The method of influence functions and Green's function (key solutions), integral image of the exact analytical solutions of algorithmic nature of hyperbolic boundary value problems in multi napivobmezhenyh (piecewise-homogeneous) spatial regions. To build a major integrated solutions involving the appropriate Fourier transform to Cartesian axes, and pivosi segment and integral Fourier transformation to Cartesian segment with n points of conjugation.

Key words: *hyperbolic equations, initial and boundary conditions, coupling conditions, integral transformation, major interchanges.*

Отримано: 24.01.2013

УДК 517.532.2

$\boxed{\text{М. П. Ленюк*,}}$ д-р фіз.-мат. наук, професор,
М. І. Шинкарик,** канд. фіз.-мат. наук

*Чернівецький факультет національного технічного університету «Харківський політехнічний інститут», м. Чернівці
**Тернопільський національний економічний університет, м. Тернопіль

СКІНЧЕННЕ ГІБРИДНЕ ІНТЕГРАЛЬНЕ ПЕРЕТВОРЕННЯ ТИПУ ФУР'Є-ЛЕЖАНДРА-БЕССЕЛЯ НА КУСКОВО-ОДНОРІДНОМУ СЕГМЕНТІ

На трискладовому сегменті $[R_0, R_3]$ полярної осі побудовано інтегральне перетворення, породжене гібридним диференціальним оператором Фур'є-Лежандра-Бесселя. Явно виписано власні елементи цього оператора.

Ключові слова: *гібридний диференціальний оператор, спектральна задача, фундаментальна система розв'язків, власні елементи.*

Вступ. Інтегральні перетворення Фур'є, Ганкеля першого та другого роду, Лежандра першого та другого роду, Мелліна та ін., запроваджені за власними елементами відповідних диференціальних операторів другого порядку, побудованих методом регулярної спектральної задачі Штурма-Ліувілля на однорідному сегменті, дозволили алгебраїзувати або параметризувати лінійні диференціальні оператори Ейлера, Бесселя, Фур'є, Лежандра та ін. в задачах математичної фізики однорідних середовищ. До середини XX-го століття був створений достатньо ефективний математичний апарат побудови інтегрального зображення аналітичних розв'язків основних задач математичної фізики однорідних середовищ. З інтенсивним впровадженням у виробництво в другій половині XX століття композитних матеріалів виникла необхідність у вивченні в першу чергу їх фізико-технічних характеристик. Це привело до задач механіки (термомеханіки) кусково-однорідних середовищ. Для розв'язання таких задач створено метод скінченних гібридних інтегральних перетворень [1]. Побудові одного з типів скінченного гібридного інтегрального перетворення присвячена ця стаття.

Основна частина. Побудуємо на множині $I_2 = \{r: \ r \in \ (R_0, R_1) \cup \cup (R_2, R_3); \ R_0 \geq 0, R_3 < \infty\}$ інтегральне перетворення, породжене гібридним диференціальним оператором (ГДО)

$$M_{\nu,\alpha}^{(\mu)} = \theta(r-R_0)\theta(R_1-r)a_1^2 \frac{d^2}{dr^2} + \theta(r-R_1) \times \\ \times \theta(R_2-r)a_2^2 \Lambda_{(\mu)} + \theta(r-R_2)\theta(R_3-r)a_3^2 B_{\nu,\alpha}. \tag{1}$$

У рівності (1) $\theta(x)$ — одинична функція Гевісайда [2], $\frac{d^2}{dr^2}$ — диференціальний оператор Фур'є другого порядку [3], $\Lambda_{(\mu)} = \frac{d^2}{dr^2} + +cthr \frac{d}{dr} + \frac{1}{4} + \frac{1}{2}(\frac{\mu_1^2}{1-chr} + \frac{\mu_2^2}{1+chr})$ — узагальнений диференціальний оператор Лежандра другого порядку [4], $B_{\nu,\alpha} = \frac{d^2}{dr^2} + (2\alpha+1)r^{-1}\frac{d}{dr} - -(\nu^2 - \alpha^2)r^{-2}$ — диференціальний оператор Бесселя [5]; $\mu_1 \geq \mu_2 \geq 0$, $(\mu) = (\mu_1, \mu_2)$; $2\alpha + 1 > 0, \nu \geq \alpha$: $a_1 > 0$, $a_2 > 0$, $a_3 > 0$.

Означення. Областю визначення ГДО $M_{\nu,\alpha}^{(\mu)}$ назвемо множину G вектор-функцій $g(r) = \{g_1(r); g_2(r); g_3(r)\}$ з такими властивостями: 1) вектор-функція $f(r) = \{g_1''(r); \Lambda_{(\mu)}[g_2(r)]\} B_{\nu,\alpha}[g_3(r)];$ неперервна на I_2; 2) функції $g_j(r)$ задовольняють крайові умови

$$(\alpha_{11}^0 \frac{d}{dr} + \beta_{11}^0) g_1(r)\Big|_{r=R_0} = 0, \ (\alpha_{22}^3 \frac{d}{dr} + \beta_{22}^3) g_3(r)\Big|_{r=R_3} = 0; \tag{2}$$

3) функції $g_j(r)$ задовольняють умови спряження

$$[(\alpha_{j1}^k \frac{d}{dr} + \beta_{j1}^k) g_k(r) - (\alpha_{j2}^k \frac{d}{dr} + \beta_{j2}^k) g_{k+1}(r)]\Big|_{r=R_k} = 0; \ j,k = 1,2. \tag{3}$$

Умови на коефіцієнти:

$$\alpha_{11}^0 \leq 0, \ \beta_{11}^0 \geq 0, \left|\alpha_{11}^0\right| + \beta_{11}^0 \neq 0, \ \alpha_{22}^3 \geq 0, \beta_{22}^3 \geq 0,$$

$$\alpha_{22}^3 + \beta_{22}^3 \neq 0; \alpha_{jm}^k \geq 0, \beta_{jm}^k \geq 0, c_{1k} \cdot c_{2k} > 0,$$

$$c_{jk} = \alpha_{2j}^k \beta_{1j}^k - \alpha_{1j}^k \beta_{2j}^k ;\, j,k,m = 1,2.$$

Визначимо числа

$$a_{11}^k = \alpha_{11}^k \alpha_{22}^k - \alpha_{21}^k \alpha_{12}^k , \;\; a_{12}^k = \alpha_{11}^k \beta_{22}^k - \alpha_{21}^k \beta_{12}^k , \;\; a_{21}^k = \beta_{11}^k \alpha_{22}^k - \beta_{21}^k \alpha_{12}^k ,$$
$$a_{22}^k = \beta_{11}^k \beta_{22}^k - \beta_{21}^k \beta_{12}^k , k = 1,2;$$
$$a_1^2 \sigma_1 = \frac{c_{11} c_{12}}{c_{21} c_{22}} \frac{R_1^{2\alpha+1}}{R_2^{2\alpha+1}} shR_2 ,\; a_2^2 \sigma_2 = \frac{c_{12}}{c_{22}} \frac{shR_2}{R_2^{2\alpha+1}} ,\; a_3^2 \sigma_3 = 1.$$

Введемо до розгляду вагову функцію

$$\begin{gathered}\sigma(r) = \theta(r - R_0)\theta(R_1 - r)\sigma_1 + \theta(r - R_1)\times \\ \times\theta(R_2 - r)\sigma_2 shr + \theta(r - R_2)\theta(R_3 - r)\sigma_3 r^{2\alpha+1}\end{gathered} \tag{4}$$

та скалярний добуток

$$\begin{gathered}(u(r), v(r)) = \int_{R_0}^{R_3} u(r)v(r)\sigma(r)dr \equiv \int_{R_0}^{R_1} u_1(r)v_1(r)\sigma_1 dr + \\ + \int_{R_1}^{R_2} u_2(r)v_2(r)\sigma_2 shrdr + \int_{R_2}^{R_3} u_3(r)v_3(r)\sigma_3 r^{2\alpha+1} dr,\end{gathered} \tag{5}$$

де $u(r) \in G$, $v(r) \in G$.

Наведемо потрібні в подальшому твердження.

Лема 1. Для $u(r) \in G$ та $v(r) \in G$ справджується базова тотожність

$$[u_k'(r)v_k(r) - u_k(r)v_k'(r)]\Big|_{r=R_k} = \frac{c_{2k}}{c_{1k}}[u_{k+1}'(r)v_{k+1}(r) - u_{k+1}(r)v_{k+1}'(r)]\Big|_{r=R_k} . \tag{6}$$

Доведення. Із алгебраїчної системи

$$\alpha_{j1}^k g_k'(R_k) + \beta_{j1}^k g_k(R_k) = \alpha_{j2}^k g_{k+1}'(R_k) + \beta_{j2}^k g_{k+1}(R_k) \tag{7}$$

знаходимо за правилами Крамера [6], що

$$\begin{gathered}g_k(R_k) = -c_{1k}^{-1}[a_{11}^k g_{k+1}'(R_k) + a_{12}^k g_{k+1}(R_k)], \\ g_k'(R_k) = c_{1k}^{-1}[a_{21}^k g_{k+1}'(R_k) + a_{22}^k g_{k+1}(R_k)].\end{gathered} \tag{8}$$

Рівності (8) задовольняють і компоненти $u_k(r)$ вектор-функції $u(r) \in G$ і компоненти $v_k(r)$ вектор-функції $v(r) \in G$.

Безпосередні розрахунки дають:

$$\begin{gathered}u_k'(R_k)v_k(R_k) - u_k(R_k)v_k'(R_k) = -c_{1k}^{-2}[a_{21}^k u_{k+1}'(R_k) + a_{22}^k u_{k+1}(R_k)]\times \\ \times[a_{11}^k v_{k+1}'(R_k) + a_{12}^k v_{k+1}(R_k)] + c_{1k}^{-2}[a_{11}^k u_{k+1}'(R_k) + \\ + a_{12}^k u_{k+1}(R_k)][a_{21}^k v_{k+1}'(R_k) + a_{22}^k v_{k+1}(R_k)] =\end{gathered}$$

$$= c_{1k}^{-2}(a_{11}^k a_{22}^k - a_{12}^k a_{21}^k)[u'_{k+1}(R_k)v_{k+1}(R_k) - u_{k+1}(R_k)v'_{k+1}(R_k)] =$$
$$= c_{1k}^{-1}c_{2k}[u'_{k+1}(r)v_{k+1}(r) - u_{k+1}(r)v'_{k+1}(r)]\Big|_{r=R_k}.$$

Доведення леми завершено.

Лема 2. Гібридний диференціальний оператор $M_{\nu,\alpha}^{(\mu)}$, визначений рівністю (1), самоспряжений.

Доведення. Згідно правила (5) для $u(r)\in G$ та $v(r)\in G$ маємо:

$$(M_{\nu,\alpha}^{(\mu)}[u(r)],v(r)) = \int\limits_{R_0}^{R_3} M_{\nu,\alpha}^{(\mu)}[u(r)]v(r)\sigma(r)dr \equiv \int\limits_{R_0}^{R_1}(a_1^2\frac{d^2u_1}{dr^2})v_1(r)dr +$$
$$+\int\limits_{R_1}^{R_2}(a_2^2\Lambda_{(\mu)}[u_2(r)])v_2(r)\sigma_2 shrdr + \int\limits_{R_2}^{R_3}(a_3^2 B_{\alpha,\alpha}[u_3(r)])v_3(r)\sigma_3 r^{2\alpha+1}dr. \tag{9}$$

Проінтегруємо в рівності (9) під знаком інтегралів два рази частинами:

$$[M_{\nu,\alpha}^{(\mu)}[u(r)],v(r)]) = \sigma_1 a_1^2(\frac{du_1}{dr}v_1 - u_1\frac{dv_1}{dr})|_{R_0}^{R_1} + \int\limits_{R_0}^{R_1}u_1(r)(a_1^2\frac{d^2v_1}{dr^2})\sigma_1 dr +$$
$$+\sigma_2 a_2^2[shr(\frac{du_2}{dr}v_2 - u_2\frac{dv_2}{dr})]|_{R_1}^{R_2} + \int\limits_{R_1}^{R_2}u_2(r)(a_2^2\Lambda_{(\mu)}[v_2(r)])\sigma_2 shrdr + \tag{10}$$
$$+\sigma_3 a_3^2[r^{2\alpha+1}(\frac{du_3}{dr}v_3 - u_3\frac{dv_3}{dr})]|_{R_2}^{R_3} + \int\limits_{R_2}^{R_3}u_3(r)(a_3^2 B_{\nu,\alpha}[v_3(r)])\sigma_3 r^{2\alpha+1}dr$$

Якщо $\alpha_{11}^0 \neq 0$, то в силу крайової умови в точці $r = R_0$ маємо:

$$-a_1^2\sigma_1(u_1'(R_0)v_1(R_0) - u_1(R_0)v_1'(R_0)) =$$
$$= -a_1^2\sigma_1(\alpha_{11}^0)^{-1}[(\alpha_{11}^0 u_1^1(R_0) + \beta_{11}^0 u_1(R_0)v_1(R_0) - \tag{11}$$
$$-u_1(R_0)(\alpha_{11}^0 v_1'(R_0) + \beta_{11}^0 v_1(R_0))] = -a_1^2\sigma_1(\alpha_{11}^0)^{-1}[0\cdot v_1(R_0) - 0\cdot u_1(R_0)] = 0.$$

Якщо $\alpha_{22}^3 \neq 0$, то в силу крайової умови в точці $r = R_3$ маємо:

$$a_3^2\sigma_3 R_3^{2\alpha+1}(u_3'(R_3)v_3(R_3) - u_3(R_3)v_3'(R_3)) =$$
$$= (\alpha_{22}^3)^{-1}R_3^{2\alpha+1}[(\alpha_{22}^3)^{-1}[(\alpha_{22}^3 u_3'(R_3) + \beta_{22}^3 u_3(R_3))v_3(R_3) - \tag{12}$$
$$-(\alpha_{22}^3 v_3'(R_3) + \beta_{22}^3 v_3(R_3))u_3(R_3)] = (\alpha_{22}^3)^{-1}R_3^{2\alpha+1}[0\cdot v_3(R_3) - 0\cdot u_3(R_3)] = 0.$$

В силу базової тотожності (6) в точці $r = R_1$ знаходимо:

$$\sigma_1 a_1^2(u_1'(R_1)v_1(R_1) - u_1(R_1)v_1'(R_1)) -$$

$$-\sigma_2 a_2^2 shR_1(u_2'(R_1)v_2(R_1)-u_2(R_1)v_2'(R_1))= \qquad (13)$$

$$=(\sigma_1 a_1^2\frac{c_{21}}{c_{11}}-a_2^2\sigma_2 shR_1)(u_2'(R_1)v_2(R_1)-u_2(R_1)v_2'(R_1))=0,$$

тому, що внаслідок вибору чисел σ_1 та σ_2 вираз

$$a_1^2\sigma_1\frac{c_{21}}{c_{11}}-a_2^2\sigma_2 shR_1=\frac{c_{11}c_{12}}{c_{21}c_{22}}\frac{shR_1}{shR_2}\cdot R_2^{2\alpha+1}\frac{c_{21}}{c_{11}}-\frac{c_{12}}{c_{22}}\frac{R_2^{2\alpha+1}}{shR_2}\cdot shR_1=$$

$$=\frac{c_{12}}{c_{22}}\frac{shR_1}{shR_2}\cdot R_2^{2\alpha+1}(1-1)\equiv 0.$$

В силу базової тотожності (6) в точці $r=R_2$ знаходимо:

$$\sigma_2 a_2^2 shR_2(u_2'(R_2)v_2(R_2)-u_2(R_2)v_2'(R_2))-$$

$$-\sigma_3 a_3^2 R_2^{2\alpha+1}(u_3'(R_2)v_3(R_2)-u_3(R_2)v_3'(R_2))= \qquad (14)$$

$$=(\sigma_2 a_2^2 shR_2\frac{c_{22}}{c_{12}}-a_3^2\sigma_3 R_2^{2\alpha-1})(u_3'(R_2)v_3(R_2)-u_3(R_2)v_3'(R_2))=0,$$

тому, що в силу вибору чисел σ_2 та σ_3 вираз

$$\sigma_2 a_2^2 shR_2\frac{c_{22}}{c_{12}}-a_3^2\sigma_3 R_2^{2\alpha+1}=\frac{c_{12}}{c_{22}}\frac{R_2^{2\alpha+1}}{shR_2}shR_2\cdot\frac{c_{22}}{c_{12}}-R_2^{2\alpha+1}=R_2^{2\alpha+1}(1-1)\equiv 0.$$

Підставивши залежності (11)—(14) в рівність (10), маємо:

$$(M_{\nu,\alpha}^{(\mu)}[u(r)],v(r))=(u(r),M_{\nu,\alpha}^{(\mu)}[v(r)]). \qquad (15)$$

Рівність (15) показує, що ГДО $M_{\nu,\alpha}^{(\mu)}$ самоспряжений.

Доведення леми завершено.

Висновок. Спектр ГДО $M_{\nu,\alpha}^{(\mu)}$ дійсний. Оскільки ГДО $M_{\nu,\alpha}^{(\mu)}$ на множині I_2 не має особливої точки, то його спектр дискретний [7].

Нехай β — спектральний параметр (власне число ГДО $M_{\nu,\alpha}^{(\mu)}$), а $V_{\nu,\alpha;j}^{(\mu)}(r,\beta)$ — компоненти власної (спектральної) вектор-функції

$$V_{\nu,\alpha;j}^{(\mu)}(r,\beta)=\sum_{j=1}^{3}\theta(r-R_{j-1})\theta(R_j-r)V_{\nu,\alpha;j}^{(\mu)}(r,\beta). \qquad (16)$$

При цьому функції $V_{\nu,\alpha;j}^{(\mu)}(r,\beta)$ повинні задовольняти відповідно диференціальні рівняння Фур'є, Лежандра та Бесселя для звичайних дійсних функцій

$$(\frac{d^2}{dr^2}+b_1^2)V_{\nu,\alpha,1}^{(\mu)}(r,\beta)=0,\quad r\in(R_0,R_1),b_1=a_1^{-1}(\beta^2+k_1^2)^{\frac{1}{2}},k_1^2\geq 0,$$

$$(\Lambda_{(\mu)}+b_2^2)V^{(\mu)}_{\nu,\alpha,2}(r,\beta)=0,\quad r\in(R_1,R_2), b_2=a_2^{-1}(\beta^2+k_2^2)^{\frac{1}{2}}, k_2^2\geq 0, \quad (17)$$

$$(B_{\nu,\alpha}+b_3^2)V^{(\mu)}_{\nu,\alpha,3}(r,\beta)=0,\ r\in(R_2,R_3), b_3=a_3^{-1}(\beta^2+k_3^2)^{\frac{1}{2}}, k_3^2\geq 0,$$

однорідні крайові умови (2) та однорідні умови спряження (3).

Фундаментальну систему розв'язків для диференціального рівняння Фур'є $(\frac{d^2}{dr^2}+b_1^2)v=0$ складають функції $\cos(b_1r)$ та $\sin(b_1r)$ [3]; фундаментальну систему розв'язків для диференціального рівняння Лежандра $(\Lambda_{(\mu)}+b_2^2)v=0$ складають функції $A^{(\mu)}_{\nu_2^*}(chr)$ та $B^{(\mu)}_{\nu_2^*}(chr)$, $\nu_2^*=-\frac{1}{2}+ib_2(\beta)$ [4]; фундаментальну систему розв'язків для диференціального рівняння Бесселя $(B_{\nu,\alpha}+b_3^2)v=0$ складають дійсні функції Бесселя першого роду $J_{\nu,\alpha}(b_3r)$ та другого роду $N_{\nu,\alpha}(b_3r)$ [5].

В силу лінійності регулярної спектральної задачі Штурма-Ліувілля (2), (3), (17) функції $V^{(\mu)}_{\nu,\alpha;j}(r,\beta)$ побудуємо як лінійну комбінацію фундаментальної системи розв'язків [3]:

$$\begin{gathered}
V^{(\mu)}_{\nu,\alpha;1}(r,\beta)=A_1\cos b_1r+B_1\sin b_1r, r\in(R_0,R_1),\\
V^{(\mu)}_{\nu,\alpha;2}(r,\beta)=A_2A^{(\mu)}_{\nu_2^*}(chr)+B_2B^{(\mu)}_{\nu_2^*}(chr), r\in(R_1,R_2), \qquad (18)\\
V^{(\mu)}_{\nu,\alpha;3}(r,\beta)=A_3J_{\nu,\alpha}(b_3r)+B_3N_{\nu,\alpha}(b_3r), r\in(R_2,R_3).
\end{gathered}$$

Крайові умови (2) та умови спряження (3) для визначення шести величин $A_j, B_j\ (j=\overline{1,3})$ дають однорідну алгебраїчну систему із шести рівнянь:

$$\begin{gathered}
v_{11}^{01}(b_1R_0)A_1+v_{11}^{02}(b_1R_0)B_1=0,\\
v_{j1}^{11}(b_1R_1)A_1+v_{j1}^{12}(b_1R_1)B_1-Y^{(\mu);11}_{\nu_2^*;j2}(chR_1)A_2-Y^{(\mu);12}_{\nu_2^*;j2}(chR_1)B_2=0,\quad j=1,2,\\
Y^{(\mu);21}_{\nu_2^*;j1}(chR_2)A_2+Y^{(\mu);22}_{\nu_2^*;j1}(chR_2)B_2-u^{21}_{\nu,\alpha;j2}(b_3R_2)A_3-u^{22}_{\nu,\alpha;j2}(b_3R_2)B_3=0, \quad (19)\\
u^{31}_{\nu,\alpha;22}(b_3R_3)A_3+u^{32}_{\nu,\alpha;22}(b_3R_3)B_3=0.
\end{gathered}$$

Введемо до розгляду функції

$$\delta_{j1}(b_1R_0,b_1R_1)=v_{11}^{01}(b_1R_0)v_{j1}^{12}(b_1R_1)-v_{11}^{02}(b_1R_0)v_{j1}^{11}(b_1R_1),\ j=1,2;$$

$$\delta^{(\mu)}_{\nu_3^*,jk}(chR_1,chR_2)=Y^{(\mu);11}_{\nu_2^*,j2}(chR_1)Y^{(\mu);22}_{\nu_2^*,k1}(chR_3)-Y^{(\mu);12}_{\nu_2^*,j2}(chR_1)Y^{(\mu);21}_{\nu_2^*,k1}(chR_2),$$

$$\delta_{\nu,\alpha;j2}(b_3R_2,b_3R_3)=u^{21}_{\nu,\alpha;j2}(b_3R_2)u^{32}_{\nu,\alpha;22}(b_3R_3)-$$

$$-u^{22}_{\nu,\alpha;j2}(b_3R_2)u^{31}_{\nu,\alpha;22}(b_3R_3),\quad j,k=1,2;$$

$$a_{(\mu);j}(\beta) = \delta_{11}(b_1R_0, b_1R_1)\delta^{(\mu)}_{\nu_2^*;2j}(chR_1, chR_2) -$$

$$-\delta_{21}(b_1R_0, b_1R_1)\delta^{(\mu)}_{\nu_2^*;1j}(chR_1, chR_2), \quad j = 1,2;$$

$$b^{(\mu)}_{\nu,\alpha;j}(\beta) = \delta_{\nu,\alpha;22}(b_3R_2, b_3R_3)\delta^{(\mu)}_{\nu_2^*;j1}(chR_1, chR_2) -$$

$$-\delta_{\nu,\alpha;12}(b_3R_2, b_3R_3)\delta^{(\mu)}_{\nu_2^*;j2}(chR_1, chR_2).$$

Для того, щоб алгебраїчна система (19) мала відмінний від нуля розв'язок, необхідно й досить, щоб її визначник дорівнював нулю [6]:

$$\delta^{(\mu)}_{\nu,\alpha}(\beta) \equiv a_{(\mu);1}(\beta)\delta_{\nu,\alpha;22}(b_3R_2, b_3R_3) - a_{(\mu);2}(\beta)\delta_{\nu,\alpha;12}(b_3R_2, b_3R_3 = \\ = \delta_{11}(b_1R_0, b_1R_1)b^{(\mu)}_{\nu,\alpha;2}(\beta) - \delta_{21}(b_1R_0, b_1R_1)b^{(\mu)}_{\nu,\alpha;1}(\beta) = 0. \quad (20)$$

Ми одержали трансцендентне рівняння для обчислення власних чисел ГДО $M^{(\mu)}_{\nu,\alpha}$.

Згідно з роботою [1] маємо твердження.

Теорема 1 (про дискретний спектр). Корені β_n трансцендентного рівняння (20) складають дискретний спектр ГДО $M^{(\mu)}_{\nu,\alpha}$: дійсні, різні, симетричні відносно $\beta = 0$ й на числовій півосі $\beta > 0$ утворюють монотонно зростаючу числову послідовність з єдиною точкою згущення $\beta = \infty$.

Підставимо в алгебраїчну систему (19) $\beta = \beta_n$ $(b_j(\beta_n) \equiv b_{jn})$ й відкинемо останнє рівняння внаслідок лінійної залежності. Якщо покласти $A_1 = A_0 v^{02}_{11}(b_{1n}R_0)$, $B_1 = -A_0 v^{01}_{11}(b_{1n}R_0)$, де $A \neq 0$ підлягає визначенню, то перше рівняння системи перетворюється в тотожність, а наступні два рівняння дають алгебраїчну систему для обчислення A_2, B_2 :

$$Y^{(\mu);11}_{\nu^*_{2n};j2}(chR_1)A_2 + Y^{(\mu);12}_{\nu^*_{2n};j2}(chR_1)B_2 = -A_0\delta_{j1}(b_{1n}R_0, b_{1n}R_1), \; j = 1,2. \quad (21)$$

Алгебраїчна система (21) має єдиний розв'язок [6]:

$$A_2 = \frac{A_0}{q_{(\mu)}(\beta_n)}[\delta_{21}(b_{1n}R_0, b_{1n}R_1)Y^{(\mu);12}_{\nu^*_{2n};12}(chR_1) - \delta_{11}(b_{1n}R_0, b_{1n}R_1)Y^{(\mu);12}_{\nu^*_{2n};22}(chR_1)],$$

$$B_2 = \frac{A_0}{q_{(\mu)}(\beta_n)}[\delta_{11}(b_{1n}R_0, b_{1n}R_1)Y^{(\mu);11}_{\nu^*_{2n};22}(chR_1) - \\ -\delta_{21}(b_{1n}R_0, b_{1n}R_1)Y^{(\mu);11}_{\nu^*_{2n};12}(chR_1)], \quad (22)$$

$$\nu^*_{2n} = -\frac{1}{2} + ib_n, \; q_{(\mu)}(\beta_n) = c_{21}(S_{(\mu)}(b_{2n})shR_1)^{-1}.$$

При відомих A_2, B_2 для визначення A_3, B_3 маємо алгебраїчну систему з двох рівнянь:

$$u^{21}_{\nu,\alpha;j2}(b_{3n}R_2)A_3 + u^{22}_{\nu,\alpha;j2}(b_{3n}R_2)B_3 = A_0[q_{(\mu)}(\beta_n)]^{-1}a_{(\mu);j}(\beta_n);\ j=1,2. \quad (23)$$

Алгебраїчна система (23) має єдиний розв'язок [6]:

$$A_0 = q_{(\mu)}(\beta_n)q_\alpha(\beta_n),\ q_\alpha(\beta_n) = \frac{2}{\pi}\frac{c_{22}}{b_{3n}^{2\alpha}R_2^{2\alpha+1}}\ A_3 = \quad (24)$$

$$= -\omega^{(\mu)}_{\nu,\alpha;2}(\beta_n),\ B_3 = \omega^{(\mu)}_{\nu,\alpha;1}(\beta_n),$$

$$\omega^{(\mu)}_{\nu,\alpha;j}(\beta_n) = a_{(\mu);2}(\beta_n)u^{2j}_{\nu,\alpha;12}(b_{3n}R_2) - a_{(\mu);1}(\beta_n)u^{2j}_{\nu,\alpha;22}(b_{3n}R_2),\ j=1,2.$$

Підставимо визначені формулами (22) та (24) величини $A_j, B_j (j = \overline{1,3})$ у рівності (18). Отримуємо функції:

$$V^{(\mu)}_{\nu,\alpha;1}(r,\beta_n) = q_{(\mu)}(\beta_n)q_\alpha(\beta_n)[v^{02}_{11}(b_{1n}R_0)\cos(b_{1n}r) - v^{01}_{11}(b_{1n}R_0)\sin(b_{1n}r)],$$

$$V^{(\mu)}_{\nu,\alpha;2}(r,\beta_n) = q_\alpha(\beta_n)[\delta_{11}(b_{1n}R_0, b_{1n}R_1)f^{(\mu);1}_{\nu^*_{2n};22}(chR_1, chr) -$$

$$-\delta_{21}(b_{1n}R_0, b_{1n}R_1)f^{(\mu);1}_{\nu^*_{2n};12}(chR_1, chr),$$

$$f^{(\mu);1}_{\nu^*_{2n};j2}(chR_1, chr) = Y^{(\mu);11}_{\nu^*_{2n};j2}(chR_1)B^{(\mu)}_{\nu^*_{2n}}(chr) - Y^{(\mu);12}_{\nu^*_{2n};j2}(chR_1)A^{(\mu)}_{\nu^*_{2n}}(chr),$$

$$V^{(\mu)}_{\nu,\alpha;3}(r,\beta_n) = \omega^{(\mu)}_{\nu,\alpha;1}(\beta_n)N_{\nu,\alpha}(b_{3n}r) - \omega^{(\mu)}_{\nu,\alpha;2}(\beta_n)J_{\nu,\alpha}(b_{3n}r). \quad (25)$$

Згідно формули (16) спектральна (власна) вектор-функція $V^{(\mu)}_{\nu,\alpha}(r,\beta_n)$ стала відомою. При цьому її квадрат норми обчислюється за стандартним правилом:

$$\| V^{(\mu)}_{\nu,\alpha}(r,\beta_n)\|^2 = (V^{(\mu)}_{\nu,\alpha}(r,\beta_n), V^{(\mu)}_{\nu,\alpha}(r,\beta_n)) = \int_{R_0}^{R_3}[V^{(\mu)}_{\nu,\alpha}(r,\beta_n)]^2\sigma(r)dr. \quad (26)$$

Згідно з роботою [1] сформулюємо твердження.

Теорема 2 (про дискретну функцію). Система власних функцій $\{V^{(\mu)}_{\nu,\alpha}(r,\beta_n)\}_{n=1}^{\infty}$ ортогональна на множині I_2 з ваговою функцією $\sigma(r)$, повна й замкнена.

Теорема 3 (про зображення рядом Фур'є). Будь-яка вектор-функція $g(r) \in G$ зображається за системою $\{V^{(\mu)}_{\nu,\alpha}(r,\beta_n)\}_{n=1}^{\infty}$ абсолютно й рівномірно збіжним на множині I_2 рядом Фур'є:

$$g(r) = \sum_{n=1}^{\infty}\int_{R_0}^{R_3} g(\rho)V^{(\mu)}_{\nu,\alpha}(\rho,\beta_n)\sigma(\rho)d\rho\,\frac{V^{(\mu)}_{\nu,\alpha}(r,\beta_n)}{\| V^{(\mu)}_{\nu,\alpha}(r,\beta_n)\|^2}. \quad (27)$$

Якщо перейти до ортонормованої системи власних функцій

$$\{v_{\nu,\alpha}^{(\mu)}(r,\beta_n)\}_{n=1}^{\infty} = \{V_{\nu,\alpha}^{(\mu)}(r,\beta_n) : (\| V_{\nu,\alpha}^{(\mu)}(r,\beta_n) \|)^{-1}\}_{n=1}^{\infty},$$

то ряд Фур'є (27) набуде вигляду:

$$g(r) = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{R_0}^{R_3} g(\rho) v_{\nu,\alpha}^{(\mu)}(\rho,\beta_n)\sigma(\rho)d\rho v_{\nu,\alpha}^{(\mu)}(r,\beta_n). \tag{28}$$

Ряд Фур'є (28) визначає пряме $H_{\nu,\alpha}^{(\mu)}$ й обернене $H_{\nu,\alpha}^{-(\mu)}$ скінченне гібридне інтегральне перетворення (СГІП), породжене на множині I_2 ГДО $M_{\nu,\alpha}^{(\mu)}$:

$$H_{\nu,\alpha}^{(\mu)}[g(r)] = \int_{R_0}^{R_3} g(r) v_{\nu,\alpha}^{(\mu)}(r,\beta_n)\sigma(r)dr \equiv \tilde{g}_n. \tag{29}$$

$$H_{\nu,\alpha}^{-(\mu)}[\tilde{g}_n] = \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{g}_n v_{\nu,\alpha}^{(\mu)}(r,\beta_n) \equiv g(r). \tag{30}$$

Визначимо величини та функції:

$$d_1 = a_1^2\sigma_1 : c_{11}^{-1},\ d_2 = a_2^2\sigma_2 shR_2 : c_{12}^{-1},\ \tilde{g}_{1n} = \int_{R_0}^{R_1} g_1(r) v_{\nu,\alpha;1}^{(\mu)}(r,\beta_n)\sigma_1 dr,$$

$$\tilde{g}_{2n} = \int_{R_1}^{R_2} g_2(r) v_{\nu,\alpha;2}^{(\mu)}(r,\beta_n)\sigma_2 shrdr,\ \tilde{g}_{3n} = \int_{R_2}^{R_3} g_3(r) v_{\nu,\alpha;3}^{(\mu)}(r,\beta_n)\sigma_3 r^{2\alpha+1}dr,$$

$$Z_{\nu,\alpha;m2}^{(\mu),k}(\beta_n) = (\alpha_{m2}^k \frac{d}{dr} + \beta_{m2}^k) v_{\nu,\alpha;k+1}^{(\mu)}(r,\beta_n)|_{r=R_k};\quad m,k = 1,2.$$

Теорема 4 (про основну тотожність). Якщо вектор-функція $f(r) = \{g_1''(r);\ \Lambda_{(\mu)}[g_2(r)]; B_{\nu,\alpha}[g_3(r)];\ \}$ неперервна на множині I_2, а функції $g_j(r)$ задовольняють крайові умови

$$(\alpha_{11}^0 \frac{d}{dr} + \beta_{11}^0) g_1(r)|_{r=R_0} = g_0,\ (\alpha_{22}^3 \frac{d}{dr} + \beta_{22}^3) g_3(r)|_{r=R_3} = g_R \tag{31}$$

та умови спряження

$$[(\alpha_{j1}^k \frac{d}{dr} + \beta_{j1}^k) g_k(r) - (\alpha_{j2}^k \frac{d}{dr} + \beta_{j2}^k) g_{k+1}(r)]\Big|_{r=R_k} = \omega_{jk};\quad j,k = 1,2, \tag{32}$$

то справджується основна тотожність СГІП ГДО $M_{\nu,\alpha}^{(\mu)}$:

$$H_{\nu,\alpha}^{(\mu)}[M_{\nu,\alpha}^{(\mu)}[g(r)]] = -\beta_n^2 \tilde{g}_n - \sum_{i=1}^{3} k_i^2 \tilde{g}_{in} +$$

$$+(-\alpha_{11}^0)^{-1} v_{\nu,\alpha;1}^{(\mu)}(R_0,\beta_n) a_1^2 \sigma_1 g_0 + (\alpha_{22}^3)^{-1} v_{\nu,\alpha;3}^{(\mu)}(R_3,\beta_n)(shR_3) g_R + \tag{33}$$

$$+\sum_{k=1}^{2} d_k [Z_{\nu,\alpha;12}^{(\mu),k}(\beta_n)\omega_{2k} - Z_{\nu,\alpha;22}^{(\mu),k}(\beta_n)\omega_{1k}].$$

Доведення. Згідно правила (29)

$$H_{\nu,\alpha}^{(\mu)}[M_{\nu,\alpha}^{(\mu)}[g(r)]] = \int_{R_0}^{R_1} (a_1^2 \frac{d^2 g_1}{dr^2}) v_{\nu,\alpha;1}^{(\mu)}(r,\beta_n)\sigma_1 dr + \int_{R_1}^{R_2} (a_2^2 \Lambda_{(\mu)}[g_2(r)]) \times$$
$$\times v_{\nu,\alpha;2}^{(\mu)}(r,\beta_n)\sigma_2 shrdr + \int_{R_2}^{R_3} (a_3^2 B_{\nu,\alpha}[g_3(r)]) v_{\nu,\alpha;3}^{(\mu)}(r,\beta_n)\sigma_3 r^{2\alpha+1} dr. \quad (34)$$

Проінтегруємо в рівності (34) під знаками інтегралів два рази частинами:

$$H_{\nu,\alpha}^{(\mu)}[M_{\nu,\alpha}^{(\mu)}[g(r)]] = a_1^2\sigma_1 (\frac{dg_1}{dr} v_{\nu,\alpha;1}^{(\mu)} - g_1 \frac{dv_{\nu,\alpha;1}^{(\mu)}}{dr})\Bigg|_{R_0}^{R_1} +$$
$$+\int_{R_0}^{R_1} g_1(r)(a_1^2 \frac{d^2 v_{\nu,\alpha;1}^{(\mu)}}{dr^2})\sigma_1 dr + a_2^2\sigma_2[shr(\frac{dg_2}{dr} v_{\nu,\alpha;2}^{(\mu)} - g_2 \frac{dv_{\nu,\alpha}^{(\mu)}}{dr})]\Bigg|_{R_1}^{R_2} + \quad (35)$$
$$+\int_{R_1}^{R_2} g_2(r)(a_2^2 \Lambda_{(\mu)}[v_{\nu,\alpha}^{(\mu)}(r,\beta_n)])\sigma_2 shrdr + a_3^2\sigma_3[r^{2\alpha+1}(\frac{dg_3}{dr} v_{\nu,\alpha;3}^{(\mu)} -$$
$$-g_3 \frac{dv_{\nu,\alpha,3}}{dr})]\Bigg|_{R_2}^{R_3} + \int_{R_2}^{R_3} g_3(r)(a_3^2 B_{\nu,\alpha}[v_{\nu,\alpha}^{(\mu)}])\sigma_3 r^{2\alpha+1} dr.$$

Якщо $\alpha_{11}^0 \neq 0$, то знаходимо, що

$$-a_1^2\sigma_1(g_1' v_{\nu,\alpha;1}^{(\mu)}(r,\beta_n) - g_1 v_{\nu,\alpha;1}^{(\mu)\prime}(r,\beta_n))|_{r=R_0} =$$
$$= -a_1^2\sigma_1(\alpha_{11}^0)^{-1}[(\alpha_{11}^0 g_1'(R_0) + \beta_{11}^0 g(R_0)) v_{\nu,\alpha;1}^{(\mu)}(R_0,\beta_n) -$$
$$-(\alpha_{11}^0 v_{\nu,\alpha;1}^{(\mu)\prime}(R_0,\beta_n) + \beta_{11}^0 v_{\nu,\alpha;1}^{(\mu)}(R_0)) g_1(R_0)] = \quad (36)$$
$$= -a_1^2\sigma_1(\alpha_{11}^0)^{-1} v_{\nu,\alpha;1}^{(\mu)}(R_0,\beta_n) g_0 + a_1^2\sigma_1(\alpha_{11}^0)^{-1} g_1(R_0)\cdot 0 =$$
$$= (-\alpha_{11}^0)^{-1} v_{\nu,\alpha;1}^{(\mu)}(R_0,\beta_n) a_1^2\sigma_1 g_0.$$

Якщо $\alpha_{22}^3 \neq 0$, то знаходимо, що при $a_3^2\sigma_3 = 1$

$$R_3^{2\alpha+1}(\frac{dg_3}{dr} v_{\nu,\alpha;3}^{(\mu)} - g_3 \frac{dv_{\nu,\alpha;3}^{(\mu)}}{dr})\Bigg|_{r=R_3} =$$
$$= R_3^{2\alpha+1}(\alpha_{22}^3)^{-1}[(\alpha_{22}^3 \frac{d}{dr} + \beta_{22}^3) g_3(r)\Bigg|_{r=R_3} v_{\nu,\alpha;3}^{(\mu)}(R_3,\beta_n) -$$

$$-(\alpha_{22}^3)^{-1} v_{\nu,\alpha;3}^{(\mu)}(R_3,\beta_n)\cdot R_3^{2\alpha+1} g_R - \tag{37}$$

$$-(\alpha_{22}^3 \frac{d}{dr} + \beta_{22}^3) v_{\nu,\alpha;3}^{(\mu)}(r,\beta)|_{r=R_3}\ g_3(R_3)] =$$

$$-(\alpha_{22}^3)^{-1} R_3^{2\alpha+1} g_3(R_3)\cdot 0 = (\alpha_{22}^3)^{-1} v_{\nu,\alpha;3}^{(\mu)}(R_3,\beta_n) R_3^{2\alpha+1}\cdot g_R.$$

При $k=1$ в точці спряження $r=R_1$ знаходимо, що

$$a_1^2\sigma_1(g_1' v_{\nu,\alpha;1}^{(\mu)} - g_1 v_{\nu,\alpha;1}^{(\mu)\,\prime})|_{r=R_1} - a_2^2\sigma_2 shR_1(g_2' v_{\nu,\alpha;2}^{(\mu)} - g_2 v_{\nu,\alpha;2}^{(\mu)\,\prime})|_{r=R_1}) =$$

$$\begin{gathered} = (a_1^2\sigma_1 \frac{c_{21}}{c_{11}} - a_2^2\sigma_2 shR_1)(g_2'(r) v_{\nu,\alpha;2}^{(\mu)}(r,\beta_n) - \\ - g_2 v_{\nu,\alpha;2}^{(\mu)\,\prime}(r,\beta_n))|_{r=R_1} + a_1^2\sigma_1\cdot c_{11}^{-1}\times \\ \times(Z_{\nu,\alpha;12}^{(\mu);1}(\beta_n)\omega_{21} - Z_{\nu,\alpha;22}^{(\mu);1}(\beta_n)\omega_{11}) = \\ = d_1(Z_{\nu,\alpha;12}^{(\mu);1}(\beta_n)\omega_{12} - Z_{\nu,\alpha;22}^{(\mu);1}(\beta_n)\omega_{11}) + \end{gathered} \tag{38}$$

$$+0\cdot(g_2' v_{\nu,\alpha;2}^{(\mu)} - g_2 v_{\nu,\alpha;2}^{(\mu)\,\prime})|_{r=R_1} = d_1(Z_{\nu,\alpha;12}^{(\mu);1}(\beta_n)\omega_{21} - Z_{\nu,\alpha;22}^{(\mu);1}(\beta_n)\omega_{11}),$$

тому, що в силу вибору чисел σ_1 та σ_2 вираз

$$a_1^2\sigma_1 \frac{c_{21}}{c_{11}} - a_2^2\sigma_2 shR_1 = \frac{c_{11}c_{12}}{c_{21}c_{22}} \frac{shR_1}{shR_2}\cdot R_2^{2\alpha+1} \frac{c_{21}}{c_{11}} - \frac{c_{12}}{c_{22}} \frac{R_2^{2\alpha+1}}{shR_2}\cdot shR_1 =$$

$$= \frac{c_{12}}{c_{22}} \frac{shR_1}{shR_2}\cdot R_2^{2\alpha+1}(1-1) \equiv 0.$$

При $k=2$ в точці спряження $r=R_2$ маємо:

$$a_2^2\sigma_2 shR_2(g_2' v_{\nu,\alpha;2}^{(\mu)} - g_2 v_{\nu,\alpha;2}^{(\mu)\,\prime})|_{r=R_2} - a_3^2\sigma_3 R_2^{2\alpha+1}(g_3' v_{\nu,\alpha;3}^{(\mu)} - g_3 v_{\nu,\alpha;3}^{(\mu)\,\prime})|_{r=R_2} =$$

$$= (a_2^2\sigma_2 shR_2 \frac{c_{22}}{c_{12}} - R_2^{2\alpha+1})(g_3' v_{\nu,\alpha;3}^{(\mu)} - g_3 v_{\nu,\alpha;3}^{(\mu)\,\prime})|_{r=R_2} + a_2^2\sigma_2 shR_2\cdot c_{12}^{-1}\times \tag{39}$$

$$\times(Z_{\nu,\alpha;12}^{(\mu);2}(\beta_n)\omega_{22} - Z_{\nu,\alpha;22}^{(\mu);2}(\beta_n)\omega_{12}) = d_2(Z_{\nu,\alpha;12}^{(\mu);1}(\beta_n)\omega_{22} - Z_{\nu,\alpha;22}^{(\mu);1}(\beta_n)\omega_{12}),$$

тому, що в силу вибору чисел σ_2 та σ_3 вираз

$$a_2^2\sigma_2 shR_2 \frac{c_{22}}{c_{12}} - R_2^{2\alpha+1} = \frac{c_{12}}{c_{22}} \frac{R_2^{2\alpha+1}}{shR_2} shR_2\cdot \frac{c_{22}}{c_{12}} - R_2^{2\alpha+1} = R_2^{2\alpha+1}(1-1) \equiv 0.$$

Із диференціальних тотожностей

$$a_1^2 \frac{d^2 v_{\nu,\alpha;1}^{(\mu)}}{dr^2} + (\beta_n^2 + k_1^2) v_{\nu,\alpha;1}^{(\mu)}(r,\beta_n) = 0,$$

$$a_2^2 \Lambda_{(\mu)}[v_{\nu,\alpha;2}^{(\mu)}] + (\beta_n^2 + k_2^2) v_{\nu,\alpha;2}^{(\mu)}(r,\beta_n) = 0,$$

$$a_3^2 B_{\nu,\alpha}[v_{\nu,\alpha;3}^{(\mu)}(r,\beta_n)] + (\beta_n^2 + k_3^2) v_{\nu,\alpha;3}^{(\mu)}(r,\beta_n) = 0$$

знаходимо диференціальні залежності:

$$a_1^2 \frac{d^2 v_{\nu,\alpha;1}^{(\mu)}}{dr^2} = -(\beta_n^2 + k_1^2) v_{\nu,\alpha;1}^{(\mu)}(r,\beta_n),$$

$$a_2^2 \Lambda_{(\mu)}[v_{\nu,\alpha;2}^{(\mu)}] = -(\beta_n^2 + k_2^2) v_{\nu,\alpha;2}^{(\mu)}(r,\beta_n), \tag{40}$$

$$a_3^2 B_{\nu,\alpha}[v_{\nu,\alpha;3}^{(\mu)}(r,\beta_n)] = -(\beta_n^2 + k_3^2) v_{\nu,\alpha;3}^{(\mu)}(r,\beta_n).$$

Підставимо в рівність (35) отримані функціональні співвідношення (36)—(40). Одержимо вираз:

$$H_{\nu,\alpha}^{(\mu)}[M_{\nu,\alpha}^{(\mu)}[g(r)]] = (-\alpha_{11}^0)^{-1} v_{\nu,\alpha;1}^{(\mu)}(R_0,\beta_n) a_1^2 \sigma_1 \cdot g_0 +$$

$$+(\alpha_{22}^3)^{-1} v_{\nu,\alpha;3}^{(\mu)}(R_3,\beta_n) R_3^{2\alpha+1} \cdot g_R + \tag{41}$$

$$+\sum_{k=1}^{2} d_k [Z_{\nu,\alpha;12}^{(\mu),k}(\beta_n)\omega_{2k} - Z_{\nu,\alpha;22}^{(\mu),k}(\beta_n)\omega_{1k}] - \sum_{i=1}^{3}(\beta_n^2 + k_i^2)\tilde{g}_{in}.$$

Оскільки

$$\sum_{i=1}^{3}(\beta_n^2 + k_i^2)\tilde{g}_{in} = \beta_n^2 \sum_{i=1}^{3}\tilde{g}_{in} + \sum_{i=1}^{3} k_i^2 \tilde{g}_{in} = \beta_n^2 \tilde{g}_n + \sum_{i=1}^{3} k_i^2 \tilde{g}_{in} \ ,$$

то одержана тотожність (41) співпадає з тотожністю (33).

Доведення теореми завершено.

Висновок. Одержані правила (29), (30) та (33) складають математичний апарат для одержання інтегрального зображення аналітичного розв'язку відповідних задач математичної фізики кусково-однорідних середовищ.

Список використаних джерел:

1. Комаров Г. М. Скінченні гібридні інтегральні перетворення, породжені диференціальними рівняннями другого порядку / Г. М. Комаров, М. П. Ленюк, В. В. Мороз. — Чернівці : Прут, 2001. — 228 с.
2. Шилов Г. Е. Математический анализ. Второй специальний курс / Г. Е. Шилов. — М. : Наука, 1965. — 328 с.
3. Степанов В. В. Курс дифференциальних уравнений / В. В. Степанов. — М. : Физматгиз, 1959. — 468 с.
4. Конет І.М. Інтегральні перетворення типу Мелера-Фока / І. М. Конет, М. П. Ленюк. — Чернівці : Прут, 2002. — 248 с.
5. Ленюк М. П. Исследования основных краевых задач для диссипативного волнового уравнения Бесселя / М. П. Ленюк. — К., 1983. — 62 с. — (Препринт / АН УССР. Ин-т математики; 83.3).
6. Курош А. Г. Курс высшей алгебры / А. Г. Курош. — М. : Наука, 1971. — 432 с.
7. Ленюк М. П. Гібридні інтегральні перетворення (Фур'є, Бесселя, Лежандра). Частина 1 / М. П. Ленюк, М. І. Шинкарик. — Тернопіль : Економічна думка, 2004. — 368 с.

At the three-segment polar axis introduced integral transformation generated by hybrid differential Fourier-Legendre-Bessel. EXPRESS own items to the operator.

Key words: *hybrid differential operators, spectral problem, the fundamental system of solutions, custom elements.*

Отримано: 21.02.2013

УДК 517.96

В. А. Літовченко, д-р фіз.-мат. наук,
І. М. Довжицька, здобувач

Чернівецький національний університет
імені Юрія Федьковича, м. Чернівці

ДЕЯКІ ВЛАСТИВОСТІ РОЗВ'ЯЗКІВ ПАРАБОЛІЧНИХ СИСТЕМ ТИПУ ШИЛОВА З НЕВІД'ЄМНИМ РОДОМ

Для одного класу параболічних систем рівнянь типу Шилова з невід'ємним родом і гладкими обмеженими коефіцієнтами, залежними від просторової й часової змінних, наведено твердження про стабілізацію розв'язків задачі Коші та сформульовано теорему типу Ліувілля.

Ключові слова: *параболічні за Шиловим системи із змінними коефіцієнтами, задача Коші, узагальнені початкові дані, стабілізація розв'язків задачі Коші.*

Вступ. У класичній теорії параболічних систем рівнянь із частинними похідними ключове місце займає фундаментальна матриця розв'язків задачі Коші (ФМРЗК). Детальне дослідження цієї матриці дозволяє встановити розв'язність відповідної задачі Коші у різних функціональних просторах, описати класи коректності та єдиності для цієї задачі, одержати різні форми зображення її розв'язків, за допомогою яких з'ясувати їх якісні властивості, зокрема, принцип локалізації, стабілізацію, стійкість, теореми типу Ліувілля тощо [1—6].

Розвиваючи ідею Я. І. Житомирського [7] опису параболічно стійких до зміни коефіцієнтів систем рівнянь із частинними похідними, у [8] означено широкий клас параболічних систем із змінними коефіцієнтами, який істотно розширює клас параболічних за Шиловим систем рівнянь з невід'ємним родом та гармонічно доповнює клас Петровського параболічних систем рівнянь першого порядку стосовно часової змінної. Для таких систем побудовано фундаментальну матрицю розв'язків задачі Коші, досліджено її основні властивості, доведено коректну розв'язність задачі Коші у класі узагальне-