УДК 519.21

© В.С. Кирилюк

МЕРЫ РИСКА В ЗАДАЧАХ ПРИНЯТИЯ РЕШЕНИЙ В УСЛОВИЯХ РИСКА И НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ

Описан аппарат полиэдральных когерентных мер риска. Его применение для принятия решений в условиях риска и неопределенности демонстрируется на примере задач оптимизации портфеля по соотношению доходность-риск и для максимизации ожидаемой полезности, которые сведены к соответствующим проблемам линейного программирования.

Ключевые слова: полиэдральные когерентные меры риска, ожидаемая полезность, соотношение доходность-риск, неточные вероятности, оптимизация портфеля.

Введение

В разнообразных практических задачах надо принимать решения, результаты которых зависят от будущих (неопределенных) событий и процессов. Мы не знаем будущего, но наше незнание о нем не является абсолютным. В тексте работы ограничимся случаями, когда: 1) можно идентифицировать вероятности сценариев будущих событий; 2) их можно как-то оценивать. Первые будем назвать случаями известных распределений случайных величин (с.в.), вторые – случаями частичной неопределенности (неточных вероятностей).

Для оценивания многочисленных рисков ныне известно большое количество различных мер. Например, в технических системах в качестве такой меры выступает вероятность отказа (аварии), в страховании – вероятность банкротства, в классической портфельной теории – дисперсия [1], в финансах – Value-at-Risk (VaR) [2], пр.

Сами же риски, по сути, описывают одну из сторон изучаемых процессов. Лица, принимающие решения (ЛПР), как правило, учитывают риски (как потенциальные потери) и потенциальные выигрыши для соответствующих альтернатив. Потенциальные выигрыши обычно описываются ожидаемой прибыльностью (полезностью), однако адекватный выбор меры для оценки риска зачастую остается нетривиальной проблемой.

В данной работе мы опишем аппарат полиэдральных когерентных мер риска из [3–4] и его применение в задачах принятия решений в условиях риска и частичной неопределенности.

1. Ожидаемая полезность решений в условиях риска

Теория ожидаемой полезности является теоретической основой для рационального поведения ЛПР в условиях риска и неопределенности. Формально это выражается с помощью некоторой вогнутой возрастающей функции полезности $u(.)$ [5], математическое ожидание которой по вероятностной мере P служит критерием для принятия решений

$$E_P[u(x)] \to \max_{x \in X} . \tag{1}$$

Как показали парадоксы Але и Эллсберга, такая модель не совершенна. Позднее первый из них был преодолен в рамках теории двойственного выбора [6-7], а второй – введением в [8] робастного варианта критерия (1):

$$\inf\{E_P[u(x)] : P \in Q\} \to \max_{x \in X} , \tag{2}$$

где Q – некоторое выпуклое множество вероятностных мер.

В портфельной теории считается, что функция полезности учитывается в неявной форме с помощью соотношения доходность-риск [1]. В классической постановке Марковица риск оценивается дисперсией, которая не является удачной мерой риска, если распределение доходностей портфеля не гауссово (эллиптическое).

Позднее, после изложения аппарата мер риска, мы вернемся к задачам поиска оптимальных портфельных решений: 1) по соотношению доходность-риск в разделе 3; 2) в рамках теории ожидаемой полезности и двойственного выбора в разделе 4.

2. Меры риска

Мерой риска называется функция $\rho : X \to R$ из пространства случайных величин (с.в.) X на R, которая оценивает с.в. X некоторой детерминированной величиной $\rho(X)$.

2.1 Когерентные меры риска

В [9] были сформулированы 4 аксиомы для функции, претендующей на роль меры риска для финансовых потоков. Такие функции были названы когерентными мерами риска (КМР).

Согласно аксиомам КМР:

А1) $\rho(X + c) = \rho(X) - c$ трансляционно инвариантны;
А2) $\rho(X_1 + X_2) \le \rho(X_1) + \rho(X_2)$ субаддитивны;
А3) $\rho(\lambda X) = \lambda\rho(X), \lambda \ge 0$ положительно однородны;
А4) $\rho(X_1) \le \rho(X_2), X_1 \ge X_2$ (по распределению) монотонны.

Так, добавление к финансовому потоку некоторой суммы денег уменьшает его риск на эту величину (А1); диверсификация не увеличивает риск (А2); больший (по распределению) финансовый поток имеет меньший риск (А4).

Основной результат [9] состоял в том, что КМР $\rho(.)$ имеет вид:

$$\rho(X) = \sup\{E_P[-X] \,/\, P \in Q\}, \tag{3}$$

где Q – некоторое выпуклое замкнутое множество вероятностных мер.

Наиболее известным представителем КМР является мера CVaR_α (Conditional Value-at-Risk), введенная в [10] как интеграл по хвосту распределения убытков потока

$$CVaR_\alpha(X) = \frac{1}{1-\alpha}\int_\alpha^1 VaR_\beta(X)d\beta,$$

где $VaR_\alpha(X) = \min\{z / F_X(z) \ge \alpha\}$.

Сама мера VaR_α достаточно популярна в финансах в силу простоты интерпретации [2]. Однако она не КМР, поскольку не субаддитивна.

2.2 Полиэдральные когерентные меры риска

2.2.1 Случай известных распределений с.в.

Будем далее рассматривать случай конечных дискретно распределенных (к.д.р.) с.в. X, которые представляются в виде вектора значений $x = (x_1,..., x_n)$ и вектора сценарных вероятностей $p_0 = (p_1,..., p_n)$.

В [3] полиэдральной когерентной мерой риска (ПКМР) были названы функции вида (3), у которых замкнутое выпуклое множество вероятностных мер Q имеет вид выпуклой оболочки конечного числа точек, т.е. вида

$$Q = \{p\colon B\,p \le c,\ p \ge 0\}, \tag{4}$$

где B и c – матрица и вектор соответствующих размерностей.

Поскольку Q является множеством вероятностных мер, ее описание в (4) включает стандартное условие $\sum_{i=1}^n p_i = 1$, представленное в виде двух неравенств: $\sum_{i=1}^n p_i \le 1$ и $-\sum_{i=1}^n p_i \le -1$.

Разделим описание Q в (4) на стандартную (обязательную) и содержательную части. Представим матрицу B и вектор c как

$$B = \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \end{pmatrix}, c = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}, \tag{5}$$

где B_1 и c_1, описывающие упомянутые выше неравенства, являются стандартными:

$$B_1 = \begin{pmatrix} 1...1 \\ -1...-1 \end{pmatrix}, c_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \tag{6}$$

а B_2 и c_2, собственно, описывают содержательную часть в соотношении (4), которая определяет саму меру риска в виде (3)-(6).

Примеры ПКМР:

П1. Средние убытки:

$$B_2 = I, c_2 = p_0. \tag{7}$$

П2. Наихудший случай (максимальные убытки):

$$B_2, c_2 \text{ отсутствуют.} \tag{8}$$

П3. Условное среднее на хвосте распределения (CVaR$_\alpha$) из [10]:

$$B_2 = I, c_2 = p_0/(1-\alpha). \tag{9}$$

П4. Спектральная КМР (SCRM), введенная в [11] в форме

$$SCRM(X) = \int_0^1 \varphi(p) q_X(p) dp,$$

где спектр $\varphi:[0,1] \to R$ – неотрицательная убывающая функция, $\int_0^1 \varphi(p)dp = 1$.

Для SCRM при к.д.р.с.в. с n сценариями и спектром $\varphi(.)$:

$$B_2 = I, c_2 = \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\lambda_i}{1-\alpha_i} \right) p_0, \tag{10}$$

где $\alpha_i, \lambda_i, i = 1,...,n$ описываются следующими соотношениями

$$\alpha_i = 1 - \frac{i}{n},\ i = 1,...,n, \tag{11}$$

$$\lambda_i = i\left(\int_{(i-1)/n}^{i/n} \varphi(p)dp - \int_{i/n}^{(i+1)/n} \varphi(p)dp \right),\ i = 1,...,n-1,\ \lambda_n = n \int_{(n-1)/n}^{1} \varphi(p)dp. \tag{12}$$

П5. Представление Кусуоки (KFRM) инвариантных по распределению и комонотонных КМР мер риска из [12]:

$$\max_{(\lambda_1,...\lambda_n)\in\Lambda} \sum_{i=1}^{n} \lambda_i CVaR_{\alpha_i}(X),$$

где Λ – выпуклое замкнутое множество векторов весовых коэффициентов, сумма которых равна 1. Можно показать, что для KFRM при к.д.р.

$$B_2 = I, c_2 = \left(\max_{(\lambda_1,...\lambda_n)\in\Lambda} \sum_{i=1}^{n} \frac{\lambda_i}{1-\alpha_i} \right) p_0. \tag{13}$$

2.2.2 Случай неточных сценарных вероятностей

В [4] ПКМР переносились на случай частичной неопределенности. Там вместо (3)–(4) рассматривалось следующее определение:

$$\rho(X) = \sup\{E_P[-X] : P \in a(P_0)\}, \tag{14}$$

где многозначное отображение $a(.)$ с многогранными образами описывает меру риска $\rho(.)$ в зависимости от вероятностной меры P_0.

Если P_0 известна, отличия между (3)-(4) и (14) нет. Но ситуация меняется, если P_0 не известна точно, а доступна лишь информация

$$P_0 \in P_U, \tag{15}$$

где P_U – некое множество вероятностных мер. Тогда такая робастная ПКМР определялась как

$$\rho_U(X) = \sup\{E_P[-X] : P \in \overline{co}\, a(P_U)\}, \tag{16}$$

где $\overline{co}$ означает выпуклую замкнутую оболочку.

Неточные вероятности

Имеются лишь покоординатные оценки сверху и снизу для вектора p_0 сценарных вероятностей, а именно

$$P_U = \{p : p_{lw} \le p \le p_{up}\} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -Ip \le -p_{lw} \\ Ip \le p_{up} \end{pmatrix}. \tag{17}$$

В соответствии с (16) можно пересчитать для неточных вероятностей робастные варианты мер риска из примеров П1-П5. Содержательные части в виде матрицы B_2 и вектора c_2 их описания имеют следующий вид.

П1. Робастные средние убытки при неточных вероятностях:

$$B_2 = \begin{pmatrix} -I \\ I \end{pmatrix}, c_2 = \begin{pmatrix} -p_{lw} \\ p_{up} \end{pmatrix}. \tag{18}$$

П2. Наихудший случай остается без изменений:

B_2, c_2 отсутствуют.

П3. Робастный CVaR$_\alpha$ при неточных вероятностях:

$$B_2 = I, c_2 = p_{up}/(1-\alpha). \tag{19}$$

П4. Робастная SCRM при неточных вероятностях:

$$B_2 = I, c_2 = \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\lambda_i}{1-\alpha_i}\right) p_{up}, \tag{20}$$

где α_i, λ_i, $i = 1,\dots,n$ описываются соотношениями (11), (12).

П5. Робастное KFRM при неточных вероятностях:

$$B_2 = I, c_2 = \left(\max_{(\lambda_1,\dots,\lambda_n)\in\Lambda} \sum_{i=1}^{n} \frac{\lambda_i}{1-\alpha_i}\right) p_{up}. \tag{21}$$

3. Оптимизация портфеля по соотношению доходность-риск

Распределение прибыльности компонент портфеля z_j, j=1,…, k представим матрицей H размерности $n\times k$, где j-й столбец описывает посценарное распределение j-й компоненты. Вектор $u = (u_1, \dots, u_k)$ представляет структуру портфеля и рассматривается как переменная, причем $\sum_1^k u_i = 1$, $u_i \ge 0$, i=1,…,k. Нужно найти структуру портфеля u, которая оптимизирует совокупный результат портфеля по соотношению доходность-риск. Если распределения компонент известны, они задаются такой матрицей H посценарных распределений компонент и вектором $p_0 = (p_1,\dots,p_n)$ сценарных вероятностей. В качестве критериев будем использовать ожидаемую доходность и некоторую ПКМР. Рассмотрим далее две взаимосвязанные постановки задачи.

3.1 Оптимальные портфели: случай известных распределений

1. Задача минимизации ПКМР портфеля при гарантированной средней доходности. Обозначим допустимое значение средней доходности портфеля $E_{P_0}[Hu]$ величиной μ, а выбранную ПКМР, заданную в виде (3)-(6), как $\rho(Hu)$. Минимизируем вторую величину при ограничениях на первую :

$$\begin{gathered} \min \quad \rho(Hu). \\ \sum_1^n u_i = 1, u_i \geq 0 \\ E_{p_0}[Hu] \geq \mu_0 \end{gathered} \tag{22}$$

2. Задача максимизации средней доходности портфеля при ограничениях на ПКМР. Обозначим допустимое значение ПКМР портфеля $\rho(Hu)$ как ρ_0. Максимизируем доходность $E_{P_0}[Hu]$ при ограничениях на меру риска $\rho(Hu)$, заданную в виде (3)-(6):

$$\begin{gathered} \max \quad E_{p_0}[Hu]. \\ \sum_1^n u_i = 1, u_i \geq 0 \\ \rho(Hu) \leq \rho_0 \end{gathered} \tag{23}$$

Теорема 1 [3]. Если проблемы (22), (3)-(6) и (23), (3)-(6) совместны, то их оптимальными портфелями являются соответственно компоненты u решений (v, u) следующих проблем ЛП:

$$\begin{gathered} \min_{(v,u)} \quad < c, v >, \\ -B^T v - Hu \leq 0 \\ -p_0^T Hu \leq -\mu \\ \sum u_i = 1 \\ v \geq 0, u \geq 0 \end{gathered} \tag{24}$$

$$\begin{gathered} \max_{(v,u)} \quad < H^T p_0, u >, \\ -B^T v - Hu \leq 0 \\ < c, v > \leq \rho_0 \\ \sum u_i = 1 \\ v \geq 0, u \geq 0 \end{gathered} \tag{25}$$

а значения в решениях по функциям этих задач соответственно совпадают.

В [3] подобный результат был сформулирован также для проблемы вида (23), в которой заданы ограничения на несколько ПКМР.

3.2 Робастные оптимальные портфели: случай неточных вероятностей

Если для сценарных вероятностей известны лишь их оценки сверху и снизу, рассмотрим робастные аналоги описанных ранее задач, которые учитывают их худшие по множеству неопределенности величины. Тогда в качестве мер риска используем робастные меры риска $\rho_{\rho,P_U}(.)$, построенные по исходной мере $\rho(.)$ и множеству P_U в соответствии с (16), а в качестве робастной ожидаемой доходности – следующую функцию:

$$r(X) = \min\,(E_P[X]: P \in P_U\}, \tag{26}$$

где P_U для случая неточных вероятностей имеет вид (17), т.е. представляется в форме полиэдрального множества (3), где

$$B=\begin{pmatrix}-I\\ I\end{pmatrix}, c=\begin{pmatrix}-p_{lw}\\ p_{up}\end{pmatrix}. \tag{27}$$

Во избежание путаницы, обозначим соответствующие матрицу B и вектор c из представления полиэдральных множеств:

1) B_r и c_r – для функции вознаграждения $r(.)$ в виде (26), (4), (27);

2) B_ρ и c_ρ – для робастных вариантов мер риска $\rho_{\rho,P_U}(.)$ в виде (3)-(4).

Сформулируем теперь соответствующие задачи оптимизации портфеля.

1. Робастная версия минимизации ПКМР портфеля при гарантированной средней доходности r_0 имеет следующий вид**:**

$$\begin{array}{ll}\min & \rho_{\rho,P_U}(Hu)\\ \sum_1^n u_i=1, u_i\ge 0 & \\ r(Hu)\ge r_0 & \end{array} \tag{28}$$

2. Робастная версия максимизации средней доходности портфеля при ограничениях на ПКМР уровнем ρ_0 представляется в форме**:**

$$\begin{array}{ll}\max & r(Hu)\\ \sum_1^n u_i=1, u_i\ge 0 & \\ \rho_{\rho,P_U}(Hu)\le \rho_0 & \end{array} \tag{29}$$

Покажем, как и ранее, что поиск оптимальных решений таких задач может быть сведен к решению соответствующих проблем ЛП.

Теорема 2. Если решения проблем (28) и (29) с функцией доходности $r(.)$ и мерой риска $\rho_{\rho,P_U}(.)$ совместны, их оптимальными портфелями являются соответственно компоненты u решений (v, u, w) следующих задач ЛП:

$$\begin{array}{ll}\min_{(v,u,w)} & <c_\rho, v>,\\ -B_r^T w-Hu\le 0 & \\ -<c_r, w>\le -r_0 & \\ -B_\rho^T v-Hu\le 0 & \\ \sum_1^n u_i=1, u\ge 0 & \\ v\ge 0, w\ge 0 & \end{array} \tag{30}$$

$$\begin{array}{ll}\max_{(v,u,w)} & <-c_r, w>,\\ -B_r^T w-Hu\le 0 & \\ -B_\rho^T v-Hu\le 0 & \\ <c_\rho, v>\le \rho_0 & \\ \sum_1^n u_i=1, u\ge 0 & \\ v\ge 0, w\ge 0 & \end{array} \tag{31}$$

а значения в решениях по функциям этих задач соответственно совпадают.

Замечание. Описания мер риска из примеров П1-П5 и их робастных вариантов, приведенного в разделе 2, вполне достаточно для поиска решений задач (22), (23), (28) и (29) с участием таких мер риска с помощью соответственно проблем ЛП (24), (25), (30) и (31).

4. Максимизации ожидаемой полезности портфеля с помощью спектральной меры риска

Вернемся теперь к проблеме оптимизации портфеля в смысле максимизации его ожидаемой полезности (1). При некоторых свойствах функции $u(.)$ существует соответствие между ожидаемой полезностью и спектральной мерой риска, позволяющее свести поиск оптимальных решений в рамках теории ожидаемой полезности и двойственной теории выбора к минимизации некоторой спектральной меры риска. Приведем некоторые детали.

Утверждение [13]. Если множество образов с.в. X является подмножеством определения непрерывно дифференцируемой и строго вогнутой функции полезности $u(.)$, а функция распределения $F_X(x)$ монотонно возрастает, и функция квантиля $F_X^{-1}(p)$ существует, то существует взаимнооднозначное соответствие между ожидаемой полезностью функции $u(.)$ и индуцированной спектральной мерой риска, которое устанавливается следующей процедурой:

1. Определим функцию $v(x) = u(x) - u(0)$.
2. Вычислим $E[v(x)/x]$. Введем функцию $w(x) = v(x)/E[v(x)/x]$.
3. Положим $\psi(x) = w(x)/x$ и определим функцию $\varphi(p) = \psi(F_X^{-1}(p))$.
4. Определим следующую спектральную меру риска

$$SCRM(X) = -\int_0^1 \varphi(p) F_X^{-1}(p) dp .$$

Непосредственно из описанной процедуры следует, что

$$E[u(X)] = -SCRM(X),$$

поэтому максимизация ожидаемой полезности решения сводится к минимизации построенной спектральной меры риска.

Как известно из [13]–[14], если функция распределения $F_X(x)$ монотонно возрастает, и ее функция квантиля $F_X^{-1}(p)$ существует, то поиск оптимальных решений в рамках двойственной теории выбора [6–7] также сводится к минимизации соответствующей индуцированной спектральной меры риска.

Следовательно, достаточно широкий класс задач поиска оптимальных решений в рамках классической теории полезности в форме (1) и двойственной теории выбора [6-7] (в форме соответствующего интеграла Шоке) сводится к задаче минимизации ПКМР $SCRM(.)$ в виде (3)–(6), (10)–(12):

$$\min_{\sum_1^n u_i = 1, u_i \geq 0} SCRM(Hu). \tag{32}$$

Отметим, что второй критерий в таких постановках отсутствует.

Если при условиях утверждения для поиска оптимальных решений используется робастный вариант ожидаемой полезности вида (2), а Q есть множество неточных вероятностей (4)–(6) и (18), то соответствующая проблема сводится к робастному варианту проблемы (32), в которой соответствующая робастная *SCRM*(.) описывается в виде (3)–(6), (20), (11)–(12).

Таким образом, имеем приведенную задачу оптимизации портфеля в виде проблемы (32), где *SCRM*(.) в зависимости от ситуации описывается в виде либо (3)–(6), (10)–(12), либо (3)–(6), (20), (11)–(12). Для такой задачи для каждой из версий *SCRM*(.) можно сформулировать соответствующие следствия из рассмотренных ранее теорем 1 и 2. Представим их в форме одного общего утверждения.

Следствие. Оптимальным портфелем задачи (32) является компонента u решения (v, u) следующей проблемы ЛП:

$$\begin{gathered}\min_{(v,u)} \quad < c, v >, \\ -B^T v - Hu \le 0 \\ \sum u_i = 1 \\ v \ge 0, u \ge 0\end{gathered}$$

в которой матрица B и вектор c представляют соответствующую версию *SCRM*(.)), а значения в решениях по функциям этих задач совпадают.

Заключение

Таким образом, аппарат ПКМР позволяет адекватно оценивать риски в виде потенциальных убытков в задачах принятия решений в условиях риска и частичной неопределенности. Задачи оптимизации портфеля с использованием ПКМР сводятся к соответствующим проблемам ЛП, как при известных распределениях с.в., так и для случая частичной неопределенности (неточных вероятностей). Это гарантирует возможность поиска их решений при практически важных очень значительных размерностях исходных задач стандартными методами ЛП.

Отметим, что представленный математический аппарат позволяет в рамках единого подхода решать проблемы оптимизации портфеля как по соотношению доходность-риск, так и для максимизации ожидаемой полезности.

Список использованной литературы

1. Markowitz H.M. Portfolio Selection, Efficient Diversification of Investment. – New York: Wiley, 1959. – 344 p.

2. Jorion P.H. Value at Risk: A New Benchmark for Measuring Derivatives. – New York: Irwin Professional Publishers, 1996. – 284 p.

3. Кирилюк В.С. О классе полиэдральных когерентных мер риска // Кибернетика и системный анализ. – 2004. – № 4. – С. 155–167.

4. Кирилюк В.С. Полиэдральные когерентные меры риска и оптимизация инвестиционного портфеля // Кибернетика и системный анализ. – 2008. – № 2. – С. 120–133.

5. Von Neumann J., Morgenstern O. Theory of Games and Economic Behavior. – Princeton: Princeton University Press, 1944. – 625 p.
6. Quiggin J. Generalized Expected Utility Theory: The Rank-Dependent Expected Utility Model. – Boston: Kluwer Academic, 1993. – 208 p.
7. Yaari M.E. The dual theory of choice under risk // Econometrica. – 1987. – 55. – P. 95–115.
8. Gilboa I., Schmeidler D. Maxmin expected utility with non-unique prior // Journal of Math. Economics. – 1989. – 18. – P. 141–153.
9. Artzner P., Delbaen F., Eber J.-M., Heath. D. Coherent Measures of Risk // Mathematical Finance. – 1999. – 9/3. – P. 203–228.
10. Rockafellar R.T., Uryasev S. Optimization of Conditional Value-at-Risk // The Journal of Risk. – 2000. – 2. – P. 21–41.
11. Acerbi C. Spectral Measures of Risk: a Coherent Representation of Subjective Risk Aversion // Journal of Banking and Finance. – 2002. – 26(7). – P. 1505–1518.
12. Kusuoka S. On law invariant coherent risk measures, Kusuoka S, Maruyama T. (eds.) Advances in Mathematical Economics, Vol.3. – Tokyo: Springer, 2001. – P. 83–95.
13. Wächter H.P., Mazzoni T. Consistent Modeling of Risk Averse Behavior with Spectral Risk Measures // European Journal of Operational Research. – 2013. – 229 (2). – P. 487–495.
14. Sereda E.N., Bronshtein E.M., Rachev S.T., Fabozzi F.J., Sun W., and Stoyanov S.V. Distortion Risk Measures in Portfolio Optimization, in Handbook of Portfolio Construction. Contemporary Applications of Markowitz Techniques, ed. Guerard J.B. – New York: Springer, 2010. – P. 649–673.

Стаття надійшла до редакції 01.02.13 російською мовою

© В.С. Кирилюк

МІРИ РИЗИКУ В ЗАДАЧАХ ПРИЙНЯТТЯ РІШЕНЬ В УМОВАХ РИЗИКУ І НЕВИЗНАЧЕНОСТІ

Описано апарат поліедральних когерентних мір ризику. Його застосування для прийняття рішень в умовах ризику і невизначеності демонструється на прикладі задач оптимізації портфелю за співвідношенням прибутковість-ризик та для максимізації очікуваної корисності, які зведено до відповідних проблем лінійного програмування.

© V.S. Kirilyuk

RISK MEASURES IN PROBLEMS OF DECISION-MAKING UNDER RISK AND UNCERTAINTY

Apparatus of polyhedral coherent risk measures is described. Its use for decision-making under risk and uncertainty is demonstrated on the example of portfolio optimization problems by the return-risk ratio and for expected utility maximization, which are reduced to the corresponding linear programming problems.