

УДК 627.324.2/3:532.546

А. П. Власюк*, д-р техн. наук, професор,

Т. А. Дроздовський**, аспірант

*Міжнародний економіко-гуманітарний університет імені академіка Степана Дем'янчука, м. Рівне,

**Національний університет водного господарства та природокористування, м. Рівне

МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ЗМІНИ НАПРУЖЕНО-ДЕФОРМОВАНОГО СТАНУ ҐРУНТОВОГО МАСИВУ ПРИ НАГНІТАННІ В НЬОГО В'ЯЖУЧОГО РОЗЧИНУ В ОДНОВИМІРНІЙ ПОСТАНОВЦІ

Проведено математичне моделювання зміни напружено-деформованого стану ґрунтового масиву при нагнітанні в нього в'язучого розчину в одновимірному випадку, яке може бути застосоване для оцінки стійкості та надійності гідротехнічних споруд в процесі закріплення їх основ. Отримано аналітичний та числовий розв'язок даної задачі, проведено числові експерименти та здійснено їх аналіз.

Ключові слова: *математична модель, напружено-деформований стан, вільна межа, числовий розв'язок, метод скінченних різниць, в'язучий розчин, нагнітання.*

Вступ. В умовах сучасного розвитку промислового та цивільно-го будівництва зростає кількість споруд, які в міру певних обставин збудовані та експлуатуються в несприятливих гідрогеологічних умовах. Для оцінки і прогнозування стійкості даних споруд та надійності їх експлуатації використовують відомості про напружено-деформований стан (НДС) ґрунтової основи, на якій вони побудовані.

Для підвищення несучої здатності ґрунтової основи як один з методів в неї під напором нагнітають в'язучий розчин (рідке скло, цементний розчин і т.д.). У процесі проникнення розчину в товщу ґрунту змінюється і його напружено-деформований стан.

Дана проблематика знаходить відображення в розрізних дже-релах, де проблеми нагнітання [1–6] та обчислення змін НДС [8; 9] розглядаються окремо. Проте існує об'єктивна необхідність розгляду взаємного впливу процесу нагнітання на напружено-деформований стан ґрунтової основи гідротехнічної споруди.

1. Постановка задачі

Нехай маємо ґрунтовий масив товщиною L , в який під напором H просочується (фільтрується) в'язучий розчин (рис. 1). Ґрунтовий

масив у природному стані (область Ω_1) характеризується параметрами Ламе λ_1, μ_1 , а в області нагнітання (Ω_2) — λ_2, μ_2 . Рухома межа фронту нагнітання характеризується в момент часу координатою $l(t)$. Потрібно розрахувати напружено-деформований стан (НДС) ґрунтового масиву в областях Ω_1 і Ω_2 .

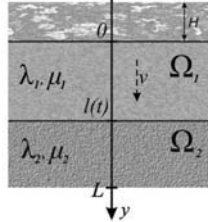


Рис. 1. Фільтрація в'язучого розчину в ґрунтовий масив

2. Математична модель задачі

У загальноприйнятих позначеннях математичну модель сформульованої вище постановки можна описати наступною крайовою задачею:

- рівнянням руху ін'єктованої рідини (в'язучого розчину) з інерційними членами (вісь y направлена вниз) [6]

$$\frac{\partial v_y}{\partial t} + \frac{\partial v_y}{\partial y} v_y = -\frac{1}{\rho_p} \frac{\partial p}{\partial y} + g - m \frac{g}{k} v, \quad y \in (0; l), \quad t > 0; \quad (1)$$

- рівняннями рівноваги лінійної теорії пружності [9]

$$(\lambda_1 + 2\mu_1) \frac{d^2 u_1}{dy^2} = \gamma_{зв} + \frac{dp}{dy}, \quad y \in \Omega_1 = (0; l), \quad (2)$$

$$(\lambda_2 + 2\mu_2) \frac{d^2 u_2}{dy^2} = \gamma_{np}, \quad y \in \Omega_2 = (l; L);$$

та відповідними крайовими умовами

- для напору (або для тиску)

$$h(0) = H, \quad h(l) = -y, \quad p(0) = P_0, \quad p(l) = -\rho_p g y, \quad (3)$$

- для зміщень

$$\frac{du_1(0)}{dy} = u_2(L) = 0, \quad u_1(l) = u_2(l), \quad E_1 \frac{du_1(l)}{dy} = E_2 \frac{du_2(l)}{dy}. \quad (4)$$

Тут: u_1, u_2 — величини зміщень в областях Ω_1 і Ω_2 відповідно, v_y — швидкість руху частинок рідини, v — об'ємна витрата

в'язуючого розчину через одиничну площадку, ρ_p — густина рідини, що фільтрується, p — тиск порової рідини, g — прискорення вільного падіння, m — пористість ґрунтового середовища, k — коефіцієнт фільтрації, $\gamma_{np} = \rho_{zp} \cdot g$ — питома вага ґрунту в природному стані, $\gamma_{зв} = \gamma_{np} - (1 - m)\rho_p \cdot g$ — питома вага водонасиченого ґрунту (ґрунту у зваженому стані), $h(y)$ — напір, E_1, E_2 — модулі Юнга ґрунтових середовищ в областях Ω_1 і Ω_2 відповідно.

3. Розв'язок задачі

3.1. Розв'язок задачі нагнітання

Рівняння нерозривності як відомо [6] в одновимірному випадку прийме вигляд

$$\frac{\partial v_y}{\partial y} = 0.$$

Рівняння (1) можна переписати, ввівши замість v_y швидкість фільтрації v згідно співвідношення $v = mv_y$, у наступному вигляді

$$\frac{1}{m} \frac{\partial v}{\partial t} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + g - \frac{g}{k} v. \quad (5)$$

Як показано в [6], у всіх практично цікавих випадках доданком $\frac{1}{m} \frac{\partial v}{\partial t}$ можна знехтувати. Тому, ввівши п'єзометричний напір h за формулою

$$h = \frac{p}{\rho g} - y, \quad (6)$$

закон Дарсі в даному випадку набуде вигляду

$$v = -k \frac{dh}{dy}.$$

Припустимо тепер, що в'язучий розчин інфільтрується в ґрунт під постійним напором H (рис. 1). При цьому в момент часу t він досяг глибини $l(t)$ від межі водойми. Нехай в початковий момент часу $t = 0$ маємо

$$l(0) = 0.$$

Оскільки $v = v(t)$ залежить тільки від часу і не залежить від y , то h є лінійною функцією від y

$$h = a(t)y + b(t).$$

Враховуючи граничні умови для напору, легко знаходимо параметри інтегрування

$$h(0) = b(t) = H, \quad (7)$$

$$h(l) = -l = al + b. \quad (8)$$

Звідки маємо

$$a = \frac{dh}{dy} = -\frac{l+H}{l}.$$

Швидкість фільтрації v пов'язана з похідною $\frac{dl}{dt}$ співвідношенням

$$v = m \frac{dl}{dt}.$$

Співставляючи останні два рівняння, отримуємо

$$m \frac{dl}{dt} = k \frac{H+l}{l}. \quad (9)$$

Звідки знаходимо

$$\frac{l dl}{l+H} = \frac{k}{m} dt.$$

Інтегруючи останнє рівняння при $l(0) = 0$, отримуємо

$$\frac{l}{H} - \ln\left(1 + \frac{l}{H}\right) = \frac{kt}{mH}. \quad (10)$$

Таким чином, рівняння слугує для визначення $l(t)$.

Для чисельного інтегрування рівняння (9), перепишемо його у вигляді

$$\frac{dl}{dt} = \frac{k}{m} \frac{H+l}{l}.$$

Покриємо відрізок $[0, T]$ множиною вузлів

$$\omega^t = \left\{ t_k \left| t_k = \tau \cdot k, \tau = \frac{T}{n_1}, k = \overline{0, n_1} \right. \right\}$$

та запишемо різницеву схему у вигляді

$$\frac{l_{k+1} - l_k}{\tau} = \frac{k}{m} \frac{H + l_k}{l_k}, \quad k = \overline{0, n_1 - 1}.$$

Звідки отримаємо

$$l_{k+1} = l_k + \tau \cdot \frac{k}{m} \frac{H + l_k}{l_k}, \quad k = \overline{0, n_1 - 1}, \quad (11)$$

або

$$\frac{l_{k+1} - l_k}{\tau} = \frac{k}{m} \frac{H + l_{k+1}}{l_{k+1}}, \quad k = \overline{0, n_1 - 1}.$$

Представимо останнє рівняння у вигляді

$$l_{k+1} (l_{k+1} - l_k) = \tau \frac{k}{m} (H + l_{k+1}).$$

Тоді маємо

$$(l_{k+1})^2 - \left(l_k + \tau \frac{k}{m} \right) l_{k+1} - \tau \frac{kH}{m} = 0. \quad (12)$$

Отримасмо розв'язок (12), що задовольняє умові $l_{k+1} \geq 0$

$$l_{k+1} = \frac{1}{2} \left(l_k + \tau \frac{k}{m} + \sqrt{\left(l_k + \tau \frac{k}{m} \right)^2 + 4 \frac{\tau k H}{m}} \right), \quad l_0 = 0. \quad (13)$$

Для чисельного розв'язання нелінійного рівняння (10) скористаємось ітераційним методом Ньютона

$$l^{(k+1)}(t) = l^{(k)} - \frac{f(l^{(k)}(t))}{f'(l^{(k)}(t))}, \quad l^{(0)}(t) = 1, \quad (14)$$

де

$$f(l, t) = \frac{l}{H} - \ln \left(1 + \frac{l}{H} \right) - \frac{kt}{mH}, \quad f'(l, t) = \frac{1}{H} - \frac{1}{H+l}.$$

У припущенні $l < H$ для розв'язування нелінійного рівняння (10) використаємо розклад логарифма в ряд Тейлора із залишковим членом у формі Пеано. Залишивши два члени розкладу

$$\ln(1+t) = t - \frac{t^2}{2} + o(t^2), \quad \text{у результаті отримаємо}$$

$$l(t) = \sqrt{2H \frac{kt}{m}} + o(t^2),$$

або у зручнішому представленні з відкиданням нескінченно малої другого порядку

$$l(t) = A_0 \sqrt{t}, \quad (15)$$

$$\text{де } A_0 = \sqrt{2H \frac{k}{m}} = \text{const}.$$

Таким чином, задача ідентифікації місцеположення фронту нагнітання алгоритмічно розв'язана повністю.

3.2. Розв'язок задачі НДС

Задача НДС (2), (4) в безрозмірних величинах прийме вигляд

$$\frac{d^2 u_i}{dy^2} = \tilde{A}_i, \quad i=1,2, \quad (16)$$

$$\frac{du_1(0)}{dy} = u_2(1) = 0, \quad u_1(l) = u_2(l), \quad E_1 \frac{du_1(l)}{dy} = E_2 \frac{du_2(l)}{dy}, \quad (17)$$

$$\text{де } \tilde{A}_1 = \frac{\gamma_{np} + \sigma \cdot \gamma_p + \gamma_p \frac{-l-H}{l}}{\lambda_1 + 2\mu_1}, \quad \tilde{A}_2 = \frac{\gamma_{np}}{\lambda_2 + 2\mu_2}.$$

Тут: $\bar{y} = \frac{y}{L}$, $\bar{u} = \frac{u}{L}$, $\bar{l} = \frac{l}{L}$ — безрозмірні величини, рисочки над якими тут і надалі для простоти опущені.

3.2.1. Аналітичний розв'язок задачі

Розв'язок задачі (16), (17) має вигляд

$$u = \begin{cases} \frac{\tilde{A}_1}{2}(y^2 - l^2) + \frac{\tilde{A}_2}{2}(l^2 - 1) + \tilde{A}_e \cdot (l^2 - l), & y \in (0; l(t)), \\ \frac{\tilde{A}_2}{2}(y^2 - 1) + \tilde{A}_e \cdot l \cdot (y - 1), & y \in (l(t); L), \end{cases} \quad (18)$$

де

$$\tilde{A}_e = \frac{E_1}{E_2} \tilde{A}_1 - \tilde{A}_2.$$

Як відомо [8], деформації і напруження в одновимірному випадку обчислюються як

$$\varepsilon = \frac{du}{dy}, \quad \sigma = E \cdot \frac{du}{dy}. \quad (19)$$

Тоді в даному випадку маємо

$$\varepsilon = \begin{cases} \tilde{A}_1 y, & y \in (0; l(t)), \\ \tilde{A}_2 (y - l) + \frac{E_1}{E_2} \tilde{A}_1 \cdot l, & y \in (l(t); L), \end{cases} \quad (20)$$

та

$$\sigma = \begin{cases} E_1 \cdot \tilde{A}_1 \cdot y, & y \in (0; l(t)), \\ E_2 \cdot \left(\tilde{A}_2 (y-l) + \frac{E_1}{E_2} \tilde{A}_1 \cdot l \right), & y \in (l(t); L), \end{cases} \quad (21)$$

3.2.2. Числовий розв'язок задачі

Покриємо відрізок $[0, L]$ множиною вузлів

$$\omega^y = \left\{ y_j \left| y_j = h_1 \cdot j, h_1 = \frac{L}{n_2}, j = \overline{0, n_2} \right. \right\}$$

та, використовуючи метод скінченних різниць [7], знайдемо числовий розв'язок даної задачі. В зв'язку з цим, запишемо різницеву схему задачі (16), (17)

$$u_{j-1} - 2u_j + u_{j+1} = \tilde{A}_i \cdot h_1^2, \quad j = \overline{1, n_2 - 1}, \quad i = 1, 2. \quad (22)$$

Для знаходження зміщень використаємо метод прогонки. Для цього запишемо рівняння (22) у прогоночному вигляді

$$a \cdot u_{j-1} - c \cdot u_j + b \cdot u_{j+1} = -f, \quad (23)$$

де $a = 1$, $b = 1$, $c = 2$, $f = -\tilde{A}_i \cdot h_1^2$.

Значення зміщень u_j , $j = \overline{1, n_2 - 1}$ послідовно знаходимо, використовуючи Метод прогонки

$$u_j = \alpha_{j+1} \cdot u_{j+1} + \beta_{j+1}, \quad (24)$$

де

$$\alpha_{j+1} = \frac{b}{c - a \cdot \alpha_j}, \quad \beta_{j+1} = \frac{a \cdot \beta_j + f}{c - a \cdot \alpha_j}, \quad i = \overline{0, n_2}. \quad (25)$$

З граничної умови при $\frac{du_1(0)}{dy} = 0$ маємо

$$u_1 - u_0 = 0.$$

Звідки знаходимо початкові значення прогоночних коефіцієнтів

$$\alpha_1 = 1, \quad \beta_1 = 0.$$

Зворотній хід прогонки, на основі граничної умови $u_2(1) = 0$, починаємо зі значення

$$u_{n_2} = 0.$$

Нехай у момент часу t положення фронту нагнітання знаходиться найближче до вузла x_q . Тоді, апроксимуючи умови спряженя (17), маємо

$$E_1 \frac{u_{q+1} - u_q}{h} = E_2 \frac{u_q - u_{q-1}}{h}. \quad (26)$$

Звівши (26) до прогоночного вигляду (24), отримаємо представлення коефіцієнтів a_q, b_q, c_q та вільного члена f_q :

$$a_q = E_1, \quad b_q = E_2, \quad c_q = E_1 + E_2, \quad f_q = 0.$$

Деформації та напруження обчислюються за формулами

$$\varepsilon_j = \frac{u_{j+1} - u_{j-1}}{2h}, \quad j = \overline{1, n_2 - 1}. \quad (27)$$

$$\sigma_j = E_i \frac{u_{j+1} - u_{j-1}}{2h}, \quad j = \overline{1, n_2 - 1}. \quad (28)$$

При $j = 0$ та $j = n$ скористаємось уточненими різницями.

$$\varepsilon_0 = \frac{-u_2 + 4u_1 - 3u_0}{2h}, \quad \sigma_0 = (\lambda_1 + 2\mu_1) \frac{-u_2 + 4u_1 - 3u_0}{2h},$$

$$\varepsilon_n = \frac{3u_{n_2} - 4u_{n_2-1} + u_{n_2-2}}{2h}, \quad \sigma_n = (\lambda_2 + 2\mu_2) \frac{3u_{n_2} - 4u_{n_2-1} + u_{n_2-2}}{2h}.$$

Значення напружень та деформацій біля положення фронту нагнітання теж обчислюємо з використанням уточнених різниць.

4. Результати числових експериментів

На основі проведених досліджень побудовано обчислювальні алгоритми, які були втілені у розробленому програмному комплексі MoS³ (Modelling of Stress-Strain State) у середовищі Microsoft Visual Studio 2010 засобами мови C# на базі технологій .Net Framework 4.0.

Проведено серію числових експериментів для наступних параметрів нагнітання

$$k = 2,5 \frac{\text{М}}{\text{год}}, \quad m = 0,5, \quad H = 20 \text{ м}.$$

Результати числових експериментів наведені на рис. 2.

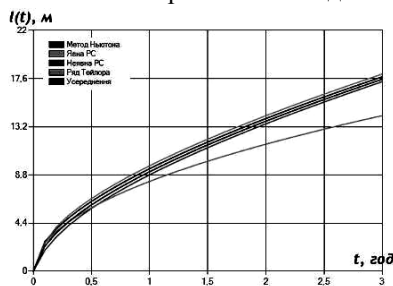


Рис. 2. Еволюція фронту нагнітання з кроком $\tau = 0,1$ год

Як видно з рис. 2 числові результати, отримані за формулами (11), (13), (14), достатньо добре співпадають.

Числові експерименти проводили для піщаного ґрунту, що в природному стані володіє такими характеристиками:

$$\gamma_2 = 1,7 \cdot 10^4 \frac{\text{Па}}{\text{М}}, \quad \lambda_2 = 1,7 \cdot 10^7 \text{ Па}, \quad \mu_2 = 1,15 \cdot 10^7 \text{ Па},$$

а у водонасиченому (зваженому) стані наступними

$$\gamma_{36} = 1,05 \cdot 10^4 \frac{\text{Па}}{\text{М}}, \quad \lambda_1 = 1,35 \cdot 10^7 \text{ Па},$$

$$\mu_1 = 0,9 \cdot 10^7 \text{ Па}, \quad \gamma_p = 1,7 \cdot 10^4 \frac{\text{Па}}{\text{М}}.$$

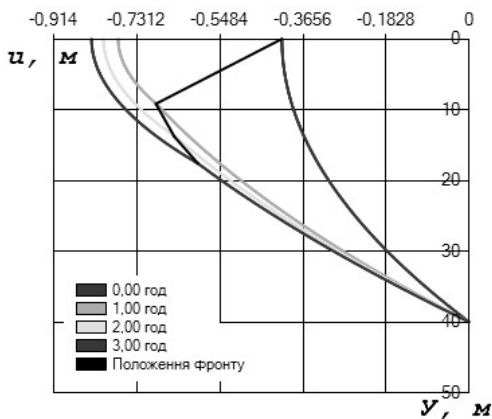


Рис. 3. Часова розгортка розподілу зміщень ґрунтового масиву з нанесенням координати місцяположення фронту нагнітання

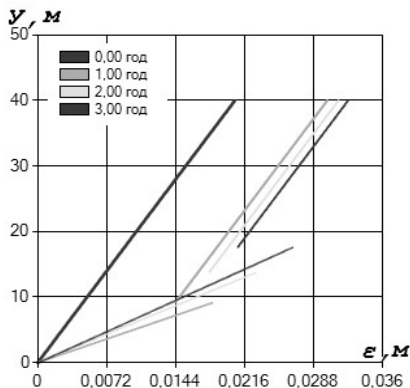


Рис. 4. Часова розгортка розподілу деформацій у ґрунтовому масиві

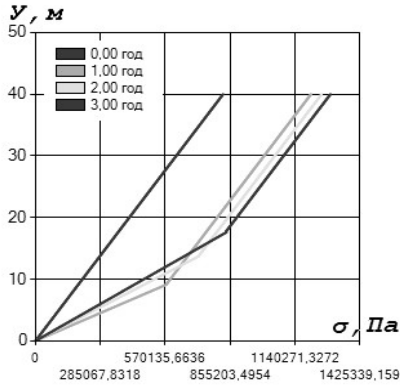


Рис. 5. Часова розгортка розподілу напружень у ґрунтовому масиві

Похибки обчислень за формулою (18) та числовим розв’язком, отриманим методом прогонки, знаходимо за формулами

$$\Delta u(t_k) = \max_{x \in [0, L]} |u_{чис}(t_k) - u_{ан}(t_k)|, \quad \delta u(t) = \max_{x \in [0, L]} \left| \frac{u_{чис}(t_k) - u_{ан}(t_k)}{u_{ан}(t_k)} \right|.$$

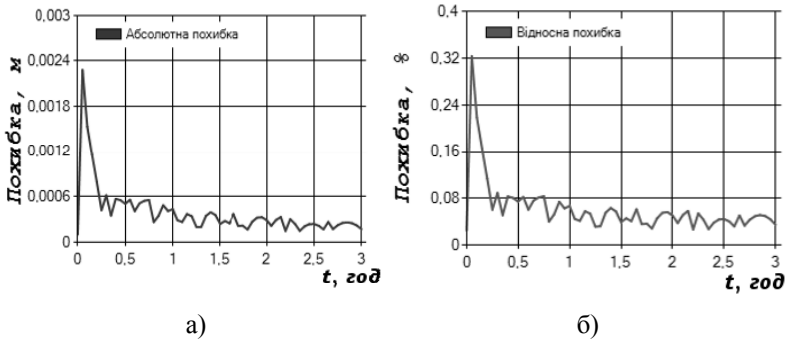


Рис. 6. Розподіл абсолютної (а) та відносної (б) похибок протягом нагнітання

Як видно з результатів числових експериментів (рис. 6), значення абсолютної похибки для зміщень ґрунту не перевищують $2,4 \cdot 10^{-3} \text{ м}$, значення відносної похибки не перевищують $3,3 \cdot 10^{-3}$ при кроці сітки $h = 0,01 \text{ м}$. Наявність похибок зумовлена результатами використання тих чи інших числових методів (точність $o(\tau)$ для задачі нагнітання та $o(h_1^2)$ для задачі НДС), а також «склеюванням» положення фронту нагнітання з вузлами сітки, що компенсуються зменшенням кроку сітки.

Висновки

У роботі проведено математичне моделювання НДС ґрунтового масиву при нагнітанні в нього в'язучого розчину. Отримано числовий розв'язок задачі нагнітання в прямій постановці та у постановці типу задачі Коші. Отримано аналітичний та числовий розв'язки крайових задач НДС з урахуванням руху фронту нагнітання. На основі отриманих розв'язків проведено числові розрахунки. Проведена оцінка відхилення числового розв'язку від аналітичного та обчислено величину похибки.

Розроблені обчислювальні алгоритми дають можливість проводити оцінку напружено-деформованого стану ґрунтової основи гідротехнічної споруди при її закріпленні шляхом нагнітання в'язучого розчину. Це у свою чергу може бути використано для оцінки стійкості та надійності основи гідротехнічної споруди.

Список використаних джерел:

1. Веригин Н. Н. Нагнетание вязущих растворов в горные породы в целях повышения прочности и водонепроницаемости оснований гидротехнических сооружений / Н. Н. Веригин // Изв. Акад. Наук СССР отд. техн. наук. — 1952. — № 5. — С. 674–687.
2. Власюк А. П. Про деякі нові математичні моделі підземної гідромеханіки / А. П. Власюк // Вісник РДТУ — Рівне, 2000. — Вип. 3(5). — Ч. 2. — С. 57–62.
3. Власюк А. П. Математичне моделювання задачі закріплення основи гідроспоруди в деформівному ґрунтовому масиві / А. П. Власюк, М. Б. Демчук // Тези Всекур. наук.-меод. конф. «Сучасні проблеми математичного моделювання, прогнозування та оптимізації». — Кам'янець-Подільський : Кам'янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка, 2004. — С. 248.
4. Власюк А. П. Укріплення основи гідротехнічного (енергетичного) об'єкта в осесиметричному випадку / А. П. Власюк, М. Б. Демчук // Вісник Київського ун-ту. Серія фіз.-мат. науки — К., 2005. — Вип. 3. — С. 207–216.
5. Власюк А. П. Чисельне розв'язання однієї задачі укріплення основи гідротехнічного (енергетичного) об'єкта / А. П. Власюк, М. Б. Демчук // Вісник Київського університету. Серія фіз.-мат. науки. — К., 2005. — Вип. 1. — С. 158–166.
6. Полубаринова-Кочина П. Я. Теория движения грунтовых вод / П. Я. Полубаринова-Кочина. — М. : Наука, 1977. — 664 с.
7. Самарский А. А. Численные методы / А. А. Самарский, А. В. Гулин. — М. : Наука, 1989. — 432 с.
8. Сергиенко И. В. Математическое моделирование и исследование процессов в неоднородных средах / И. В. Сергиенко, В. В. Скопецкий, В. С. Дейнека. — К., 1991. — 432 с.

9. Філатова І. А. Математичне моделювання напружено-деформованого стану багатошарового масиву при наявності рівня ґрунтових вод / І. А. Філатова // Вісник Київського університету. Серія: Фізико-математичні науки. — К., 2008. — Вип. 1. — С. 161–165.

Mathematical modelling of soil layer stress-strain state change under binding fluid injection inside it in the one-dimensional case was conducted. This can be used to assess hydropower buildings stability and reliability under their foundation fixing. The analytical and numerical solution of this problem was founded. All the data obtained via numerical experiments were analysed.

Key words: *mathematical model, stress strain state, free boundary, numerical solution, finite difference method, binding fluid, injecting.*

Отримано: 20.11.2013

УДК 517.947

А. П. Громик*, канд. техн. наук,

І. М. Конет**, д-р фіз.-мат. наук, професор

* Подільський державний аграрно-технічний університет, м. Кам'янець-Подільський,

** Кам'янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка, м. Кам'янець-Подільський

МОДЕЛЮВАННЯ КОЛИВНИХ ПРОЦЕСІВ У НАПІВОБМЕЖЕНОМУ КУСКОВО-ОДНОРІДНОМУ КЛИНОВИДНОМУ ПОРОЖНИСТОМУ ЦИЛІНДРІ

Методом інтегральних перетворень у поєднанні з методом головних розв'язків побудовано точний аналітичний розв'язок математичної моделі коливних процесів (гіперболічної крайової задачі) у напівобмеженому кусково-однорідному клиновидному порожнистому циліндрі.

Ключові слова: *моделювання, коливний процес, гіперболічне рівняння, початкові та крайові умови, умови спряження, інтегральне перетворення, функція впливу, функція Гріна.*

Вступ. Відомо, що коливні процеси відіграють важливу роль у сучасній вібраційній техніці, впливають на міцність і довговічність деталей машин і механізмів при врахуванні механічних і технологічних умов їх експлуатації. Найпростішою математичною моделлю такого процесу є добре і давно відоме диференціальне рівняння коливань гіперболічного типу (хвильове рівняння)