



И.В. СЕРГИЕНКО, В.С. ДЕЙНЕКА

УДК 519.6

ЧИСЛЕННЫЙ СИСТЕМНЫЙ АНАЛИЗ МНОГОКОМПОНЕНТНЫХ РАСПРЕДЕЛЕННЫХ СИСТЕМ

Ключевые слова: *многокомпонентные распределенные системы, численное моделирование, оптимальное управление, идентификация параметров.*

ВВЕДЕНИЕ

Современные достижения в области вычислительной математики, теории оптимального управления состояниями различных распределенных систем, теории численной обработки сложных геометрических объектов, программирования и наличие суперкомпьютеров позволяют создавать мощные информационные технологии анализа состояния и прогнозирования поведения сложных объектов энергетики, машиностроения, а также решать проблемы продления их ресурса, рационального природопользования и др.

По своему строению сложные объекты различного назначения имеют многокомпонентную структуру, их составляющие различаются механическими, физическими и другими характеристиками. Часто исследуемые многокомпонентные тела содержат технологические или природные прослои, включения, характеристики которых значительно отличаются от соответствующих характеристик других составляющих и могут существенно влиять на деформацию всего тела, формирование в нем температурного поля, движение жидкости, миграцию токсичных химических элементов и др.

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССОВ В МНОГОКОМПОНЕНТНЫХ СРЕДАХ

Опыт разработок в Институте кибернетики им. В. М. Глушкова НАН Украины и других организациях свидетельствует о том, что влияние указанных прослоек / трещин на формирование, например, термонапряженного состояния, движение жидкости как по всему исследуемому телу, так и вблизи самих прослоек можно учесть с помощью так называемых условий сопряжения — дифференциальных уравнений, записанных относительно срединных поверхностей включений. Особенность таких математических моделей — новые классы краевых, начально-краевых задач в частных производных с разрывными решениями на указанных произвольно расположенных в пространстве поверхностях. Для определения собственных частот и форм таких тел получены спектральные задачи для операторов второго и четвертого порядков с разрывными собственными функциями.

Разработана методика построения классических обобщенных задач в слабых постановках, а для эллиптических задач второго, четвертого (стержневые системы, составные тонкие пластины) порядков получены соответствующие функционалы энергии, определенные на классах разрывных функций; доказаны теоремы существования и единственности обобщенных разрывных решений [1–5].

© И.В. Сергиенко, В.С. Дейнека, 2013

Изучение влияния естественных или искусственных тонких включений на исследуемые процессы (фильтрацию жидкости, влагоперенос-фильтрацию, теплопроводность) позволило распространить указанные условия на более общие случаи — произвольно расположенные в пространстве поверхности, с учетом особенностей их строения, в частности на трехслойное включение $\bar{\gamma} = \bar{\gamma}_1 \cup \bar{\gamma}_2 \cup \bar{\gamma}_3$, где $\bar{\gamma}_1, \bar{\gamma}_3$ — слабопроницаемые составляющие, $\bar{\gamma}_2$ — расположенная между ними сильнопроницаемая составляющая и др.

Для краевых задач, которые описываются эллиптическими уравнениями второго и четвертого порядков

$$\mathcal{L}(u) = 0, \quad x \in \Omega, \quad \Omega = \bigcup_{i=1}^m \Omega_i, \quad (1)$$

с разнообразными типами условий сопряжения и краевых условий (в том числе при наличии неоднородных главных условий сопряжения и главных неоднородных краевых условий)

$$\mathcal{L}_1(u) = 0, \quad x \in \gamma = \bigcup_{i=1}^{n_1} \gamma_i, \quad x \in \Gamma = \bigcup_{i=1}^3 \Gamma_i, \quad (2)$$

получены соответствующие классические обобщенные задачи (задачи в слабых постановках) [5], заключающиеся в поиске функции (вектор-функции) $u \in H = \{v \in \bar{H} : L_2(v) = \varphi\}$, удовлетворяющей $\forall w \in H_0 = \{v \in \bar{H} : L_2(v) = 0\}$ тождеству

$$a(u, w) = \ell(w), \quad (3)$$

где $a(\cdot, \cdot) : \bar{H} \times \bar{H} \rightarrow R^1$ и $\ell(\cdot) : \bar{H} \rightarrow R^1$ — соответственно некоторые билинейная и линейная формы, $\bar{H} = \{v : v|_{\Omega_i} \in W_2^1(\Omega_i), i = \overline{1, m}\}$, $W_2^1(\Omega_i)$ — пространство функций Соболева, определенных на области Ω_i , $L_2(\cdot)$ — оператор, задающий главные условия сопряжения и главные краевые условия. В [5] получены достаточные условия существования непустых множеств H . Доказаны теоремы существования и единственности разрывных решений $u \in H$ соответствующих задач (3). Показано, что при условии достаточной гладкости на областях $\Omega_i, i = \overline{1, m}$, обобщенное решение $u = u(x)$ — классическое решение исходной дифференциальной задачи.

Доказано, что единственное решение $u \in H$ задачи (3) является единственной функцией, минимизирующей на H функционал энергии

$$\Phi(v) = a(v, v) - 2\ell(v). \quad (4)$$

Разработана методика построения классов $H_k^N, H_{k_0}^N$ разрывных функций метода конечных элементов (МКЭ). Установлено существование и единственность приближенного решения $u_k^N \in H_k^N$. Получены оценки погрешностей приближенных решений

$$\|u - u_k^N\|_L \leq ch^k, \quad (5)$$

где $\|\cdot\|_L = a^{1/2}(\cdot, \cdot)$ — энергетическая норма, порожденная оператором исходной задачи, u — классическое решение, $c = \text{const} > 0$, h — наибольший из диаметров всех конечных элементов, k — степень полиномов МКЭ, N — количество элементов, на которые разбита область $\bar{\Omega}$ с разрезами γ .

Доказано, что в случае $H_k^N \not\subset H$ имеем

$$\|u - u_k^N\|_L \leq ch^k, \quad 0 \leq \Phi(u_k^N) - \Phi(u) \leq c_1(h^{2k} + \bar{h}^{k+1}),$$

а при $H_k^N \subset H$

$$0 \leq \Phi(u_k^N) - \Phi(u) \leq c_1 h^{2k}, \quad \|u - u_k^N\|_{W_2^1} \leq c_2 h^k, \quad (6)$$

где $c_1, c_2 = \text{const} > 0$, \bar{h} — наибольший из диаметров конечных элементов разбиения части Γ_1 границы области $\bar{\Omega}$ и составляющих γ , на которых заданы неоднородные главные условия.

Для чисел обусловленности матриц A систем алгебраических уравнений МКЭ

$$Ax = B,$$

полученных на основе эквивалентных задач (3), (4), справедлива оценка

$$\text{cond}(A) \leq \frac{c}{h^2},$$

где h — длина наименьшей из сторон конечных элементов прямоугольной дискретной сетки разбиения составной области $\bar{\Omega}$.

Аналогичные результаты имеем для эллиптических задач с разрывными решениями, записанных в цилиндрических и полярных системах координат.

Заметим, что указанные оценки по порядку шагов дискретизации не хуже известных для аналогичных задач с гладкими решениями.

Для рассмотренных классов задач разработана методика замены неоднородных главных условий сопряжения и неоднородных главных краевых условий естественными условиями с использованием малого параметра $\varepsilon > 0$. Найдена оценка погрешности возмущения решения

$$\|u - u_\varepsilon\|_{W_2^1} \leq c\sqrt{\varepsilon}, \quad (7)$$

где u, u_ε — решения соответственно исходной и возмущенной задач.

Решая с помощью МКЭ возмущенную задачу, имеем приближенное решение $u_{k_\varepsilon}^N$ исходной задачи и оценку погрешности [5]

$$\|u - u_{k_\varepsilon}^N\|_{W_2^1} \leq c \left(h^k + \sqrt{\varepsilon} + \frac{\bar{h}^{k+1}}{\sqrt{\varepsilon}} \right), \quad (8)$$

где \bar{h} — наибольший диаметр конечных элементов участков задания неоднородных главных условий.

В работе [5] для квазилинейных эллиптических уравнений с разнообразными типами условий сопряжения (в том числе с главными неоднородными) сформулированы классические обобщенные задачи в слабых постановках, определенные на классах разрывных функций; доказаны теоремы существования и единственности обобщенных разрывных решений данных задач; доказаны теоремы существования и единственности приближенных обобщенных разрывных решений, для которых справедливы оценки вида (6).

Для этих задач рассмотрены вопросы использования малого параметра $\varepsilon > 0$ для замены неоднородных главных условий естественными. Для погрешности приближенного обобщенного решения $u_{k_\varepsilon}^N$ решения u_ε получены оценки вида (7), (8).

Для рассмотренных классов квазилинейных задач разработана методика построения регуляризатора B итерационного метода

$$B \frac{y_{k+1} - y_k}{\tau} + A(y_k) = 0, \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad \forall y_0 \in E^n,$$

нахождения решения нелинейной системы алгебраических уравнений МКЭ

$$A(y) = 0, \quad (9)$$

где $\tau > 0$ — параметр.

Такие операторы B обеспечивают сходимость геометрической прогрессии итерационного процесса, т.е.

$$\|y_k - y\|_B \leq \rho_0^k \|y_0 - y\|_B, \quad k = 0, 1, 2, \dots,$$

где $0 < \rho_0 < 1$, y — решение системы (9).

Аналогичные результаты получены для квазилинейных задач с условиями сопряжения неидеального контакта в полярной и цилиндрической системах координат, а также для задач упругого деформирования многокомпонентных тел, содержащих произвольно расположенные в пространстве тонкие прослойки и трещины.

Рассмотрены вопросы построения вычислительных алгоритмов повышенного порядка точности для численного решения условно корректных задач Неймана и типа Неймана. Для разнообразных типов условий сопряжения сформулированы условия согласованности — необходимые условия существования классических разрывных решений таких задач, связывающие внутренние распределенные источники / стоки f тела $\Omega \cup \gamma$, мощности поверхностных потоков g и источники / стоки ω на тонких внутренних включениях γ в виде

$$\int_{\Omega} f \, dx + \int_{\Gamma} g \, d\Gamma = \int_{\gamma} \omega \, d\gamma. \quad (10)$$

Построены соответствующие слабые задачи на классах разрывных функций с интегральными ограничениями единственности решений. Аналогично [6] разработана методика замены этих задач эквивалентными, которые определены на множествах без интегральных ограничений. В этом случае задача состоит в нахождении функции $u \in H$, удовлетворяющей $\forall w \in H_0$ тождеству

$$a_1(u, v) = \ell_1(v), \quad (11)$$

где для естественных условий сопряжения $H = \bar{H}$, $H_0 = H$, а для задач с главным условием сопряжения, отражающим задание скачка δ искомого решения: $H = \{v \in \bar{H}: [v]_{\gamma} = \delta\}$, $H_0 = \{v \in \bar{H}: [v]_{\gamma} = 0\}$, $\bar{H} = \{v: v|_{\Omega_i} \in W_2^1(\Omega_i), i = 1, 2\}$,

$$a_1(u, v) = a(u, v) + \int_{\Omega} u \, dx \int_{\Omega} v \, dx, \quad \ell_1(v) = \ell(v) + \int_{\Omega} v \, dx.$$

Доказано существование и единственность решения задачи (11), которое является единственной разрывной функцией, минимизирующей на H функционал

$$\Phi(z) = a_1(z, z) - 2\ell_1(z).$$

Факты существования и единственности разрывных решений рассматриваемых задач Неймана установлены на основе доказанного для класса разрывных функций $v \in \bar{H}$ обобщенного неравенства Пуанкаре

$$\int_{\Omega} v^2 \, dx \leq c \left(\int_{\Omega} \nabla v \nabla v \, dx + \left(\int_{\Omega} v \, dx \right)^2 + \int_{\gamma} [v]^2 \, d\gamma \right).$$

Замечание 1. Некоторые из условий сопряжения, например условия собственного сосредоточенного источника, обеспечивают единственность решения задачи Неймана [5].

В работе [7] аналогичные результаты получены для задач Неймана применительно к многокомпонентным средам с несколькими тонкими включениями.

Результаты из [8] распространены на краевые задачи типа Неймана для уравнений четвертого порядка с условиями сопряжения неидеального контакта, описывающие прогибы составных стержневых систем с одной и двумя степенями свободы.

Неустановившиеся процессы движения жидкости в сжимаемых многокомпонентных грунтовых средах с тонкими включениями и неустановившиеся процессы формирования температурных полей в многокомпонентных сплошных средах описываются линейными и нелинейными начально-краевыми задачами для параболических уравнений с условиями сопряжения неидеального контакта.

В работах [2–4, 9, 10] сформулированы соответствующие классические слабые задачи, определенные на классах разрывных функций. Доказаны теоремы

существования и единственности разрывных слабых решений. На основе использования классов разрывных по пространственным переменным функций МКЭ построены вычислительные алгоритмы повышенного порядка точности их дискретизации. Для приближенных разрывных решений $u_k^N(x, t)$ МКЭ найдены оценки

$$\|u - u_k^N\|_{W_2^1 \times L_2} \leq ch^k, \quad (12)$$

а для дискретного по времени приближения $U^j(x)$, полученного с помощью МКЭ и разностной схемы Кранка–Николсона, имеем оценку

$$\|z_m\|^2 + \delta_0 \tau \sum_{j=0}^{m-1} \|z_{j+1/2}\|_{W_2^1}^2 \leq c(h^{2k} + \tau^4), \quad (13)$$

где $\delta_0, c = \text{const} > 0$, $z_j = u(x, t_j) - U^j(x)$, $t_j = j\tau$, $j = \overline{0, m}$, $\tau = T/m$.

Данные оценки свидетельствуют о том, что по порядкам шагов дискретизации h, τ предложенные вычислительные алгоритмы для линейных (в том числе с условиями сопряжения сосредоточенной теплоемкости), квазилинейных параболических и псевдопараболических [11, 12] задач с условиями сопряжения неидеального контакта не хуже известных алгоритмов для подобных задач с гладкими решениями.

В работе [7] аналогичные результаты получены для параболических задач с различными типами условий сопряжения, определенных на нескольких поверхностях разреза области $\bar{\Omega}$, а также составных тонких включений, с условиями сопряжения сосредоточенных теплоемкостей на составных тонких включениях.

Рассмотрены вопросы замены главных неоднородных условий сопряжения естественными условиями с использованием малого параметра $\varepsilon > 0$. Показано, что для возмущенного решения u_ε имеет место оценка

$$\|u - u_\varepsilon\|_{W_2^1 \times L_2} \leq c\sqrt{\varepsilon}, \quad (14)$$

а для приближенного обобщенного разрывного решения возмущенной задачи имеем

$$\|u_\varepsilon - u_{k_\varepsilon}^N\|_{W_2^1 \times L_2} \leq ch^k, \\ \|u - u_{k_\varepsilon}^N\|_{W_2^1 \times L_2} \leq c \left(h^k + \sqrt{\varepsilon} + \frac{\bar{h}^{k+1}}{\sqrt{\varepsilon}} \right). \quad (15)$$

В работах [3, 4, 7, 9, 10, 13] сформулированы начально-краевые задачи для гиперболических уравнений и систем уравнений динамического упругого равновесия многокомпонентных сред с произвольно расположенными в пространстве тонкими включениями. С использованием классов разрывных функций получены соответствующие классические обобщенные (слабые) задачи, определенные на классах разрывных функций. Доказаны теоремы существования и единственности разрывных решений. На основе применения классов разрывных функций МКЭ построены вычислительные схемы повышенного порядка точности их дискретизации. Для приближенных разрывных решений $u_k^N(x, t)$ МКЭ справедливы оценки

$$\|u - u_k^N\|_{L_2 \times L_\infty} \leq ch^k, \quad (16)$$

а для дискретного по времени приближения $U^j(x)$, полученного с помощью МКЭ и разностной схемы Кранка–Николсона, имеем

$$\max_{j=0, m} \|U^j - u^j\|_{L_2} \leq c(h^k + \tau^2), \quad u^j = u(x, t_j). \quad (17)$$

Заметим, что оценки вида (16), (17) найдены для различных типов условий сопряжения, в том числе условий сопряжения сосредоточенных масс.

Рассмотрены вопросы замены главных неоднородных условий сопряжения естественными условиями с применением малого параметра $\varepsilon > 0$. Показано, что для возмущенного разрывного решения имеет место оценка вида (14).

Вопросы построения вычислительных алгоритмов повышенного порядка точности дискретизации начально-краевых задач для псевдогиперболических уравнений с условиями сопряжения исследованы в работе [7] и др.

Аналогичные вопросы рассмотрены для систем нелинейных параболических, эллиптико-параболических и эллиптико-псевдопараболических уравнений [14]. Исследование нестационарных полей и процессов свободных колебаний, устойчивости составных тел обуславливает разнообразные дифференциальные спектральные задачи с условиями сопряжения неидеального контакта (с разрывными собственными функциями) [5, 13, 15, 16]. Для данных задач сформулированы классические слабые спектральные задачи, определенные на классах разрывных функций. Эти задачи позволили с использованием классов разрывных функций МКЭ построить схемы повышенного порядка точности их численной дискретизации:

$$0 \leq \lambda_l^{kN} - \lambda_l \leq c_l h^{2(k-\alpha)}, \quad \|v_l - v_l^{kN}\|_{W_2^1} \leq c_l' h^{k-\alpha}, \quad (18)$$

где $\alpha = 0$ для операторов второго порядка, $\alpha = 1$ для операторов четвертого порядка, k — степень полиномов МКЭ (при $\alpha = 1$, $k \geq 3$), v_l — l -я собственная функция, отвечающая l -му собственному значению λ_l задачи, v_l^{kN} , λ_l^{kN} — соответствующие приближения v_l , λ_l , полученные с помощью МКЭ. Заметим, что оценки (18) по точности не хуже аналогичных, полученных для подобных задач с гладкими собственными функциями. Такие спектральные задачи исследованы для операторов второго порядка в декартовой, цилиндрической и полярной системах координат, для операторов теории упругости — в декартовой и цилиндрической системах координат [5], для операторов четвертого порядка — в декартовой системе [16]. Рассмотрены вопросы построения вычислительных алгоритмов повышенного порядка точности для спектральных задач с собственными значениями в краевых условиях и условиях сопряжения [5].

Вопросы построения вычислительных алгоритмов повышенного порядка точности для систем динамического упругого равновесия многокомпонентных тел с разрывными решениями исследованы в работах [4, 6–9, 13].

Вычислительные алгоритмы повышенного порядка точности численной дискретизации термоупругих задач составных тел рассмотрены в [17, 18].

ИДЕНТИФИКАЦИЯ ПАРАМЕТРОВ МНОГОКОМПОНЕНТНЫХ РАСПРЕДЕЛЕННЫХ СИСТЕМ

В настоящее время с помощью современных информационных технологий можно успешно решать в сжатые сроки проблемы создания необходимых обществу объектов различного назначения, рационального природопользования, экологии и др.

В этом смысле эффективны самонастраиваемые на конкретный объект информационные технологии, которые путем учета определенных вспомогательных данных о поведении объекта автоматически проведут уточнения неточно заданных исходных параметров и позволят с достаточной точностью проанализировать динамику исследуемых явлений при известных условиях влияния.

Решение проблемы самонастраивания определенных информационных технологий на конкретный объект требует обеспечения этих технологий средствами идентификации параметров объектов и параметров условий внешних воздействий. Создание таких средств является самостоятельной проблемой.

Вопросам идентификации параметров разнообразных технических объектов посвящено значительное количество научно-практических работ. В решении обратных задач теплопроводности достаточно эффективны градиентные методы

О.М. Алифанова [19], которые для получения $(n+1)$ -го приближения u_{n+1} восстанавливаемого параметра $u \in \mathcal{U}$ реализуют итерационный процесс

$$u_{n+1} = u_n - \beta_n p_n, \quad n = 0, 1, \dots, n^*, \quad (19)$$

где для нахождения направления спуска p_n и коэффициента β_n необходимо знать градиент J'_{u_n} функционала-невязки

$$J(v) = \frac{1}{2} \|Av - \bar{f}\|_F^2, \quad (20)$$

определенный в точке $v = u_n$, $Av = \{A_i v\}_{i=1}^N$, $A_i v = y(v)|_{\gamma_i}$ — след на γ_i состояния системы $y = y(v)$, а $\bar{f} = \{f_i\}_{i=1}^N$ — вектор данных натуральных наблюдений на поверхностях γ_i , $i = \overline{1, N}$.

Следует отметить, что градиентные методы (19) можно использовать для идентификации векторных, функционально-векторных или скалярных параметров $u \in \mathcal{U}$.

В работе [19] наибольшее внимание уделено трем методам выбора коэффициента β_n и направления спуска p_n для получения с помощью итерационного процесса (19) $(n+1)$ -го приближения u_{n+1} решения $u \in \mathcal{U}$ задачи

$$Au = \bar{f}, \quad u \in \mathcal{U}, \quad \bar{f} = F; \quad (21)$$

- для метода минимальных ошибок

$$p_n = J'_{u_n}, \quad \beta_n = \frac{\|e_n\|^2}{\|J'_{u_n}\|^2}; \quad (22)$$

- для метода скорейшего спуска

$$p_n = J'_{u_n}, \quad \beta_n = \frac{\|J'_{u_n}\|^2}{\|AJ'_{u_n}\|^2}; \quad (23)$$

- для метода сопряженных градиентов

$$p_n = J'_{u_n} + \gamma_n p_{n-1}, \quad \gamma_0 = 0, \quad \gamma_n = \frac{\|J'_{u_n}\|^2}{\|J'_{u_{n-1}}\|^2}, \quad \beta_n = \frac{(J'_{u_n}, p_n)}{\|Ap_n\|^2}. \quad (24)$$

Здесь J'_{u_n} — градиент функционала (20) при $u = u_n$, $e_n = Au_n - \bar{f}$.

Метод минимальных ошибок (19), (22) для случая линейного оператора A получают при выборе шага спуска на каждой операции из условия минимума функционала

$$\|u_{n+1} - u\|^2 = \|u_n - \beta_n J'_{u_n} - u\|^2 = \|u_n - u\|^2 - 2\beta_n (u_n - u, J'_{u_n}) + \beta_n^2 \|J'_{u_n}\|^2.$$

Минимум этого функционала по β_n достигается при

$$\beta_n = \frac{\|e_n\|^2}{\|J'_{u_n}\|^2}.$$

В методе скорейшего спуска шаг выбирается из условия минимума функционала

$$\|A_{u_{n+1}} - \bar{f}\|^2 = \|A_{u_n} - \bar{f}\|^2 - 2\beta_n (A_{u_n} - \bar{f}, AJ'_{u_n}) + \beta_n^2 \|AJ'_{u_n}\|^2.$$

Минимум этого функционала по β_n достигается при $\beta_n = \frac{\|J'_{u_n}\|^2}{\|AJ'_{u_n}\|^2}$.

Пусть $u, v \in \mathcal{U}$ и при $\lambda \in (0,1)$ имеет место выражение

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{J(u + \lambda(v-u)) - J(u)}{\lambda} = \langle u^*, v-u \rangle, \quad (25)$$

где $u^* = J'_{u_n}$ — производная Гато [20] функционала (20) в точке u по направлению $z = v-u$.

Для задач оптимального управления состояниями многокомпонентных линейных распределенных систем, рассмотренных в работах [7–10], имеем

$$\langle u^*, v-u \rangle = \langle J'_u, v-u \rangle = \pi(u, v-u) - L(v-u) = (Au - \bar{f}, Av - Au), \quad (26)$$

где $\pi(\cdot, \cdot)$, $L(\cdot)$ — некоторые билинейная и линейная формы.

Заметим, что выражение (26) служит основой для получения градиента функционала (20) при $u = u_n$ с помощью решений задачи состояния при $u = u_n$ и соответствующей сопряженной задачи.

На основании этого получены явные выражения градиентов J'_{u_n} для каждого шага итерационного процесса (19) идентификации разных, в том числе и нескольких одновременно, параметров эллиптических, параболических, эллиптико-параболических, псевдопараболических, гиперболических, псевдогиперболических многокомпонентных распределенных систем [21–25], идентификации параметров составных стержневых систем, составных тонких пластин, многокомпонентных тел упругого, термоупругого деформирования [26, 27].

Следует отметить, что при идентификации физических характеристик получаем нелинейные обратные задачи, для решения которых используем градиентные методы (19).

В работах [21, 28] приведены результаты одновременной идентификации коэффициента теплопроводности λ и мощности теплового потока β_2 на поверхности тонкой пластины, рассмотренной ранее в [19], где идентифицировалась лишь мощность теплового потока. Задача состоит в следующем. На области $\Omega_T = \Omega \times (0, T)$ определено уравнение

$$C \frac{\partial y}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda \frac{\partial y}{\partial x} \right). \quad (27)$$

Заданы краевые условия:

$$-\lambda \frac{\partial y}{\partial x} \Big|_{x=0} = \beta_1, \quad \lambda \frac{\partial y}{\partial x} \Big|_{x=l} = \beta_2, \quad t \in (0, T). \quad (28)$$

Начальное условие:

$$y(x, 0) = y_0(x), \quad x \in \bar{\Omega}. \quad (29)$$

Следуя [19], принято: $l = 0,003$ м, $T = 20$ с, $\lambda = 0,721 \frac{\text{кВт}}{\text{мК}}$, $\beta_1 \equiv 0$,

$$\beta_2 = \beta_2(t) = \begin{cases} 50t, \frac{\text{кВт}}{\text{м}^2}, & \text{при } t \in [0, 10], \\ -50t + 1000, \frac{\text{кВт}}{\text{м}^2}, & \text{при } t \in [10, 20], \end{cases}$$

$$y_0 \equiv 0, \quad C = 2,06 \cdot 10^6 \frac{\text{кВт с}}{\text{м}^3 \text{К}}.$$

Задано

$$y(d_i, t) = f_i(t), \quad i = 1, 2, \quad (30)$$

где $d_1 = 0,002$ м, $d_2 = 0,001$ м. В задаче (27)–(30) λ, β_2 — неизвестные.

Сопряженная задача имеет вид

$$\begin{aligned}
 -c \frac{\partial \psi}{\partial t} &= u_{1n} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}, \quad (x, t) \in \Omega_T \setminus \gamma_d, \\
 \frac{\partial \psi}{\partial x} &= 0, \quad x = 0, l, \quad t \in (0, T), \\
 [\psi]_{x=d_i} &= 0, \quad \left[u_{1n} \frac{\partial \psi}{\partial x} \right]_{x=d_i} = -(y(u_n; d_i, t) - f_i(t)), \quad i = 1, 2, \\
 \psi|_{t=T} &= 0, \quad x \in \Omega.
 \end{aligned}$$

В этом случае $J'_{u_n} \approx (\tilde{\psi}_{n_1}, \tilde{\psi}_{n_2})$, где

$$\begin{aligned}
 \tilde{\psi}_{n_1} &= \int_0^T \int_0^l \frac{\partial^2 y(u_n; x, t)}{\partial x^2} \psi dx dt + \int_0^T \frac{\partial y}{\partial x} \psi|_{x=0} dt - \int_0^T \frac{\partial y}{\partial x} \psi|_{x=l} dt, \\
 \tilde{\psi}_{n_2} &= \psi(0, t), \quad \|J'_{u_n}\|^2 \approx \tilde{\psi}_{n_1}^2 + \int_0^T \tilde{\psi}_{n_2}^2 dt,
 \end{aligned}$$

$\psi(x, t)$ — решение сопряженной задачи.

В результате идентификации получили приближение параметра λ с относительной погрешностью $\delta \leq 0,22\%$ и значением невязки $\|l_n\| = 3,48 \cdot 10^{-26}$. Распределение потока $\beta_2(t)$ практически совпало с точным значением (на рис. 1 кривые фактически совместились). В качестве известных значений $f_1(t), f_2(t)$ использованы аналогично [19] приближенные решения задачи (27)–(29) при точных данных $\lambda, \beta_2(t)$.

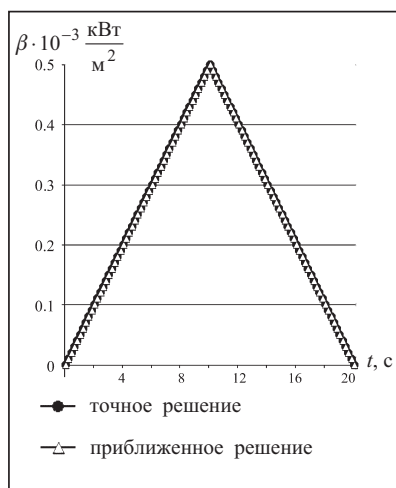
В работе [21] приведены результаты идентификации скорости конвективного переноса задачи диффузии-конвекции. На области $\Omega_T = \Omega \times (0, T)$, $\Omega = (0, 1)$, $T = 1$, определено уравнение

$$\frac{\partial y}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial y}{\partial x} - vy \right) + \tilde{f}. \quad (31) \quad \text{Рис. 1}$$

Принято $k = 1$. Идентификация скорости $v = u$ проводилась на множестве непрерывных функций, т.е. $u = u(t) \in \mathcal{U} = C([0, T])$. Рассмотрены три случая: $v = 2$, $v = t$, $v = \sin(\pi t) + 1$. Краевые, начальные условия и функция \tilde{f} для каждого случая подбирались такими, чтобы точное решение имело вид $y(x, t) = x^2 + xt + 7$. Тогда $J'_{u_n} = \tilde{\psi}_n$, где $\tilde{\psi}_n = -\int_0^l \frac{\partial y}{\partial x} \psi dx$, $\|J'_{u_n}\|^2 = \int_0^T \tilde{\psi}_n^2 dt$,

$\psi(x, t)$ — решение следующей сопряженной задачи:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \psi}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial \psi}{\partial x} \right) + u_n \frac{\partial \psi}{\partial x}, \quad (x, t) \in \Omega_T \setminus \gamma_d, \\
 \psi(0, t) &= \psi(l, t) = 0, \quad t \in (0, T), \\
 [\psi]_{x=d_i} &= 0, \quad \left[k \frac{\partial \psi}{\partial x} \right]_{x=d_i} = -(y(u_n) - f_i), \quad x = d_i, \quad t \in (0, T), \quad i = \overline{1, N}.
 \end{aligned}$$



Результаты идентификации скорости v при различных трех точных ее значениях соответственно приведены на рис. 2: рис. 2, а ($v(t) = 2$, $\|e_n\| = 3,11 \cdot 10^{-4}$); рис. 2, б ($v = t$, $\|e_n\| = 1,84 \cdot 10^{-4}$); рис. 2, в ($v(t) = \sin(\pi t) + 1$, $\|e_n\| = 2,15 \cdot 10^{-4}$). Сплошной линией обозначены точные, а знаком + — полученные приближенные значения. Во всех случаях использованы четыре точки наблюдения: $d_1 = 0,2$, $d_2 = 0,4$, $d_3 = 0,6$, $d_4 = 0,8$.

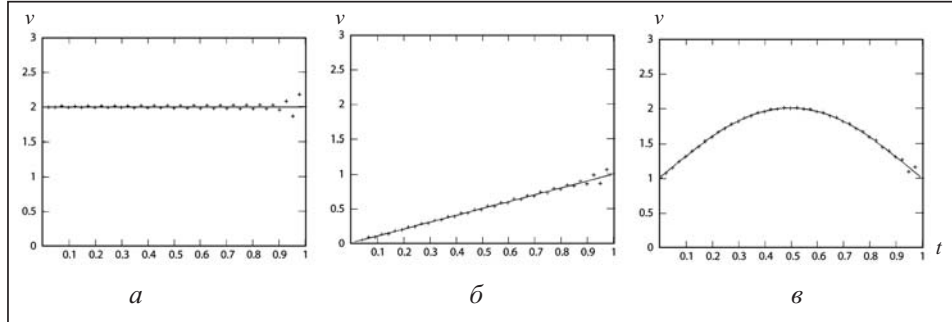


Рис. 2

В работе [29] рассмотрена задача идентификации коэффициента диффузии D_{intra} микрочастиц нанопористой среды. Здесь состояние для m -й составляющей слоистой среды описывается начально-краевой задачей

$$\frac{\partial q_m(t, r, z)}{\partial t} = D_{\text{intra}_m} \left(\frac{\partial^2 q_m}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial q_m}{\partial r} \right), \quad r \in (0, R), \quad (t, z) \in \Omega_{mT},$$

$$\frac{\partial q_m}{\partial r} \Big|_{r=0} = 0, \quad (t, z) \in \Omega_{mT}, \quad q_m \Big|_{r=R} = k_m c_m(t, z), \quad (t, z) \in \Omega_{mT},$$

$$q \Big|_{t=0} = 0, \quad r \in (0, R), \quad z \in \Omega_m, \quad m = \overline{1, M},$$

где M — количество слоев Ω_m слоистой среды, q_m, c_m — концентрация вещества соответственно в сорбированном виде и в жидкости в m -слое, R — диаметр сферических микрочастиц, составляющих матрицу нанопористой составной пластины, k_m — некоторый параметр, $\Omega_{mT} = \Omega_m \times (0, T)$.

Сопряженная задача имеет вид

$$r^2 \frac{\partial \psi_m}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 D_{\text{intra}_m}^n \frac{\partial \psi_m}{\partial r} \right) = (q_m(D_{\text{intra}_m}^n; t, R/2, z) - g_m(t)) \delta(r - R/2),$$

$$r \in (0, R), \quad (t, z) \in \Omega_{mT},$$

$$\frac{\partial \psi_m}{\partial r} \Big|_{r=0} = 0, \quad \psi_m \Big|_{r=R} = 0, \quad (t, z) \in \Omega_{mT},$$

$$\psi_m(t, r) \Big|_{t=T} = 0, \quad r \in (0, R).$$

Для идентификации изменяющегося во времени коэффициента диффузии $D_{\text{intra}} = D_{\text{intra}}(t)$ градиент имеет вид

$$J'_{u_n} = \int_0^R \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial q_m}{\partial r} \right) \psi_m dr, \quad t \in (0, T).$$

Вторая серия экспериментов состояла в том, что для расчетов временной отрезок диффузии был разбит на пять равномерных интервалов по 200 с. На каж-

дом элементарном временном отрезке коэффициент D_{intra} предполагался постоянным. В этом случае для каждого элементарного временного отрезка $[t_j, t_{j+1}]$ имеем

$$J'_{u_n} = \int_{t_j}^{t_{j+1}} \int_0^R \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial q_m}{\partial r} \right) dr dt.$$

На рис. 3 сплошной линией отображены результаты идентификации коэффициента диффузии D_{intra} , зависящего от времени, а маркером Δ отмечены полученные численные значения восстанавливаемого этого же коэффициента D_{intra} в предположении, что он постоянный на каждом элементарном временном отрезке $[t_j, t_{j+1}]$.

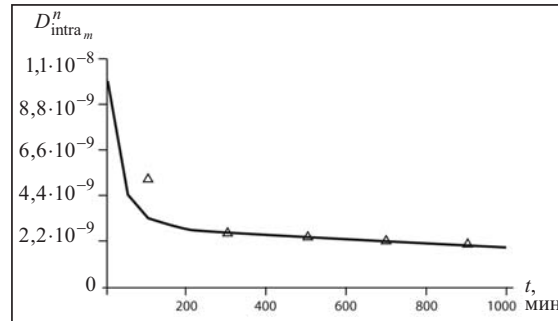


Рис. 3

При решении практических задач, например продления ресурса сложных сооружений, поскольку в некоторых случаях несложно проводить наблюдения за изменением давлений, напряжений, мощностей тепловых потоков, целесообразно эти данные использовать для построения эффективных вычислительных алгоритмов идентификации параметров исследуемых объектов. В работе [30] рассмотрены вопросы оптимального управления и идентификации параметров при наблюдениях за мощностями тепловых потоков эллиптической системы.

Пусть в задаче теплопроводности

$$\begin{aligned} \frac{\partial y}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(u(x, t) \frac{\partial y}{\partial x} \right) + f(x, t), \quad (x, t) \in \Omega_T, \\ -u \frac{\partial y}{\partial x} &= -\alpha y + \beta, \quad x = 0, \quad t \in (0, T), \end{aligned} \quad (32)$$

$$u \frac{\partial y}{\partial x} = \beta_1, \quad x = l, \quad t \in (0, T), \quad y(x, 0) = y_0(x), \quad x \in \Omega = (0, l),$$

коэффициент теплопроводности неизвестен. Предположим, что при $x = l$ известно решение этой задачи, а на $\Omega_0 \subset \Omega$ известна мощность теплового потока:

$$y(l, x) = f_0(t), \quad u \frac{\partial y}{\partial x} \Big|_{\Omega_0} = f_1(x, t) \Big|_{\Omega_0}, \quad t \in (0, T). \quad (33)$$

Функционал-невязка имеет вид

$$J(u) = \frac{1}{2} \left(\int_0^T (y(u; l, t) - f_0(t))^2 dt + \int_0^T \int_{\Omega_0} \left(u \frac{\partial y(u)}{\partial x} - f_1(x, t) \right)^2 dx dt \right). \quad (34)$$

Сопряженная задача состоит в определении функции $\psi(x, t) \in W(0, T)$, которая $\forall z(x) \in V_0$ удовлетворяет равенствам

$$\begin{aligned} - \left(\frac{\partial \psi}{\partial t}, z \right) + a(u_n; \psi, z) &= (y(u_n; l, t) - f_0(t)) z(l) + \\ &+ \int_{\Omega_0} \left(u_n \frac{\partial y(u_n)}{\partial x} - f_1 \right) u_n \frac{\partial z}{\partial x} dx, \quad t \in (0, T), \end{aligned}$$

$$\psi|_{t=T} = 0, \quad x \in \Omega.$$

Пусть решение $u(x, t)$ задачи (32), (34) ищется в виде

$$u = u_m(x, t) = \sum_{i=1}^m \alpha_i(t) \varphi_i(x) > 0,$$

где $\{\varphi_i(x)\}_{i=1}^m$ — система известных линейно независимых функций на Ω , $\alpha_i = \alpha_i(t)$, $i=1, m$, — неизвестные функции. Тогда для приближения $\tilde{\psi}_n$ градиента J'_{u_n} получаем выражения

$$\tilde{\psi}_n = \{\tilde{\psi}_n^i\}_{i=1}^m,$$

$$\tilde{\psi}_n^i = \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial x} \left(\varphi_i(x) \frac{\partial y(u_n)}{\partial x} \right) \psi dx + \varphi_i \frac{\partial y(u_n)}{\partial x} \psi \Big|_{x=0} - \varphi_i \frac{\partial y(u_n)}{\partial x} \psi \Big|_{x=l},$$

$$\|J'_{u_n}\|^2 \approx \sum_{i=1}^m \int_0^T (\tilde{\psi}_n^i)^2 dt.$$

Замечание 2. Если $\mathcal{U} = C_+([0, T]) = \{v(t) \in C([0, T]): v > 0\}$, то

$$\tilde{\psi}_n = \int_{\Omega} \frac{\partial^2 y(u_n)}{\partial x^2} \psi dx + \frac{\partial y(u_n)}{\partial x} \psi \Big|_{x=0} - \frac{\partial y(u_n)}{\partial x} \psi \Big|_{x=l}, \quad \|J'_{u_n}\|^2 \approx \int_0^T \tilde{\psi}_n^2 dt.$$

Замечание 3. Если $u = u(t) = u_n(t) = \sum_{i=1}^m \alpha_i \varphi_i(t) > 0$, то $\tilde{\psi}_n = \{\tilde{\psi}_n^i\}_{i=1}^m$,

$$\tilde{\psi}_n^i = \int_0^T \varphi_i(t) \left(\int_{\Omega} \frac{\partial^2 y(u_n)}{\partial x^2} \psi dx + \frac{\partial y(u_n)}{\partial x} \psi \Big|_{x=0} - \frac{\partial y(u_n)}{\partial x} \psi \Big|_{x=l} \right) dt,$$

$$\|J'_{u_n}\|^2 \approx \sum_{i=1}^m (\tilde{\psi}_n^i)^2.$$

Замечание 4. Если $\mathcal{U} = R_+ = (0, +\infty)$, то

$$\tilde{\psi}_n = \int_0^T \int_{\Omega} \frac{\partial^2 y(u_n)}{\partial x^2} \psi dx dt + \int_0^T \left(\frac{\partial y(u_n)}{\partial x} \psi \Big|_{x=0} - \frac{\partial y(u_n)}{\partial x} \psi \Big|_{x=l} \right) dt, \quad \|J'_{u_n}\| \approx |\tilde{\psi}_n|.$$

Замечание 5. Если идентификация коэффициента теплопроводности пластины проводится на основе слабой задачи ее состояния, то при $u = u(x) \in \mathcal{U} = C_+(\Omega)$ имеем

$$\tilde{\psi}_n = - \int_0^T \frac{\partial y(u_n)}{\partial x} \frac{\partial \psi}{\partial x} dt, \quad \|J'_{u_n}\|^2 \approx \int_{\Omega} (\tilde{\psi}_n(x))^2 dx.$$

Если $u = u(t) \in \mathcal{U} = C_+([0, T])$, то $\tilde{\psi}_n = - \int_{\Omega} \frac{\partial y(u_n)}{\partial x} \frac{\partial \psi}{\partial x} dx$, $\|J'_{u_n}\|^2 \approx \int_0^T \tilde{\psi}_n^2 dt$.

Если $\mathcal{U} = R_+$, то $\tilde{\psi}_n = - \int_0^T \int_{\Omega} \frac{\partial y(u_n)}{\partial x} \frac{\partial \psi}{\partial x} dx dt$, $\|J'_{u_n}\|^2 \approx |\tilde{\psi}_n|$.

В работах [31–33] исследованы вопросы использования псевдообратных матриц для идентификации за конечное число арифметических действий некоторых параметров эллиптических, параболических многокомпонентных распределенных систем, а также задач теплопроводности составных тел.

Рассматривая задачу восстановления плотности теплового потока $u(t)$ на внешней стороне пластины толщины b с известным распределением температуры на противоположной ее стороне и заданным на ней условием Фурье, имеем задачу идентификации

$$\begin{aligned} \frac{\partial y}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(k(x) \frac{\partial y}{\partial x} \right) + \tilde{f}(x, t), \quad (x, t) \in \Omega_T, \\ \Omega_T &= \Omega \times (0, T), \quad \Omega = (0, b), \\ -k \frac{\partial y}{\partial x} &= -\alpha y + \beta, \quad x = 0, \quad t \in (0, T), \\ k \frac{\partial y}{\partial x} &= u(t), \quad x = b, \quad t \in (0, T), \\ y(x, 0) &= y_0(x), \quad x \in \Omega, \end{aligned} \quad (35)$$

где в точке $x = 0$ при $t \in (0, T)$ известна температура

$$y(0, t) = \tilde{f}_0(t). \quad (36)$$

Пусть

$$u = u_m(t) = \sum_{l=1}^m \bar{u}_l \bar{\varphi}_l(t), \quad u_m \in \mathcal{U}_m \subset \mathcal{U}, \quad \bar{u}_l \in R, \quad l = \overline{1, m}. \quad (37)$$

В силу линейности задачи (35) ее решение $y(u_m; x, t)$ представляется в виде

$$y(u_m; x, t) = \sum_{l=1}^m \bar{u}_l y(\bar{\varphi}_l; x, t) + \tilde{y}_0(x, t) = \sum_{l=1}^m \bar{u}_l y_l(x, t) + \tilde{y}_0(x, t), \quad (37')$$

где $\tilde{y}_0(x, t)$ — решение задачи (35) при $u = 0$.

При каждом фиксированном l каждую задачу (по нахождению решений $y_l(x, t)$) решаем с помощью МКЭ, т.е.

$$y_l(x, t) = y_{ln}(x, t) = \sum_{i=1}^n \alpha_i^l(t) \varphi_i(x). \quad (38)$$

С учетом (38) для определения векторов $\alpha^l(t) = (\alpha_1^l(t), \dots, \alpha_n^l(t))^T$ имеем задачу Коши

$$M\dot{\alpha}^l(t) + K\alpha^l(t) = f^l(t), \quad l = \overline{1, m}, \quad \alpha^l(0) = 0. \quad (39)$$

Следовательно, единственное приближенное решение представляется в виде

$$y_n^m(x, t) = y_n(u_m; x, t) = \sum_{l=1}^m \bar{u}_l y^l(x, t),$$

где $y^l(x, t) = y_{ln}(x, t) = \sum_{i=1}^n \alpha_i^l(t) \varphi_i(x)$. Справедливо следующее утверждение.

Теорема 1. Пусть классические решения $y_l(x, t)$ принадлежат классу $C^{k+1,1}(\Omega_T)$. Тогда имеет место оценка

$$\|Au_m - \bar{A}u_m\|_{L_2(0,T)} \leq ch^k,$$

где $c = \text{const} > 0$, h — наибольшая из длин всех элементарных отрезков МКЭ, k — степень полиномов МКЭ. Здесь

$$\bar{A}u_m = \sum_{l=1}^m \bar{u}_l y^l(0, t) \approx Au_m = f_0, \quad t \in (0, T). \quad (40)$$

Решив задачи Коши (39) с помощью одного из численных методов, получим дискретное приближение $\overline{A}^j u_m$, $j = \overline{1, M}$, оператора $Au_m(t_j)$, где $M + 1$ — количество точек t_j дискретизации отрезка $[0, T]$,

$$\overline{A}^j u_m = \sum_{l=1}^m y^l(0, t_j) \overline{u}_l = f_0(t_j), \quad j = \overline{1, M},$$

или

$$A\overline{u} = f, \quad (41)$$

где $A \in \mathbb{R}^{M \times m}$ — прямоугольная матрица, $A = \{a_{ij}\}_{i=1, j=1}^{M, n}$, $a_{ij} = y^j(0, t_i)$, $f = \{f^i\}_{i=1}^M$, $f^i = f_0(t_i)$, $t_i \in (0, T]$, $t_M = T$.

Следовательно, задачи идентификации (35), (36) сведены к решению системы алгебраических уравнений (41) в общем случае с прямоугольной матрицей A .

ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ СОСТОЯНИЯМИ МНОГОКОМПОНЕНТНЫХ РАСПРЕДЕЛЕННЫХ СИСТЕМ

В работах [7–10] рассмотрены различные возможности оптимального управления внутренними источниками, параметрами краевых условий, параметрами условий сопряжения, начальными условиями разнообразных многокомпонентных распределенных систем при различных наблюдениях за состояниями систем (по всему многокомпонентному телу, на части или по всей его поверхности, тонких включениях, отдельных его сечениях), в том числе при комбинированных управлениях и наблюдениях. Для всех рассмотренных случаев доказаны теоремы существования и единственности оптимального управления состояниями систем с квадратичными функционалами качества, т.е. доказаны теоремы существования и единственности элемента $u \in \mathcal{U}_\partial \subset \mathcal{U}$, удовлетворяющего условию

$$J(u) = \inf_{v \in \mathcal{U}_\partial} J(v),$$

где \mathcal{U} — пространство управлений, \mathcal{U}_∂ — выпуклое замкнутое множество допустимых управлений.

$$J(v) = \|Cy(v) - z_g\|_{\mathcal{H}}^2 + (\mathcal{N}u, u)_{\mathcal{U}}, \quad (42)$$

\mathcal{H} — некоторое гильбертово пространство, z_g — заданный элемент пространства \mathcal{H} , $z(v) = Cy(v)$ — наблюдение, $y(v) \in V$ — решение задачи состояния системы при заданном управлении $v \in \mathcal{U}$, $C \in L(V; \mathcal{H})$, $(\mathcal{N}u, u)_{\mathcal{U}} \geq \nu_0 \|u\|_{\mathcal{U}}^2$, $\nu_0 = \text{const} > 0$.

Вопросы оптимального управления с квадратичными функционалами стоимости вида (42) исследованы для следующих классов многокомпонентных распределенных систем: эллиптических (в том числе условно корректных), параболических, эллиптико-параболических, псевдопараболических, гиперболических, псевдогиперболических, систем упругого деформирования (условно стационарного и динамического) многокомпонентных тел, квазистатического деформирования многокомпонентных тел, динамического вязкоупругого деформирования состояний тел, прогибов составных стержневых систем (в том числе с одним и двумя степенями свободы), прогибов составных тонких пластин (в том числе при условиях многозначности обратного оператора состояния и динамических прогибов), термоупругого деформирования тел (в том числе при условии задания температурного состояния условно корректной задачей Неймана и условиях неединственного определения деформированного состояния составного тела) и др.

Для всех рассмотренных случаев получены необходимые и достаточные условия того, чтобы элемент $u \in \mathcal{U}_\partial$ был оптимальным управлением состояния конкретной задачи, которое определяется прямой задачей состояния, соответ-

ствующей сопряженной задачей и неравенством

$$(Cy(u) - z_g, Cy(v) - Cy(u))_{\mathcal{H}} + (\mathcal{N}u, v - u)_{\mathcal{U}} \geq 0 \quad \forall v \in \mathcal{U}_{\partial}. \quad (43)$$

Это неравенство в случае $\mathcal{U}_{\partial} = \mathcal{U}$ приобретает форму равенства, что позволяет решить задачу определения оптимального управления путем решения соответствующей краевой или начально-краевой задачи для системы уравнений в частных производных с разрывным решением, порожденной задачей состояния и соответствующей сопряженной задачей.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В настоящей работе приведены новые классы математических моделей с условиями сопряжения; получены классы обобщенных задач, определенных на классах разрывных функций; разработана методика построения алгоритмов повышенного порядка точности дискретизации задач, основанная на использовании классов разрывных функций МКЭ. С учетом представленной теории оптимального управления создана методика построения явных выражений градиентов функционалов-невязок для идентификации градиентными методами различных параметров рассмотренных математических моделей. Эти результаты представляют новую теоретическую платформу для разработки информационных технологий, имеющих элементы самонастраивания на исследуемый объект для решения достаточно широкого класса практических задач в сложных пространственных объектах. В настоящее время данная платформа реализована в информационной технологии НАДРА-3D, функционирующей на комплексе PENTIUM-СКИТ Института кибернетики имени В.М. Глушкова НАН Украины. С использованием НАДРА-3D решены некоторые сложные практические задачи.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Дейнека В.С. Численное решение краевой задачи, допускающей разрыв решения // Докл. АН УССР. Сер. А. — 1982. — № 11. — С. 28–31.
2. Сергиенко И.В., Скопецкий В.В., Дейнека В.С. Математическое моделирование и исследование процессов в неоднородных средах. — Киев: Наук. думка, 1991. — 432 с.
3. Дейнека В.С., Сергиенко И.В., Скопецкий В.В. Математические модели и методы расчета задач с разрывными решениями. — Киев: Наук. думка, 1995. — 262 с.
4. Дейнека В.С., Сергиенко И.В., Скопецкий В.В. Модели и методы решения задач с условиями сопряжения. — Киев: Наук. думка, 1998. — 616 с.
5. Дейнека В.С., Сергиенко И.В. Модели и методы решения задач в неоднородных средах. — Киев: Наук. думка, 2001. — 606 с.
6. Галба Є.Ф. Зважена псевдоінверсія і умовно коректні еліптичні крайові задачі в математичному моделюванні: теорія, математичні моделі, обчислювальні методи: Автореф. дис. ... д-ра фіз.-мат. наук. — Київ: Ін-т кібернетики ім. В.М. Глушкова НАН України, 2001. — 34 с.
7. Дейнека В.С., Сергиенко И.В. Анализ многокомпонентных распределенных систем и оптимальное управление. — Киев: Наук. думка, 2007. — 703 с.
8. Дейнека В.С. Оптимальное управление эллиптическими многокомпонентными распределенными системами. — Киев: Наук. думка, 2005. — 364 с.
9. Дейнека В.С., Сергиенко И.В. Оптимальное управление неоднородными распределенными системами. — Киев: Наук. думка, 2003. — 506 с.
10. Sergienko I.V., Deineka V.S. Optimal control of distributed systems with conjugation conditions. — New York: Kluwer Acad. Publ., 2005. — 400 p.
11. Сергиенко И.В., Дейнека В.С. Высокоточные вычислительные алгоритмы исследования псевдопараболических распределенных систем с условиями сопряжения // Доп. НАН України. — 2003. — № 7. — С. 73–81.
12. Дейнека І.В. Математичні моделі та обчислювальні методи аналізу багатоконпонентних псевдопараболічних систем: Автореф. дис. ... канд. фіз.-мат. наук. — Київ: Ін-т кібернетики ім. В.М. Глушкова НАНУ, 2007. — 21 с.

13. Дейнека В.С. Определение разрывных характеристик продольных колебаний составных стержней // Докл. АН УССР. Сер. А. — 1989. — № 9. — С. 8-11.
14. Сергиенко И.В., Дейнека В.С. Моделирование процессов, описываемых эллипτικο-параболическими системами с условиями сопряжения // Проблемы управления и информатики. — 2000. — № 3. — С. 57-75.
15. Сергієнко І.В., Дейнека В.С. Високоточні алгоритми розв'язання спектральних задач з власними значеннями в умовах спряження та в крайових умовах // Доп. НАН України. — 2001. — № 2. — С. 74-80.
16. Сергиенко И.В., Дейнека В.С. О численном решении спектральной задачи исследования устойчивости и собственных колебаний составных стержней // Прикл. механика. — 2002. — 38, № 11. — С. 124-132.
17. Дейнека В.С. Идентификация параметров задачи термоупругости состояния поллой сферы // Компьютер. математика. — 2010. — № 1. — С. 18-28.
18. Дейнека В.С., Аралова А.А. Оптимальное управление термонапряженным состоянием полого длинного цилиндра // Доп. НАН України. — 2012. — № 5. — С. 38-42.
19. Алифанов О.М., Артюхин Е.А., Румянцев С.В. Экстремальные методы решения некорректных задач. — М.: Наука, 1988. — 288 с.
20. Экланд И., Темам Р. Выпуклый анализ и вариационные проблемы. — М.: Мир, 1979. — 400 с.
21. Сергиенко И.В., Дейнека В.С. Системный анализ многокомпонентных распределенных систем. — Киев: Наук. думка, 2009. — 640 с.
22. Сергиенко И.В., Дейнека В.С. Решение граничных обратных задач для параболических многокомпонентных распределенных систем // Кибернетика и системный анализ. — 2007. — № 4. — С. 49-73.
23. Сергиенко И.В., Дейнека В.С. Решение комплексных обратных задач для эллипτικο-параболических многокомпонентных распределенных систем // Проблемы управления и информатики. — 2008. — № 3. — С. 74-99.
24. Сергиенко И.В., Дейнека В.С. Решение комплексных обратных задач для гиперболических многокомпонентных распределенных систем // Кибернетика и системный анализ. — 2008. — № 2. — С. 55-80.
25. Сергиенко И.В., Дейнека В.С. Решение комплексных обратных задач для псевдогиперболических многокомпонентных распределенных систем // Проблемы управления и информатики. — 2008. — № 1. — С. 54-78.
26. Сергиенко И.В., Дейнека В.С. Идентификация параметров задачи о напряженно-деформированном состоянии многокомпонентного упругого тела с включением // Прикл. механика. — 2010. — 46, № 4. — С. 14-24.
27. Сергиенко И.В., Дейнека В.С. Идентификация параметров квазистационарных задач термоупругости // Кибернетика и системный анализ. — 2010. — № 2. — С. 59-80.
28. Дейнека В.С., Вещунова Н.А. Численное решение обратных задач нестационарной теплопроводности для пластин // Компьютер. математика. — 2008. — № 2. — С. 32-43.
29. Дейнека В.С., Петрик М.Р., Михалик Д.М. Функциональная идентификация коэффициентов внутрйчастичной диффузии в неоднородном слое нанопористых частиц // Проблемы управления и информатики. — 2012. — № 1. — С. 27-39.
30. Сергиенко И.В., Дейнека В.С. Оптимальное управление эллиптической системой и идентификация ее параметров при наблюдениях за производными решения // Там же. — 2012. — № 5. — С. 80-101.
31. Сергиенко И.В., Дейнека В.С. Решение некоторых обратных задач теплопроводности для составной пластины с использованием псевдообратных матриц // Доп. НАН України. — 2011. — № 12. — С. 29-35.
32. Сергиенко И.В., Дейнека В.С. Численное решение некоторых обратных задач теплопроводности для эллиптических систем с использованием псевдообратных матриц // Проблемы управления и информатики. — 2011. — № 4. — С. 73-97.
33. Сергиенко И.В., Дейнека В.С. Численное решение некоторых обратных задач нестационарной теплопроводности с использованием псевдообратных матриц // Кибернетика и системный анализ. — 2012. — № 5. — С. 49-70.

Поступила 29.01.2013