УДК 517.929

І. М. Данилюк, канд. фіз.-мат. наук

Чернівецький національний університет
імені Юрія Федьковича, м. Чернівці

УСЕРЕДНЕННЯ ПОЧАТКОВОЇ ЗАДАЧІ ДЛЯ БАГАТОЧАСТОТНИХ СИСТЕМ ВИЩОГО НАБЛИЖЕННЯ ЗІ СТАЛИМИ ЗАПІЗНЕННЯМИ

У статті обґрунтовано метод усереднення за швидкими змінними початкової задачі для багаточастотної нелінійної системи вищого наближення зі сталими запізненнями. Встановлено оцінку відхилення розв'язків вихідної та усередненої задач, яка явно залежить від малого параметра.

Ключові слова: *початкова задача, повільні і швидкі змінні, метод усереднення, запізнення.*

Вступ. Багато прикладних задач приводять до розв’язування початкових задач для багаточастотних нелінійних систем диференціальних рівнянь. Одним із методів розв’язання таких задач є метод усереднення, перше строге математичне обґрунтування якого було дано М. М. Боголюбовим [1]. Суть цього методу полягає в заміні досліджуваних рівнянь простішими, які називаються усередненими. При цьому природним чином виникає задача одержання ефективних оцінок норми різниці розв’язків вихідних і усереднених рівнянь та вивчення залежності оцінок від величини малого параметра.

Застосування цього методу до дослідження нелінійних коливних систем з повільно змінними частотами викликає значні труднощі через появу резонансних співвідношень між компонентами вектора частот [2]. У цій монографії для широких класів багаточастотних систем метод усереднення обґрунтований на підставі оцінок осциляційних інтегралів. Аналогічні оцінки для систем із запізненнями, які в процесі еволюції проходять через резонанс, побудовані в [3], де враховано вплив запізнення на резонансні співвідношення.

Багаточастотні системи вищого наближення досліджувались в роботах [4] і [5]. Порівняно з цими роботами в даній праці розглядається система вищого наближення з багатьма запізненнями. Вивчались також системи цього типу і в [2; 6].

1. Постановка задачі. Розглянемо нелінійну систему $n + m$ диференціальних рівнянь з повільними та швидкими змінними і сталими запізненнями вигляду

$$\frac{dx}{d\tau} = \sum_{k=0}^{r} \varepsilon^k a_k(X,\tau) + \varepsilon^{r+1} A(X,\Phi,\tau,\varepsilon), \tau \in [0, L], \qquad (1)$$

$$\frac{d\varphi}{d\tau}=\sum_{k=0}^{r}\varepsilon^{k-1}b_k(X,\tau)+\varepsilon^r B(X,\Phi,\tau,\varepsilon),\tau\in[0,L], \qquad (2)$$

де

$$X=(x(\tau,\varepsilon),x(\tau-\Delta_1,\varepsilon),...,x(\tau-\Delta_s,\varepsilon))\,,\;x=x(\tau,\varepsilon)\in D\subset R^n,$$

$$\Phi=(\varphi(\tau,\varepsilon),\;\varphi(\tau-\Delta_1,\varepsilon),...,\;\varphi(\tau-\Delta_s,\varepsilon))\,,\;\varphi=\varphi(\tau,\varepsilon)\in R^m\,,\;\Delta_i\in(0,L)\,,$$

$i=\overline{1,s}$, $(0,\varepsilon_0]\ni\varepsilon$ — малий додатний параметр, D — відкрита обмежена область в R^n.

Задамо для (1), (2) початкову умову

$$x(\tau,\varepsilon)=f(\tau),\;\varphi(\tau,\varepsilon)=g(\tau,\varepsilon)+\frac{1}{\varepsilon}\int_0^\tau\Omega(t)dt,\quad \tau\in[-\Delta,0]\,, \qquad (3)$$

де $\Delta=\max\limits_{i=\overline{1,s}}\Delta_i$; $f(t)$ і $g(t,\varepsilon)$, $\Omega(t)$ n- і m-вимірні вектор-функції відповідно.

Припустимо, що виконуються наступні умови:

а) $Z(X,\Phi,\tau,\varepsilon)=(A(X,\Phi,\tau,\varepsilon),B(X,\Phi,\tau,\varepsilon))$ — $(n+m)$ — вимірна вектор-функція, яка належить класу майже періодичних по Φ функцій, що розкладаються в $G=D^{s+1}\times R^{m(s+1)}\times[0,L]\times(0,\varepsilon_0]$ в ряд Фур'є

$$Z(X,\Phi,\tau,\varepsilon)=\sum_{l=0}^{\infty}Z_l(X,\tau,\varepsilon)e^{i(\lambda_l,\Phi)},$$

де $i=\sqrt{-1}$, (λ_l,Φ) — скалярний добуток в $R^{m(s+1)}$, $\lambda_0=0,\lambda_l\neq0$ при $l\geq1$.

б) $a_k(X,\tau),b_k(X,\tau)\in C^1_{X,\tau}(D^{s+1}\times[0,L],\sigma_1),k=\overline{0,r},$

$$Z(X,\Phi,\tau,\varepsilon)\in C^1_{X,\Phi,\tau}(D^{s+1}\times R^{(s+1)m}\times[0,L],\sigma_1),$$

$$f(\tau)\in C^1([0,L],\sigma_1),g(\tau,\varepsilon)\in C^1_\tau([0,L]\times(0,\varepsilon_0],\sigma_1),$$

в) $\Omega(t)\in C^{sm}_t([-\Delta,0],\sigma_1),b_0(X,t)\in C^{sm}_t(D^{s+1}\times[0,L],\sigma_1)$.

Тут, наприклад, позначення $C^{\,l}_{X,\tau}(D^s\times[0,L],\sigma_1)$ — це множина вектор-функцій, які мають неперервні і обмежені в $D^s\times[0,L]$ сталою σ_1 частинні похідні по X,τ до порядку l включно.

Нехай

$$\omega(\tau)=b_0(\xi,\xi_{\Delta_1},\xi_{\Delta_2},...,\xi_{\Delta_s},\tau),$$

де $\xi=\xi(\tau),\,\xi_{\Delta_1}=\xi(\tau-\Delta_1),\ldots,\,\xi_{\Delta_s}=\xi(\tau-\Delta_s);\;\xi=\xi(\tau)$ — розв'язок допоміжної задачі

$$\frac{d\xi}{d\tau} = a_0(\xi, \xi_{\Delta_1}, ..., \xi_{\Delta_s}, \tau), \tau \in [0, L],$$
$$\xi(\tau) = f(\tau), \tau \in [-\Delta, 0]. \tag{4}$$

Припустимо, що цей розв'язок визначений і лежить в D разом зі своїм околом для всіх $\tau \in [-\Delta, L]$.

Нехай

$$det(S_1^T(\tau)) \neq 0, \tau \in [0, \Delta],$$
$$det(S_2^T(\tau)) \neq 0, \tau \in [\Delta, L],$$

де $S_1(\tau)$ та $S_2(\tau)$ — визначники Вронського відповідно для систем $m(s+1)$ функцій

$$\omega(\tau), \Omega(\tau - \Delta_1), ..., \Omega(\tau - \Delta_s)$$

і

$$\omega(\tau), \omega(\tau - \Delta_1), ..., \omega(\tau - \Delta_s),$$

де $\Omega(\tau) = (\Omega_1(\tau), ..., \Omega_m(\tau)), \omega(\tau) = (\omega_1(\tau), ..., \omega_m(\tau))$.

г) вектор-функція $Z(X, \Phi, \tau, \varepsilon)$ в області $G = R^{(s+1)m} \times [0, L] \times \times (0, \varepsilon_0]$ задовольняє нерівність

$$\sum_{l=1}^{\infty} \left[\left(1 + \frac{1}{\|\lambda_l\|} \right) \sup_G \|Z_l(X, \tau, \varepsilon)\| + \right.$$
$$\left. + \frac{1}{\|\lambda_l\|} \left(\sup_G \left\| \frac{\partial Z_l(X, \tau, \varepsilon)}{\partial X} \right\| + \sup_G \left\| \frac{\partial Z_l(X, \tau, \varepsilon)}{\partial \tau} \right\| \right) \right] \leq \sigma_1, \tag{5}$$

При виконанні умови в) для кожної кусково неперервно-диференційовної на $[0, L]$ функції $F(t)$ виконується оцінка осциляційного інтеграла [1]

$$\left\| \int_0^\tau F(t) \exp\left\{ \frac{i}{\varepsilon} \int_{t_0}^t (\lambda, W(s)) ds \right\} dt \right\| \leq$$
$$\leq \sigma_0 \varepsilon^\beta \left[\left(1 + \frac{1}{\|\lambda_k\|} \right) \sup_{\tau \in [0, L]} \|F(\tau)\| + \frac{1}{\|\lambda_k\|} \sup_{\tau \in [0, L]} \left\| \frac{d}{d\tau} F(\tau) \right\| \right], \tag{6}$$

для будь-якого $\tau \in [0, L], t_0 \in [0, L], \varepsilon \in (0, \varepsilon_0], 0 < \varepsilon_0$ — досить мале, $\beta = \dfrac{1}{(s+1)m}$, $\lambda = (\lambda^{(1)}, ..., \lambda^{(m)}) \neq 0$ зі сталою σ_0, яка залежить від b_0 і Ω, але не залежить від $F(\tau), \lambda, \varepsilon$.

2. Усереднення початкової задачі. Поставимо у відповідність вихідній задачі (1)—(3) усереднену за Φ задачу

$$\frac{d\bar{x}}{d\tau}=\sum_{k=0}^{r}\varepsilon^k a_k(\bar{X},\tau)+\varepsilon^{r+1}A_0(\bar{X},\tau,\varepsilon),\tau\in[0,L],\tag{7}$$

$$\bar{x}(\tau,\varepsilon)=f(\tau),\tau\in[-\Delta,0],\tag{8}$$

$$\frac{d\bar{\varphi}}{d\tau}=\sum_{k=0}^{r}\varepsilon^{k-1}b_k(\bar{X},\tau)+\varepsilon^{r}B_0(\bar{X},\tau,\varepsilon),\tau\in[0,L],\tag{9}$$

$$\bar{\varphi}(\tau,\varepsilon)=g(\tau,\varepsilon)+\frac{1}{\varepsilon}\int_0^{\tau}\Omega(t)dt,\tau\in[-\Delta,0],\tag{10}$$

де

$$\bar{X}=(\bar{x}(\tau),\bar{x}(\tau-\Delta_1),\bar{x}(\tau-\Delta_2),...,\bar{x}(\tau-\Delta_s)),$$

$$Z_0(\bar{X},\tau,\varepsilon)=(A_0(\bar{X},\tau,\varepsilon),B_0(\bar{X},\tau,\varepsilon))=$$

$$=\lim_{T\to\infty}T^{-(s+1)m}\int_0^T...\int_0^T Z(X,\Phi,\tau,\varepsilon)d\Phi.$$

Усереднена задача є простішою ніж вихідна, оскільки вона розпадається на дві підзадачі: (7), (8) — для знаходження $\bar{x}(\tau,\varepsilon)$ і (9), (10) — для знаходження $\bar{\varphi}(\tau,\varepsilon)$.

3. Відхилення розв'язку усередненої початкової задачі від точного розв'язку.

Теорема. Якщо виконуються умови а) — г) і розв'язок $\xi(t)$ задачі (4) визначений для всіх $\tau\in[-\Delta,L]$, то існують такі додатні сталі $\varepsilon_0^*<<1$ і σ, що при $\varepsilon_0<\varepsilon_0^*$ правильна оцінка

$$\left\|x(\tau,\varepsilon)-\bar{x}(\tau,\varepsilon)\right\|+\varepsilon\left\|\varphi(\tau,\varepsilon)-\bar{\varphi}(\tau,\varepsilon)\right\|\le\sigma\,\varepsilon^{r+1+\frac{1}{(s+1)m}},\tag{11}$$

для всіх $(\tau,\varepsilon)\in[0,L]\times(0,\varepsilon_0]$.

Доведення. Введемо наступні позначення:

$$U=U(\tau,\varepsilon)=(x(\tau,\varepsilon)-\bar{x}(\tau,\varepsilon),\varepsilon\varphi(\tau,\varepsilon)-\varepsilon\bar{\varphi}(\tau,\varepsilon)),$$

$$d_0(X,l)=(b_0(X,l),b_0(X,l-\Delta_1),b_0(X,l-\Delta_2),...,b_0(X,l-\Delta_s)).$$

Оцінимо норму $\left\|U(\tau,\varepsilon)\right\|$. Із інтегральних зображень розв'язків задач (1)—(3) та (7)—(10), припущень а), б) випливає, що

$$\left\|U(\tau,\varepsilon)\right\|\le\int_0^{\tau}\left(\sum_{k=0}^{r}\varepsilon^k\left\|z_k(X,t)-z_k(\bar{X},t)\right\|+\varepsilon^{r+1}\left\|Z(X,\Phi,t,\varepsilon)-Z(\bar{X},\bar{\Phi},t,\varepsilon)\right\|+\right.$$

$$+\varepsilon^{r+1}\left\|Z(\overline{X},\overline{\Phi},t,\varepsilon)-Z_0(\overline{X},t,\varepsilon)\right\|\Big)dt\le$$

$$\le(s+1)\sigma_1(r+2)\int_0^{\tau}\left\|U(t,\varepsilon)\right\|dt+ \tag{12}$$

$$+\varepsilon^{r+1}\sum_{l=1}^{\infty}\left\|\int_0^{\tau}F_l(t)\exp\left\{\frac{i}{\varepsilon}\int_{\Delta}^{t}(\lambda_l,W(\tau))d\tau\right\}dt\right\|,$$

де

$$W(\tau)=\begin{cases}(\omega(\tau),\Omega(\tau-\Delta_1),...,\Omega(\tau-\Delta_s)),\tau\in[0,\Delta),\\(\omega(\tau),\omega(\tau-\Delta_1),...,\omega(\tau-\Delta_s)),\ \tau\in[\Delta,L],\end{cases}$$

$$F_l(t)=Z_l(\overline{X},t,\varepsilon)\exp\left\{i(\lambda_l,\overline{\Phi}-\frac{1}{\varepsilon}\int_{\Delta}^{t}d_0(\overline{X},\tau)d\tau)\right\}\times$$

$$\times\exp\left\{\frac{i}{\varepsilon}\left(\lambda_l,\int_{\Delta}^{t}\Big(d_0(\overline{X},\tau)-W(\tau)\Big)d\tau\right)\right\}.$$

Встановимо допоміжні оцінки

$$\left\|\frac{dZ_l(\overline{X},t,\varepsilon)}{dt}\right\|\le\left\|\frac{\partial Z_l(\overline{X},t,\varepsilon)}{\partial\overline{X}}\right\|\cdot\left\|\frac{d\overline{X}}{dt}\right\|+\left\|\frac{\partial Z_l(\overline{X},t,\varepsilon)}{\partial t}\right\|\le$$

$$\le(s+1)(r+2)\sigma_1\sup_G\left\|\frac{\partial Z_l(\overline{X},t,\varepsilon)}{\partial\overline{X}}\right\|+\sup_G\left\|\frac{\partial Z_l(\overline{X},t,\varepsilon)}{\partial t}\right\|, \tag{13}$$

$$\left\|\frac{dF_l(t)}{dt}\right\|\le\sup_G\left\|\frac{dZ_l(\overline{X},t,\varepsilon)}{dt}\right\|+$$

$$+\left\|\lambda_l\right\|\sup_G\left\|Z_l(\overline{X},t,\varepsilon)\right\|((s+1)L\sigma_1(r+1)+\varepsilon^{-1}L(s+1)\sigma_1\left\|\overline{x}-\xi\right\|). \tag{14}$$

Оцінимо норму $\left\|\overline{x}-\xi\right\|$. Враховуючи інтегральні зображення розв'язків задач (7)—(8) і (4), умови а), б), одержуємо

$$\left\|\overline{x}-\xi\right\|=\left\|\int_0^{\tau}\sum_{k=1}^{r}\varepsilon^k a_k(\overline{X},t)+a_0(\overline{X},t)-a_0(\xi,\xi_{\Delta_1},\xi_{\Delta_2},...,\xi_{\Delta_s},t)+\right.$$

$$\left.+\varepsilon^{r+1}A_0(\overline{X},t,\varepsilon)dt\right\|\le\varepsilon(r+1)\sigma_1+ \tag{15}$$

$$+\sigma_1\int_0^{\tau}\left(\left\|\overline{x}-\xi\right\|+\left\|\overline{x}_{\Delta_1}-\xi_{\Delta_1}\right\|+...+\left\|\overline{x}_{\Delta_s}-\xi_{\Delta_s}\right\|\right)dt.$$

Оскільки при $k=\overline{1,s}$

$$\int_0^{\tau}\left\|\overline{x}(t-\Delta_k,\varepsilon)-\xi(t-\Delta_k,\varepsilon)\right\|dt=\int_{-\Delta_k}^{\tau-\Delta_k}\left\|\overline{x}(t,\varepsilon)-\xi(t,\varepsilon)\right\|dt=$$

$$=\int_0^{\tau-\Delta_k}\left\|\overline{x}(t,\varepsilon)-\xi(t,\varepsilon)\right\|dt\le\int_0^{\tau}\left\|\overline{x}(t,\varepsilon)-\xi(t,\varepsilon)\right\|dt,$$

то з нерівності (15) отримуємо

$$\left\|\overline{x}-\xi\right\|\le\varepsilon(r+1)\sigma_1+\sigma_1(s+1)\int_0^{\tau}\left\|\overline{x}-\xi\right\|dt.$$

Застосуємо до останньої нерівності лему Гронуолла-Беллмана [7], звідки одержимо

$$\left\|\overline{x}-\xi\right\|\le\sigma_2\varepsilon, \tag{16}$$

зі сталою $\sigma_2=(r+1)\sigma_1 e^{L\sigma_1(s+1)}$.

З оцінок (14) і (16) випливає, що

$$\begin{gathered}\left\|\frac{dF_l(t)}{dt}\right\|\le\sup_G\left\|\frac{dZ_l(\overline{X},t,\varepsilon)}{dt}\right\|+\\+\left\|\lambda_l\right\|\sup_G\left\|Z_l(\overline{X},t,\varepsilon)\right\|((s+1)L\sigma_1(r+1)+L(s+1)\sigma_1\sigma_2).\end{gathered}\tag{17}$$

Скористаємось оцінкою осциляційного інтеграла (6), нерівністю (5) та одержаною оцінкою (17). Тоді з (12) отримаємо

$$\left\|U(\tau,\varepsilon)\right\|\le\varepsilon^{r+1}\sum_{l=1}^{\infty}\left[\sigma_0\varepsilon^{\frac{1}{(s+1)m}}\left(\left(1+\frac{1}{\left\|\lambda_l\right\|}\right)\sup_G\left\|Z_l\left(\overline{X},\tau,\varepsilon\right)\right\|+\right.\right.$$

$$+\frac{1}{\left\|\lambda_l\right\|}\left((s+1)(r+2)\sigma_1\sup_G\left\|\frac{\partial Z_l(\overline{X},t,\varepsilon)}{\partial X}\right\|+\sup_G\left\|\frac{\partial Z_l(\overline{X},t,\varepsilon)}{\partial t}\right\|\right)+$$

$$\left.+\sup_G\left\|Z_l(\overline{X},t,\varepsilon)\right\|((s+1)L\sigma_1(r+1)+L(s+1)\sigma_1\sigma_2)\right]+$$

$$+(s+1)\sigma_1(r+2)\int_0^{\tau}\left\|U(t,\varepsilon)\right\|dt.$$

З останньої нерівності, враховуючи умову г) та використовуючи лему Гронуолла-Беллмана, одержимо оцінку (11) зі сталою

$$\sigma=\sigma_0\sigma_1(1+(s+1)((r+2)\sigma_1+\sigma_1(L(r+1)+L\sigma_2)))e^{(s+1)\sigma_1(r+2)L}.$$

Висновок. У цій статті проведено усереднення за швидкими змінними початкової задачі для багаточастотної нелінійної системи вищого наближення зі сталими запізненнями і одержано оцінку відхилення розв'язків вихідної та усередненої задач.

Список використаних джерел:

1. Боголюбов Н. Н. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний / Н. Н. Боголюбов, Ю. А. Митропольский. — М. : Наука, 1974. — 504 с.
2. Самойленко А. М. Багаточастотні коливання нелінійних систем / А. М. Самойленко, Р. І. Петришин. — К. : Ін-т математики НАН України, 1998. — 340 с.
3. Бігун Я. Й. Існування розв'язку та усереднення нелінійних багаточастотних задач із запізненням / Я. Й. Бігун // Укр. мат. журн. — 2007. — Вип. 59, №4. — С. 435–446.
4. Петришин Р. І. Оцінки похибки методу усереднення в багаточастотних системах зі сталим запізненням / Р. І. Петришин, І. М. Данилюк // Нелінійні коливання. — 2006. — Вип. 9, №2. — С.17–21.
5. Петришин Р. І. Оцінка похибки методу усереднення на півосі для багаточастотної резонансної системи / Р. І. Петришин, О. М. Похила // Укр. мат. журн. — 1997. — Вип. 49, №5. — С. 685–690.
6. Данилюк І. М. Обгрунтування асимптотичних методів для багаточастотних систем з відхиленим аргументом : дис. … канд. фіз.-мат. наук : 01.01.02 / І. М. Данилюк. — Чернівці, 2010. — 143 с.
7. Лакшмикантам В. Устойчивость движения: метод сравнения / В. Лакшмикантам, С. Лила, А. А. Мартынюк. — К. : Наук. думка, 1991. — 248 с.

In this paper the method of averaging over fast variables of initial value problem for multifrequency nonlinear system of higher approximations with constant delays has been substantiated. Also qualitative estimates of deviations of solutions of the original and averaged problems have been established.

Key words: *initial-value problem, slow and fast variables, averaging method, delays.*

Отримано: 26.03.2013