

8. Русин В. П. Структурно-лингвистические методы распознавания изображений в реальном времени / В. П. Русин. — К. : Наук. думка, 1986. — 128 с.
9. Верлань А. Ф. Діалогове моделювання як метод розв'язування задач обробки знань у навчальних системах / А. Ф. Верлань, І. О. Чмир, Ю. О. Фуртат // Педагогічна і психологічна науки в Україні : зб. наук. праць : в 5 т. — К. : Педагогічна думка, 2012. — Т. 3: Загальна середня освіта. — С. 334–343.
10. Верлань А. Ф. Интеллектуальный тьютор в системах обучения / А. Ф. Верлань, И. А. Чмырь, Д. Велев // Международная научная конференция «Приложение на информационные и коммуникационные технологии в экономике и образовании» : сборник докладов, 2–3 декабря 2011 г. — София, 2011. — С. 317–326.

Through the implementation of the Bologna process in the current education system in our time has become the task of personalizing the learning process. The article deals with the ability to personalize the learning process by taking into account the student while working with information.

Key words: *computer testing, an individual plan, computer control, individual features, personalization.*

Отримано: 20.02.2014

УДК [519.876.5:530.182]:553.98

А. Я. Бомба, д-р, техн. наук, професор,

С. В. Ярошак, канд. техн. наук

Рівненський державний гуманітарний університет, м. Рівне

МЕТОДИ КОМПЛЕКСНОГО АНАЛІЗУ ПРИ МОДЕЛЮВАННІ ТРИФАЗНОЇ ФІЛЬТРАЦІЇ В НАФТОГАЗОВИХ ПЛАСТАХ

Комплексний підхід до математичного моделювання процесів двофазної фільтрації в горизонтальних нафтогазових пластах узагальнено на випадок руху більш складної гетерогенної системи, що складається з водяної, нафтової та газової фаз.

Ключові слова: *трифазна фільтрація, квазіконформні відображення, числовий метод.*

Вступ. При дослідженні процесу розробки нафтогазових родовищ з використанням їх математичних моделей постає питання вибору певної абстракції представлення взаємодії рідин, що рухаються в пласті, між собою та скелетом, зокрема. Складність такого вибору, в першу чергу, пов'язана з процесами, які протікають в пласті, та режимом його розробки. Так, наприклад, коли пластовий тиск перевищує деяке критичне значення, яке відповідає невідокремленому сумісному руху газу та нафти, такий процес можна описати двофазною моделлю [1–2]: однією із фаз є суміш нафти та газу, а другою — вода. Проте, при відсут-

ності активної підтримки пластового тиску ззовні з наступним відбором флюїдів із пласта через експлуатаційні свердловини, суміш газу та нафти починає відокремлюватися з утворенням окремих фаз, що призводить, в свою чергу, до руху в пласті більш складної гетерогенної системи, складовими якої є нафта, газ та вода [1–2].

У цій статті комплексний підхід [3–5] до математичного моделювання процесів двофазної фільтрації в горизонтальних нафтогазових пластах узагальнено на випадок більш складної гетерогенної системи, що складається з водяної, нафтової та газової фаз. При цьому розроблені в [3–5] числові алгоритми розв'язання відповідних задач двофазної фільтрації (на побудову гідродинамічної сітки, відшукування поля насиченості, координат критичних точок типу «призупинки», фільтраційних витрат, часу повного заводнення тощо) модифіковано шляхом введення додаткових розрахункових процедур, що враховують сумісний рух трьох фаз та перераховують відповідні фільтраційні характеристики згідно з основними ідеями методу поетапної фіксації характеристик середовища та процесу.

Загальна постановка задачі. Розглянемо процес витіснення (трифазної ізотермічної фільтрації) в пласті, що породжений перепадом тиску на нагнітальних (●) та експлуатаційних (○) свердловинах, контури $\bar{L}_\alpha, \bar{L}_\beta$ ($\alpha = \overline{1, n^*}, \beta = \overline{1, n^*}$) яких разом із зовнішнім контуром (непроникним або ж проникним — контур живлення) L визначають область G_z фільтрації флюїдів (див. рис. 1).

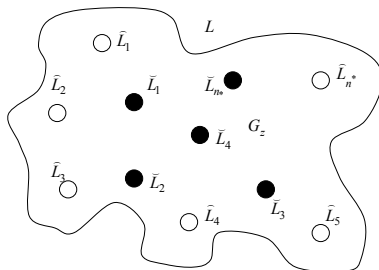


Рис. 1. Схематичне зображення пласта з $n^* + n^*$ свердловинами

Закони, що описують рух гетерогенної системи, складовими якої є водяна нафтова та газова фази, в такій області, згідно з [1–2], представимо у вигляді:

$$\bar{v}_l = \frac{k\tilde{k}_l}{\mu_l} \text{grad}\varphi, \quad \sigma \frac{\partial s_l}{\partial t} + \text{div}\bar{v}_l = 0, \quad l = w, o, g, \quad s_w + s_o + s_g = 1,$$

де $\varphi = \varphi(x, y, t) = -p(x, y, t) + \tilde{p}$ — квазіпотенціал швидкості фільтрації ($p(x, y, t)$ — тиск в точці (x, y) в момент часу t , \tilde{p} — деяке характер-

не його значення); $s_w(x, y, t)$, $s_o(x, y, t)$, $s_g(x, y, t)$ — насиченості пористого середовища водою, нафтою та газом в точці (x, y) у момент часу t (тут і надалі час t та інші величини є безрозмірними); σ , k — коефіцієнти пористості та абсолютної проникності ґрунту; $\tilde{k}_l = \tilde{k}_l(s_w, s_o)$ — відносні фазові проникності, де $l = w, o, g$; \vec{v}_l , μ_l — вектор швидкості та коефіцієнт в'язкості l -ої фази. Звідси, з урахуванням сумарної швидкості $\vec{v} = \vec{v}_w + \vec{v}_o + \vec{v}_g$ фільтраційної течії, маємо:

$$\operatorname{div} \vec{v} = 0, \quad (1)$$

$$\sigma \frac{\partial s_w}{\partial t} + \operatorname{div} \left(\frac{kk_w(s_w, s_o)}{\bar{k}(s_w, s_o)\mu_w} \vec{v} \right) = 0, \quad \sigma \frac{\partial s_o}{\partial t} + \operatorname{div} \left(\frac{kk_o(s_w, s_o)}{\bar{k}(s_w, s_o)\mu_o} \vec{v} \right) = 0, \quad (2)$$

$$\text{де } \vec{v} = \bar{k} \cdot \operatorname{grad} \varphi, \quad \bar{k}(s_w, s_o) = \frac{k\tilde{k}_w(s_w, s_o)}{\mu_w} + \frac{k\tilde{k}_o(s_w, s_o)}{\mu_o} + \frac{k\tilde{k}_g(s_w, s_o)}{\mu_g}.$$

Для зручності подальшого використання, з урахуванням (1), систему рівнянь (2) перепишемо у вигляді:

$$\begin{aligned} \sigma \frac{\partial s_w}{\partial t} + \vec{v} \cdot \operatorname{grad} \left(\frac{kk_w(s_w, s_o)}{\bar{k}(s_w, s_o)\mu_w} \right) &= 0, \\ \sigma \frac{\partial s_o}{\partial t} + \vec{v} \cdot \operatorname{grad} \left(\frac{kk_o(s_w, s_o)}{\bar{k}(s_w, s_o)\mu_o} \right) &= 0. \end{aligned} \quad (3)$$

Вважаємо, що на нагнітальних \tilde{L}_α та експлуатаційних \tilde{L}_β свердловинах підтримуються постійні тиски (відповідні їм квазіпотенціали позначимо через φ_* та φ^*), а інші ділянки границі області G_z можуть бути як лініями течії (зовнішній контур непроникний) так і екіпотенціальними лініями (зовнішній контур є контуром живлення),

вздовж яких, зокрема, матимуть місце рівності $\left. \frac{\partial \varphi}{\partial n} \right|_L = 0$ або

$$\begin{aligned} \varphi|_L = \varphi^0, \quad \text{де } \tilde{L}_\alpha = \{z = x + iy : \tilde{f}_\alpha(x, y) = 0\} = \{z : x = r^0 \cos(\tau) + \tilde{x}_\alpha, \\ y = r^0 \sin(\tau) + \tilde{y}_\alpha, \quad 0 \leq \tau < 2\pi\}, \quad \tilde{L}_\beta = \{z = x + iy : \tilde{f}_\beta(x, y) = 0\} = \{z : \\ x = r^0 \cos(\tau) + \tilde{x}_\beta, \quad y = r^0 \sin(\tau) + \tilde{y}_\beta, \quad 0 \leq \tau < 2\pi\}, \quad L = \{z : f(x, y) = 0\}. \end{aligned}$$

Початкові розподіли насиченості води, нафти та газу в пласті і їх значення на нагнітальних свердловинах позначимо відповідно через $s_w(x, y, 0) = \tilde{s}_w(x, y)$, $s_o(x, y, 0) = \tilde{s}_o(x, y)$, $s_g(x, y, 0) = 1 - \tilde{s}_w(x, y) - \tilde{s}_o(x, y)$

$$\text{та } s_w|_{\tilde{L}_\alpha} = s_w^*, \quad s_o|_{\tilde{L}_\alpha} = s_o^*, \quad s_g|_{\tilde{L}_\alpha} = s_g^*, \quad \alpha = \overline{1, n^*}.$$

Алгоритм розв'язання задачі. Згідно запропонованої в роботах [3–9] методології розв'язання нелінійних задач двохфазної фільтрації у нафтогазових пластах, область протікання процесу витіснення для яких є багатозв'язною, необхідною умовою використання методу числового квазіконформного відображення та основних ідей методики поетапної фіксації характеристик середовища і процесу (з метою переходу від прямої задачі до оберненої, а саме від фізичної області до однозв'язної області комплексного квазіпотенціалу) є введення серії умовних розрізів області G_z вздовж ліній течії, що проходять через точки призупинки потоку [6].

Після здійснення такого перетворення області G_z та побудови відповідної області комплексного квазіпотенціалу необхідно переписати задачу багатозв'язної фільтрації вже відносно нової розрахункової області — G_ω , використовуючи наступні формули

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi}{\partial x} &= \frac{1}{J} \frac{\partial y}{\partial \psi}, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = -\frac{1}{J} \frac{\partial x}{\partial \psi}, \quad v_x = \frac{\bar{k}}{J(\varphi, \psi)} \frac{\partial y}{\partial \psi}, \quad v_y = -\frac{\bar{k}}{J(\varphi, \psi)} \frac{\partial x}{\partial \psi}, \\ \frac{\partial}{\partial x} &= \frac{1}{J} \frac{\partial y}{\partial \psi} \frac{\partial}{\partial \varphi} - \frac{1}{J} \frac{\partial x}{\partial \psi} \frac{\partial}{\partial \psi}, \quad J = \frac{\partial x}{\partial \varphi} \frac{\partial y}{\partial \psi} - \frac{\partial x}{\partial \psi} \frac{\partial y}{\partial \varphi}, \quad \frac{\partial \psi}{\partial x} = -\frac{1}{J} \frac{\partial y}{\partial \varphi}, \\ \frac{\partial}{\partial y} &= -\frac{1}{J} \frac{\partial x}{\partial \psi} \frac{\partial}{\partial \varphi} + \frac{1}{J} \frac{\partial x}{\partial \psi} \frac{\partial}{\partial \psi}, \end{aligned}$$

де φ та ψ є комплексно спряженими функціями [3]. Тоді матимемо:

$$\bar{k} \frac{\partial y}{\partial \psi} = \frac{\partial x}{\partial \varphi}, \quad \bar{k} \frac{\partial x}{\partial \psi} = -\frac{\partial y}{\partial \varphi}, \quad (\varphi, \psi) \in G_\omega, \quad (4)$$

$$\frac{\partial}{\partial \psi} \left(\bar{k} \frac{\partial x}{\partial \psi} \right) + \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{1}{k} \frac{\partial x}{\partial \varphi} \right) = 0, \quad \frac{\partial}{\partial \psi} \left(\bar{k} \frac{\partial y}{\partial \psi} \right) + \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{1}{k} \frac{\partial y}{\partial \varphi} \right) = 0, \quad (5)$$

$$\begin{aligned} \sigma \frac{\partial s_w}{\partial t} + \frac{v^2}{k(s_w, s_o)} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{kk_w(s_w, s_o)}{\bar{k}(s_w, s_o)\mu_w} \right) &= 0, \\ \sigma \frac{\partial s_o}{\partial t} + \frac{v^2}{k(s_w, s_o)} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{kk_o(s_w, s_o)}{\bar{k}(s_w, s_o)\mu_o} \right) &= 0. \end{aligned} \quad (6)$$

Система рівнянь (4), як і у випадку двохфазної фільтрації, є фактично просторово-одновимірною, адже змінна ψ тут теж фігурує як параметр.

Рівняння (4)–(6), в залежності від вибору конфігурації області руху гетерогенної системи, доповнюватимемо відповідними крайовими та початковими умовами [3; 6].

Відзначимо, що використання ідей методу квазіконформних відображень та процедури поетапної фіксації різних характеристик середовища і процесу суттєво спрощує загальну стратегію розчеплення алгори-

тму розв'язання вихідної задачі (представлення його у вигляді блоків, що виконуються один за одним циклічно). А саме, за фіксованим розподілом насиченостей s_w, s_o розв'язуємо задачу на квазіконформне відображення: будуємо гідродинамічну сітку, характерні лінії розділу течії, знаходимо квазіпотенціал φ , витрату та інші невідомі фільтраційні параметри; за знайденими фільтраційними характеристиками знаходимо перерозподіл насиченості та перевіряємо умови зупинки процесу обчислень. Однією з них може бути умова перевищення допустимої частки витісняючої рідини в продукції експлуатаційних свердловин.

Різницевий аналог задачі дослідження багатофазної фільтрації та алгоритм її розв'язання будується аналогічно як і в роботах [3–6], шляхом введення в області комплексного квазіпотенціалу рівномірної ортогональної сітки з вузлами в точках (φ_i, ψ_j) ($i = \overline{1, n}, j = \overline{1, m}$), відносно якої здійснюється апроксимація рівнянь (4)–(6), наприклад, так [3–9]:

$$\begin{aligned} & \gamma_l^2 \left(\bar{k}_{i,j+1/2} (x_{i,j+1} - x_{i,j}) - \bar{k}_{i,j-1/2} (x_{i,j} - x_{i,j-1}) \right) + \\ & \quad + \frac{x_{i+1,j} - x_{i,j}}{\bar{k}_{i+1/2,j}} - \frac{x_{i,j} - x_{i,j-1}}{\bar{k}_{i-1/2,j}} = 0, \\ & \gamma_l^2 \left(\bar{k}_{i,j+1/2} (y_{i,j+1} - y_{i,j}) - \bar{k}_{i,j-1/2} (y_{i,j} - y_{i,j-1}) \right) + \\ & \quad + \frac{y_{i+1,j} - y_{i,j}}{\bar{k}_{i+1/2,j}} - \frac{y_{i,j} - y_{i,j-1}}{\bar{k}_{i-1/2,j}} = 0, \\ \widehat{s}_{wi,j} &= s_{wi,j} - \frac{\tau v_{i,j}^2}{\sigma \bar{k}_{i,j} \Delta \varphi_l} \left(\frac{kk_w(s_{wi,j}, s_{oi,j})}{\bar{k}(s_{wi,j}, s_{oi,j}) \mu_w} - \frac{kk_w(s_{wi-1,j}, s_{oi-1,j})}{\bar{k}(s_{wi-1,j}, s_{oi-1,j}) \mu_w} \right), \\ \widehat{s}_{oi,j} &= s_{oi,j} - \frac{\tau v_{i,j}^2}{\sigma \bar{k}_{i,j} \Delta \varphi_l} \left(\frac{kk_o(s_{wi,j}, s_{oi,j})}{\bar{k}(s_{wi,j}, s_{oi,j}) \mu_o} - \frac{kk_o(s_{wi-1,j}, s_{oi-1,j})}{\bar{k}(s_{wi-1,j}, s_{oi-1,j}) \mu_o} \right), \end{aligned}$$

де $x_{i,j} = x(\varphi_i, \psi_j)$, $y_{i,j} = y(\varphi_i, \psi_j)$, $\bar{k}_{i,j\pm 1/2} = \frac{\bar{k}_{i,j\pm 1} + \bar{k}_{i,j}}{2}$, $\bar{k}_{i\pm 1/2,j} = \frac{\bar{k}_{i\pm 1,j} + \bar{k}_{i,j}}{2}$,

$\bar{k}_{i,j} = \bar{k}(s_{wi,j}, s_{oi,j})$, $\gamma_l = \frac{\Delta \varphi_l}{\Delta \psi}$. З наступним вибором кроку за часом,

параметрів розбиття області комплексного квазіпотенціалу (що визначають положення вузлів (φ_i, ψ_j) сітки), точності роботи алгоритму, початкових наближень координат граничних вузлів гідродинамічної сітки, початкового наближення координат її внутрішніх вузлів знаходимо значення квазіконформних інваріантів. Далі проводимо уточнення координат внутрішніх вузлів гідродинамічної сітки шляхом розв'язання відповідних (4) різницевих аналогів. Після цього підправляємо граничні вузли за умов фіксації навколишніх граничних

та приграничних, використовуючи умови ортогональності, та знаходимо наближення величин витрат (дебітів свердловин). Серед умов завершення алгоритму побудови гідродинамічної сітки (відшукування невідомих фільтраційних параметрів, зокрема, поля швидкості) на даному ітераційному етапі: є стабілізація витрат, стабілізація граничних вузлів [3] тощо. У випадку невиконання якоїсь із цих умов відмічаємо на динамічній сітці ділянки порушення квазіконформності. Використовуючи поле швидкостей та поля насиченостей з попереднього ітераційного кроку за часом (з урахуванням граничної умови), згідно з різницеvim аналогом рівнянь (6) знаходимо нові розподіли насиченостей у пласті та повторюємо кроки алгоритму. Рівняння (6) розв'язуємо за умови поетапної фіксації величин s_w , s_o : а саме знаходимо розподіл s_w в кожній точці гідродинамічної сітки, при фіксованому s_o , після чого перераховуємо значення s_o з урахуванням знайденого значення s_w .

Висновок. Комплексний підхід до математичного моделювання процесів двофазної фільтрації узагальнено на випадок більш складної гетерогенної системи, що складається з водяної, нафтової та газової фаз. Шляхом введення додаткових розрахункових процедур, що враховують сумісний рух трьох фаз та перераховують відповідні фільтраційні характеристики, згідно з основними ідеями методу поетапної фіксації характеристик середовища та процесу, модифіковано алгоритми розв'язання відповідних крайових задач.

Список використаних джерел:

1. Баренблатт Г. И. Теория нестационарной фильтрации жидкости и газа / Г. И. Баренблатт, В. М. Ентов, В. М. Рыжик — М. : Недра, 1972. — 288 с.
2. Zhangxin C. Computational Methods for Multiphase Flows in Porous Media (Computational Science and Engineering) / C. Zhangxin, H. Guanren, M. Yuanle. Paperback // Society for Industrial and Applied Mathematic. — 2006. — 531 p.
3. Методи комплексного аналізу : монографія / А. Я. Бомба, С. С. Каштан, Д. О. Пригорницький, С. В. Ярошак. — Рівне : НУВГП, 2013. — 415 с.
4. Bomba A. Ya. Complex approach to modeling of two-phase filtration processes under control conditions / A. Ya. Bomba, S. V. Yaroschak // Journal of Mathematical Sciences. — 2012. — Vol. 184, № 1. — P. 56–69.
5. Бомба А. Я. Метод квазіконформних відображень розв'язання модельних задач двофазної фільтрації / А. Я. Бомба, С. В. Ярошак // Доповіді НАН України. — 2010. — №10. — С. 34–40.
6. Бомба А. Я. Про один числовий метод комплексного аналізу розв'язання задач багатофазної фільтрації в нафтогазових пластах / А. Я. Бомба, С. В. Ярошак // Математичне та комп'ютерне моделювання. Серія: Технічні науки. — Кам'янець-Подільський : Кам'янець-Подільський національний університет, 2013. — Вип. 8. — С. 14–22.
7. Bomba A. Ya. Systems Analysis of Filtration Processes in Multiconnected Curvilinear Domains / A. Ya. Bomba, V. V. Skopetsky, S. V. Yaroschak // Journal of Automation and Information Sciences. — 2010. — Vol. 42, № 8. — P. 55–64.

8. Бомба А. Я. Числовий метод квазіконформних відображень моделювання процесів двофазної фільтрації / А. Я. Бомба, С. В. Ярошак // Обчислювальна та прикладна математика. 2010. — №2. — С. 3–13.
9. Бомба А. Я. Один підхід до ідентифікації фільтраційно-ємкісних параметрів нафтогазових пластів / А. Я. Бомба, А. М. Сінчук, С. В. Ярошак // Математичне моделювання. — 2013. — № 1 (28). — С. 31–35.

An integrated approach to mathematical modeling of two-phase flow processes in horizontal oil and gas reservoirs generalized to the case of more complex motion of a heterogeneous system consisting of water, oil and gas phases.

Key words: *three-phase filtration, quasiconformal mappings, numerical method.*

Отримано: 14.03.2014

УДК 539.3

А. Ф. Верлань*, д-р техн. наук, професор,

Б. А. Худаяров**, д-р техн. наук, професор

*Институт проблем моделирования в энергетике
им. Г. Е. Пухова НАН Украины, г. Киев,

**Ташкентский институт ирригации и мелиорации,
г. Ташкент, Узбекистан

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ НЕЛИНЕЙНЫХ ПРОЦЕССОВ ДИНАМИКИ ВЯЗКОУПРУГИХ ПЛАСТИН В ПОТОКЕ ГАЗА

В статье рассматривается флаттер вязкоупругих пластин. Основное направление работы состояло в учете вязкоупругих свойств материала при сверхзвуковых скоростях. Уравнения колебаний относительно прогибов описываются интегро-дифференциальными уравнениями в частных производных. Аэродинамическое давление определяется в соответствии с поршневой теорией А. А. Ильюшина. При помощи метода Бубнова-Галеркина задачи сведены к исследованию системы обыкновенных интегро-дифференциальных уравнений (ИДУ). Решение ИДУ находится численным методом, основанным на использовании квадратурных формул. Разработаны вычислительные алгоритмы и создан комплекс прикладных программ для решения широкого класса задач о нелинейном флаттере вязкоупругих пластин. Определена критическая скорость флаттера вязкоупругих пластин.

Ключевые слова: *математическое моделирование, численные методы и алгоритмы, интегро-дифференциальные уравнения, флаттер пластин, вязкоупругость.*

Введение. В настоящее время композиционные материалы, обладающие ярко выраженными вязкоупругими свойствами, широко применяются в авиационной промышленности и многих других отраслях