mu)}(\overline{b}_3) B_{\upsilon_3^*}^{(\mu)}(chr);$$

$$\gamma_{(\mu)}(\overline{b}_3) = \cos\mu_1\pi sh(2\pi\overline{b}_3) \times [\cos\mu_2\pi + \cos\mu_1\pi ch(2\pi\overline{b}_3)]^{-1},$$

то знаходимо такі залежності:

$$Z_{\upsilon_3^*;j2}^{(\mu);22}(chR_2) = Y_{\upsilon_3^*;j2}^{(\mu);21}(chR_2) - i\gamma_{(\mu)}(\overline{b}_3) Y_{\upsilon_3^*;j2}^{(\mu);22}(chR_2); \; j = 1,2;$$

$$Y_{\upsilon_3^*;kj}^{(\mu);m1}(chR_m) = \left(\tilde{\alpha}_{kj}^m \frac{d}{dr} + \tilde{\beta}_{kj}^m\right) A_{\upsilon_3^*}^{(\mu)}(chr)\Bigg|_{r=R_m},$$

$$Y_{\upsilon_3^*;kj}^{(\mu);m2}(chR_m) = \left(\tilde{\alpha}_{kj}^m \frac{d}{dr} + \tilde{\beta}_{kj}^m\right) B_{\upsilon_3^*}^{(\mu)}(chr)\Bigg|_{r=R_m}.$$

На основі одержаних співвідношень безпосередньо встановлюємо, що

$$A_j\left(e^{\pi i}(\beta^2+\gamma^2)\right) = d_2(\overline{b}_1 R_0, \overline{b}_1 R_1)\delta_{1j}(\overline{b}_2 R_1, \overline{b}_2 R_2) -$$
$$- d_1(\overline{b}_1 R_0, \overline{b}_1 R_1)\delta_{2j}(\overline{b}_2 R_1, \overline{b}_2 R_2) \equiv$$
$$\equiv -a_j(\beta), \Delta_{(\mu)}\left(e^{\pi i}(\beta^2+\gamma^2)\right) =$$
$$= -a_1\left(Y_{\upsilon_3^*;22}^{(\mu);21}(chR_2) - i\gamma_{(\mu)} Y_{\upsilon_3^*;22}^{(\mu);22}(chR_2)\right) + a_2\left(Y_{\upsilon_3^*;12}^{(\mu);21}(chR_2) -\right.$$
$$\left. - i\gamma_{(\mu)} Y_{\upsilon_3^*;12}^{(\mu);22}(chR_2)\right) = a_2 Y_{\upsilon_3^*;12}^{(\mu);21}(chR_2) - a_1 Y_{\upsilon_3^*;22}^{(\mu);21}(chR_2) -$$
$$- i\gamma_{(\mu)}\left(a_2 Y_{\upsilon_3^*;12}^{(\mu);22}(chR_2) - a_1 Y_{\upsilon_3^*;22}^{(\mu);22}(chR_2)\right) \equiv \omega_{(\mu);1}(\beta) - i\gamma_{(\mu)}\omega_{(\mu);2}(\beta).$$

$$\Phi_{11}^0(i\overline{b}_1 R_0, i\overline{b}_1 r) = i\varphi_{11}^0(\overline{b}_1 R_0, \overline{b}_1 r);$$

$$\Theta_1\left(e^{\pi i}(\beta^2+\gamma^2), r\right) = d_2(\overline{b}_1 R_0, \overline{b}_1 R_1) \times$$
$$\times \varphi_{12}^1(\overline{b}_2 R_1, \overline{b}_2 r) - d_1(\overline{b}_1 R_0, \overline{b}_1 R_1)\varphi_{22}^1(\overline{b}_2 R_1, \overline{b}_2 r).$$

Визначимо величини та функції:

$$\sigma_1 a_1^2 = \frac{c_{11,1}c_{11,2}}{c_{21,1}c_{21,2}} \cdot shR_2, \; \sigma_2 a_2^2 = \frac{c_{11,2}}{c_{21,2}} \cdot shR_2, \; \sigma_3 a_3^2 = 1,$$

$$V_{(\mu);1}(r,\beta) = \frac{c_{21,1}\overline{b}_2 c_{21,2}}{s_{(\mu)}(\overline{b}_3) shR_2} \times \varphi_{11}^0(\overline{b}_1 R_0, \overline{b}_1 r),$$

$$s_{(\mu)}(\overline{b_3}) = \frac{2^{\mu_1-\mu_2}\gamma_{(\mu)}(\overline{b_3})\pi^3}{sh(2\pi\overline{b_3})\left|\Gamma(1/2+ib_3+\mu_{12}^{+})\right|^2\left|\Gamma(1/2+ib_3+\mu_{12}^{-})\right|^2},$$

$$V_{(\mu);2}(r,\beta) = \frac{c_{21,2}}{s_{(\mu)}(\overline{b_3})shR_2}\Big[d_2(\overline{b_1}R_0,\overline{b_1}R_1)\varphi_{12}^1(\overline{b_2}R_1,\overline{b_2}r) -$$

$$-d_1(\overline{b_1}R_0,\overline{b_1}R_1)\varphi_{22}^1(\overline{b_2}R_1,\overline{b_2}r)\Big],$$

$$V_{(\mu);3}(r,\beta) = \omega_{(\mu);1}(\beta)B_{\upsilon_3^*}^{(\mu)}(chr) - \omega_{(\mu);2}(\beta)A_{\upsilon_3^*}^{(\mu)}(chr);$$

$$\Omega_{(\mu)}(\beta) = \frac{\beta\gamma_{(\mu)}(\overline{b_3})s_{(\mu)}(\overline{b_3})}{\left[\omega_{(\mu);1}(\beta)\right]^2 + \left[\gamma_{(\mu)}(\overline{b_3})\omega_{(\mu);2}(\beta)\right]^2}.$$

У результаті виконання зазначених у формулі (26) операцій, одержуємо аналітичні вирази функцій впливу:

$$H_{(\mu);jk}(t,r,\rho) =$$

$$= \frac{2}{\pi}\int_0^\infty V_{(\mu);j}(r,\beta)V_{(\mu);k}(\rho,\beta)\Omega_{(\mu)}(\beta)e^{-(\beta^2+\gamma^2)t}d\beta\sigma_k a_k^2; \quad j,k=\overline{1,3}. \tag{27}$$

Формули (24) набувають вигляду:

$$u_j(t,r) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty\left(\int_{R_0}^{R_1} g_1(\rho)V_{(\mu);1}(\rho,\beta)\sigma_1 d\rho\right)V_j(r,\beta)\Omega_{(\mu)}(\beta)e^{-(\beta^2+\gamma^2)t}d\beta +$$

$$+\frac{2}{\pi}\int_0^\infty\left(\int_{R_1}^{R_2} g_2(\rho)V_{(\mu);2}(\rho,\beta)\sigma_2 d\rho\right)V_j(r,\beta)\Omega_{(\mu)}(\beta)e^{-(\beta^2+\gamma^2)t}d\beta + \tag{28}$$

$$+\frac{2}{\pi}\int_0^\infty\left(\int_{R_2}^{\infty} g_3(\rho)V_{(\mu);3}(\rho,\beta)\sigma_3\ \boldsymbol{sh}\ \rho\ d\rho\right)V_j(r,\beta)\Omega_{(\mu)}(\beta)e^{-(\beta^2+\gamma^2)t}d\beta,\quad j=\overline{1,3}.$$

Внаслідок початкових умов й властивостей ядра Коші як дельта-подібної послідовності маємо інтегральні зображення:

$$g_1(r) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty V_{(\mu);1}(r,\beta)\int_{R_0}^{R_1} g_1(\rho)V_{(\mu);1}(\rho,\beta)\sigma_1 d\rho\Omega_{(\mu)}(\beta)d\beta,$$

$$g_2(r) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty V_{(\mu);2}(r,\beta)\int_{R_1}^{R_2} g_2(\rho)V_{(\mu);2}(\rho,\beta)\sigma_2 d\rho\Omega_{(\mu)}(\beta)d\beta, \tag{29}$$

$$g_3(r) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty V_{(\mu);3}(r,\beta)\int_{R_2}^{\infty} g_3(\rho)V_{(\mu);3}(\rho,\beta)\sigma_3 sh\rho d\rho\Omega_{(\mu)}(\beta)d\beta.$$

Якщо визначити вагову функцію

$$\sigma(r) = \theta(r - R_0)\theta(R_1 - r)\sigma_1 + \theta(r - R_1)\theta(R_2 - r)\sigma_2 + \theta(r - R_2)\sigma_3 shr$$

та спектральну функцію

$$g(r) = \theta(r - R_0)\theta(R_1 - r)g_1(r) + \theta(r - R_1)\theta(R_2 - r)g_2(r) + \theta(r - R_2)g_3(r),$$

то інтегральні зображення (29) дають інтегральне зображення функції $g(r)$:

$$g(r) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty V_{(\mu)}(r,\beta)\left(\int_{R_0}^\infty g(\rho)V_{(\mu)}(\rho,\beta)\sigma(\rho)d\rho\right)\Omega_{(\mu)}(\beta)d\beta. \quad (30)$$

Інтегральне зображення (30) функції $g(r)$ визначає пряме $H_{(\mu)}$ та обернене $H_{(\mu)}^{-1}$ гібридне інтегральне перетворення, породжене на множині $I_2^+$ ГДО $M_{(\mu)}$, визначеного рівністю (6):

$$H_{(\mu)}[g(r)] = \int_{R_0}^\infty g(r)V_{(\mu)}(r,\beta)\sigma(r)dr \equiv \tilde{g}(\beta). \quad (31)$$

$$H_{(\mu)}^{-1}[\tilde{g}(\beta)] = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \tilde{g}(\beta)V_{(\mu)}(r,\beta)\Omega_{(\mu)}(\beta)d\beta \equiv g(r). \quad (32)$$

Мінімальні умови, які визначають справедливість інтегрального зображення (30), описує теорема.

**Теорема 1** (про інтегральне зображення). Якщо функція

$$f(r) = [\theta(r - R_0)\theta(R_1 - r)\cdot 1 + \theta(r - R_1)\theta(R_2 - r)\cdot 1 + \theta(r - R_2)\sqrt{shr}\,]g(r)$$

обмежена, неперервна й має обмежену варіацію на множині $[R_0, \infty)$, то для будь-якого $r \in I_2^+$ справджується інтегральне зображення (30).

Застосування правил (31), (32) до розв'язання відповідних задач математичної фізики кусково-однорідних середовищ базується на основній тотожності інтегрального перетворення ГДО $M_{(\mu)}$.

**Теорема 2** (про основну тотожність). Якщо функція $f_1(r) = \left\{g_1''(r); g_2''(r); \Lambda_{(\mu)}[g_3(r)]\right\}$ неперервна на множині $I_2^+$, а функції $g_j(r)$ задовольняють крайові умови

$$\left[\tilde{\alpha}_{11}^0 \frac{\partial}{\partial r} + \tilde{\beta}_{11}^0\right] g_1(r)\Big|_{r=R_0} = g_0, \quad \lim_{r\to\infty}\left[shr\left(\frac{dg_3}{dr}V_{(\mu);3} - g_3\frac{dV_{(\mu);3}}{dr}\right)\right] = 0 \quad (33)$$

та умови спряження

$$\left\{\left[\tilde{\alpha}_{j1}^k \frac{\partial}{\partial r} + \tilde{\beta}_{j1}^k\right] g_k - \left[\tilde{\alpha}_{j2}^k \frac{\partial}{\partial r} + \tilde{\beta}_{j2}^k\right] g_{k+1}\right\}\Big|_{r = R_k} = \omega_{jk}, \quad j,k = 1,2, \quad (34)$$

то справджується основна тотожність інтегрального перетворення гібридного диференціального оператора $M_{(\mu)}$:

$$H_{(\mu)}\left[M_{(\mu)}[g(r)]\right] = -\beta^2 \tilde{g}(\beta) - \sum_{i=1}^{3} k_i^2 \tilde{g}_i(\beta) + \left(-\tilde{\alpha}_{11}^0\right)^{-1} \times$$
$$\times V_{(\mu);1}(R_0, \beta)\sigma_1 a_1^2 g_0 + \sum_{k=1}^{2} d_k \left[Z_{(\mu);12}^k(\beta)\omega_{2k} - Z_{(\mu);22}^k(\beta)\omega_{1k}\right]. \quad (35)$$

У рівності (35) прийняті позначення:

$$d_1 = a_1^2\sigma_1 : c_{11,1}, \quad d_2 = a_2^2\sigma_2 : c_{11,2}, \quad \tilde{g}_1(\beta) = \int_{R_0}^{R_1} g_1(r) V_{(\mu);1}(r,\beta)\sigma_1 dr,$$

$$\tilde{g}_2(\beta) = \int_{R_1}^{R_2} g_2(r) V_{(\mu);2}(r,\beta)\sigma_2 dr, \quad \tilde{g}_3(\beta) = \int_{R_2}^{\infty} g_3(r) V_{(\mu);3}(r,\beta)\sigma_3 shr dr,$$

$$Z_{(\mu);i2}^k(\beta) = \left[\tilde{\alpha}_{i2}^k \frac{\partial}{\partial r} + \tilde{\beta}_{i2}^k\right] V_{(\mu);k+1}(r,\beta)\Big|_{r=R_k}, \quad i,k = 1,2.$$

Доведення основної тотожності (35) проводиться стандартним способом [4].

Одержані правила (31), (32) та (35) складають математичний апарат для розв'язання параболічної задачі (1)—(3) за відомою логічною схемою [4].

Запишемо систему (1) та нульові початкові умови у матричній формі:

$$\begin{bmatrix} \left(\frac{\partial}{\partial t} + \gamma_1^2 - a_1^2 \frac{\partial^2}{\partial r^2}\right) u_1(t,r) \\ \left(\frac{\partial}{\partial t} + \gamma_2^2 - a_2^2 \frac{\partial^2}{\partial r^2}\right) u_2(t,r) \\ \left(\frac{\partial}{\partial t} + \gamma_3^2 - a_3^2 \Lambda_{(\mu)}\right) u_3(t,r) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1(t,r) \\ f_2(t,r) \\ f_3(t,r) \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} u_1(t,r) \\ u_2(t,r) \\ u_3(t,r) \end{bmatrix}\Bigg|_{t=0} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (36)$$

Інтегральний оператор $H_{(\mu)}$ згідно правила (30) зобразимо у вигляді операторної матриці-рядка:

$$H_{(\mu)}[\ldots] = \left[\int_{R_0}^{R_1} \cdots V_{(\mu);1}(r,\beta)\sigma_1 dr \quad \int_{R_1}^{R_2} \cdots V_{(\mu);2}(r,\beta)\sigma_2 dr \quad \int_{R_2}^{\infty} \cdots V_{(\mu);3}(r,\beta)\sigma_3 shr dr\right]. \quad (37)$$

Застосуємо операторну матрицю-рядок (37) за правилом множення матриць до задачі (36). Внаслідок основної тотожності (35) одержуємо задачу Коші [2]:

$$\left(\frac{d}{dt}+\beta^2+\gamma^2\right)\tilde{u}(t,\beta)=\tilde{f}(t,\beta)+\left(-\tilde{\alpha}_{11}^{0}\right)^{-1}V_{(\mu);1}(R_0,\beta)\sigma_1 a_1^2 g_0(t)+$$

$$+\sum_{k=1}^{2}d_k\left[Z_{(\mu);12}^{k}(\beta)\omega_{2k}(t)-Z_{(\mu);22}^{k}(\beta)\omega_{1k}(t)\right], \qquad (38)$$

$$\tilde{u}(t,\beta)\Big|_{t=0}\equiv\sum_{i=1}^{3}\tilde{u}_i(t,\beta)\Big|_{t=0}=0,\ \gamma^2=\max\{\gamma_1^2;\gamma_2^2;\gamma_3^2\}.$$

Безпосередньо перевіряється, що розв'язком задачі Коші (38) є функція

$$\tilde{u}(t,\beta)=\int_0^t e^{-(\beta^2+\gamma^2)(t-\tau)}\tilde{f}(\tau,\beta)d\tau+$$

$$+\int_0^t e^{-(\beta^2+\gamma^2)(t-\tau)}g_0(\tau)d\tau\times\Big(-(\tilde{\alpha}_{11}^{0})^{-1}\sigma_1 a_1^2 V_{(\mu);1}(R_0,\beta)\Big)+$$

$$\sum_{k=1}^{2}d_k\left[\left(\int_0^t e^{-(\beta^2+\gamma^2)(t-\tau)}\omega_{2k}(\tau)d\tau\right)Z_{(\mu);12}^{k}(\beta)-\right. \qquad (39)$$

$$\left.-\left(\int_0^t e^{-(\beta^2+\gamma^2)(t-\tau)}\omega_{1k}(\tau)d\tau\right)Z_{(\mu);22}^{k}(\beta)\right].$$

Інтегральний оператор $H_{(\mu)}^{-1}$ згідно правила (32) як обернений до (37) зобразимо у вигляді операторної матриці-стовпця:

$$H_{(\mu)}^{-1}[\ldots]=\begin{bmatrix}\dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^\infty\cdots V_{(\mu);1}(r,\beta)\Omega_{(\mu)}(\beta)d\beta\\ \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^\infty\cdots V_{(\mu);2}(r,\beta)\Omega_{(\mu)}(\beta)d\beta\\ \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^\infty\cdots V_{(\mu);3}(r,\beta)\Omega_{(\mu)}(\beta)d\beta\end{bmatrix}. \qquad (40)$$

Застосуємо операторну матрицю-стовпець (40) за правилом множення матриць до матриці-елемента $[\tilde{u}(t,\beta)]$, де функція $\tilde{u}(t,\beta)$ визначена формулою (39). У результаті елементарних перетворень маємо єдиний розв'язок мішаної задачі (1)—(3):

$$u_j(t,r)=\int_0^t\int_{R_0}^{R_1}H_{(\mu);j1}(t-\tau,r,\rho)f_1(\tau,\rho)\sigma_1 d\rho d\tau+\int_0^t\int_{R_1}^{R_2}H_{(\mu);j2}(t-\tau,r,\rho)\times$$
$$\times f_2(\tau,\rho)\sigma_2 d\rho d\tau+\int_0^t\int_{R_2}^{\infty}H_{(\mu);j3}(t-\tau,r,\rho)f_3(\tau,\rho)\sigma_3 sh\ \rho\ d\rho d\tau+$$
$$+\int_0^t W_{(\mu);1j}(t-\tau,r)g_0(\tau)d\tau\cdot\sigma_1 a_1^2+\sum_{k=1}^{2}d_k\left[\int_0^t R^{k,j}_{(\mu);12}(t-\tau,r)\omega_{2k}(\tau)d\tau-\right.$$
$$\left.-\int_0^t R^{k,j}_{(\mu);22}(t-\tau,r)\omega_{1k}(\tau)d\tau\right];\quad j=\overline{1,3}. \tag{41}$$

У рівності (41) беруть участь функції впливу

$$H_{(\mu);jk}(t,r,\rho)=$$
$$=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty e^{-(\beta^2+\gamma^2)t}V_{(\mu);j}(r,\beta)V_{(\mu);k}(\rho,\beta)\Omega_{(\mu)}(\beta)d\beta;\quad j,k=\overline{1,3}, \tag{42}$$

породжені неоднорідністю системи (1), функції Гріна

$$W_{(\mu);1j}(t,r)=$$
$$=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty e^{-(\beta^2+\gamma^2)t}(-\tilde{\alpha}^0_{11})^{-1}V_{(\mu);1}(R_0,\beta)V_{(\mu);j}(r,\beta)\Omega_{(\mu)}(\beta)d\beta;\quad j=\overline{1,3}, \tag{43}$$

породжені крайовою умовою в точці $r=R_0$, та функції Гріна умов спряження

$$R^{k,j}_{(\mu);i2}(t,r)=$$
$$=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty e^{-(\beta^2+\gamma^2)t}Z^k_{(\mu);i2}(\beta)V_{(\mu);j}(r,\beta)\Omega_{(\mu)}(\beta)d\beta;\quad i,k=1,2;\quad j=\overline{1,3}. \tag{44}$$

Ми одержали розв'язок $u(t,r)=\{u_1(t,r);u_2(t,r);u_3(t,r)\}$, де $u_j(t,r)$ визначені формулою (41), мішаної задачі (1)—(3) за умови, що початкові умови нульові.

**Зауваження 1.** Якщо початкові умови ненульові, тобто $u_j(t,r)\big|_{t=0}=g_j(r)$, але $\psi_0=\delta^0_{11}g_1'(R_0)+\gamma^0_{11}g_1(R_0)=0$ та $\bar{\psi}_{jk}\equiv[\delta^k_{j1}g_k'(R_k)+$ $+\gamma^k_{j1}g_k(R_k)]-[\delta^k_{j2}g_{k+1}'(R_k)+\gamma^k_{j2}g_{k+1}(R_k)]=0$, то функції $u_j(t,r)$ визначаються формулою (41), в яких функції $f_j(\tau,\rho)$ замінено на функції $[f_j(\tau,\rho)+g_j(\rho)\delta_+(\tau)]$, де $\delta_+(\tau)$ — дельта-функція, зосереджена в точці $\tau=0+$ й діє за правилом $\int_0^t v(t-\tau,r)g(\tau)\delta_+(\tau)d\tau=v(t,r)g(t)$.

**Зауваження 2.** Якщо початкові умови ненульові й числа $\psi_0 \neq 0$ та $\bar{\psi}_{jk} \neq 0$, то в рівностях (41) треба замінити функції $f_j(\tau, \rho)$ на функції $[f_j(\tau, \rho) + \delta_+(\tau) g_j(\rho)]$ та добавити доданки

$$W_{(\mu);1j}(t, r)\psi_0 + \sum_{k=1}^{2} d_k \left[ R^{k,j}_{(\mu);12}(t, r)\bar{\psi}_{2k} - R^{k,j}_{(\mu);22}(t, r)\bar{\psi}_{1k} \right]; \quad j = \overline{1,3}. \tag{45}$$

Очевидно, що доданки (45) відображають властивість м'ягкості межі середовища по відношенню до відбиття теплових хвиль.

**Висновки.** Одержано точний аналітичний розв’язок мішаної задачі для системи еволюційних рівнянь параболічного типу, змодельованих методом гібридного диференціального оператора Фур’є-Фур’є-Лежандра на кусково-однорідній полярній осі $(R_0, R_1) \cup \cup (R_1, R_2) \cup (R_2, +\infty)$ з м’якими межами.

## Список використаних джерел:


1. Тихонов А. Н. Уравнения математической физики / А. Н. Тихонов, А. А. Самарский. — М. : Наука, 1972. — 735 с.
2. Степанов В. В. Курс дифференциальных уравнений / В. В. Степанов. — М. : Физматгиз, 1959. — 468 с.
3. Конет І. М. Інтегральні перетворення типу Мелера-Фока / І. М. Конет, М. П. Ленюк. — Чернівці : Прут, 2002. — 248 с.
4. Ленюк М. П. Гібридні інтегральні перетворення (Фур'є, Фур'є, Лежандра) в задачах математичної фізики / М. П. Ленюк, Т. М. Пилипюк. — К., 1994. — 46 с. — (Препринт / НАН України. Ін-т математики; 94.35).
5. Шилов Г. Е. Математический анализ. Второй специальный курс / Г. Е. Шилов. — М. : Наука, 1965. — 328 с.
6. Лаврентьев М. А. Методы теории функций комплексного переменного / М. А. Лаврентьев, Б. В. Шабат. — М.: Наука, 1987. — 688 с.
7. Градштейн И. С. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений / И. С. Градштейн, И. М. Рыжик. — М. : Наука, 1971. — 1108 с.
8. Коляно Ю. М. Методы теплопроводности и термоупругости неоднородного тела / Ю. М. Коляно. — К. : Наук. думка, 1992. — 280 с.


The method of hybrid integral transformation of Fur'ye-Fourier-Legendre spectral parameter obtained from the integral representation of the analytical solution mixed problem for a separate system of parabolic equations of heat conduction type of ternary polar axis under the assumption that the limits of the medium soft against to repel heat waves. Simulation of thermal conductivity by using hybrid differential Fourier-Fourier-Legendre.

**Key words:** *hybrid differential operators, functions and Cauchy function of the boundary value problem, hybrid integambling conversion with spectral parameter, the primary identity key solutions.*

Отримано: 04.03.2013