УДК 519.8

Т.И. НАСИРОВА, М.Н. МИКАИЛОВ

ИССЛЕДОВАНИЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ СЛУЧАЙНОГО ПРОЦЕССА С ДИФФЕРЕНЦИРОВАННЫМ ПОЛУМАРКОВСКИМ БЛУЖДАНИЕМ С ЗАДЕРЖИВАЮЩИМ ЭКРАНОМ В НУЛЕ

Ключевые слова: *полумарковские процессы, дифференцированное блуждание, задерживающий экран, преобразование Лапласа, эрланговское распределение.*

ВВЕДЕНИЕ

Распределению случайного процесса и его основным граничным функционалам посвящено много публикаций. При решении этой задачи были использованы асимптотические методы, факторизационные методы и т.д. (например, [1–3]). В данной статье, сузив класс распределения блуждания, найден явный вид преобразования Лапласа по времени, преобразования Лапласа–Стильтьеса по фазе условного, безусловного распределений и преобразования Лапласа–Стильтьеса эргодического распределения процесса с дифференцированным полумарковским блужданием с задерживающим экраном в нуле.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Пусть на вероятностном пространстве $(\Omega, F, P(\bullet))$ задана четырехмерная последовательность $\{\xi_k^+, \eta_k^+, \xi_k^-, \eta_k^-\}_{k=1}^{\infty}$ — одинаково распределенных и независимых между собой положительных случайных величин ξ_k^+, η_k^+, ξ_k^-, η_k^-, $k=\overline{1,\infty}$.

Используя эти случайные величины, построим следующие процессы:

$$X^+(t)=\sum_{i=1}^{k-1}\eta_i^+,\ \text{если}\ \sum_{i=1}^{k-1}\xi_i^+\le t<\sum_{i=1}^{k}\xi_i^+,\ k=\overline{1,\infty},\ \sum_1^0=0,$$

$$X^-(t)=\sum_{i=1}^{k-1}\eta_i^-,\ \text{если}\ \sum_{i=1}^{k-1}\xi_i^-\le t<\sum_{i=1}^{k}\xi_i^-,\ k=\overline{1,\infty},\ \sum_1^0=0.$$

Представим эти процессы в виде

$$X^+(t)=\sum_{i=1}^{\nu^+(t)}\eta_i^+,\ X^-(t)=\sum_{i=1}^{\nu^-(t)}\eta_i^-,$$

где

$$\nu^+(t)=k,\ \text{если}\ \sum_{i=1}^{k}\xi_i^+\le t<\sum_{i=1}^{k+1}\xi_i^+,$$

$$\nu^-(t)=k,\ \text{если}\ \sum_{i=1}^{k}\xi_i^-\le t<\sum_{i=1}^{k+1}\xi_i^-.$$

Процесс $X_1(t)=X^+(t)-X^-(t)$ назовем процессом с дифференцированным полумарковским блужданием.

Введем обозначения:

$$\tau_k^+ = \sum_{i=1}^{k} \xi_i^+ , \; k = \overline{0, \infty}, \; \tau_0^+ = 0 , \; \tau_k^- = \sum_{i=1}^{k} \xi_i^- , \; k = \overline{0, \infty}, \; \tau_0^- = 0 .$$

Эти случайные величины упорядочим в порядке возрастания. Полученную последовательность обозначим $\{\tau_k\}_{\overline{1,\infty}}$.

Пусть

$$\eta_k = \begin{cases} \eta_i^+ , & \text{если } \tau_k = \tau_i^+ , \\ \eta_i^- , & \text{если } \tau_k = \tau_i^- . \end{cases}$$

Построим следующий процесс:

$$X(t) = \varsigma_k, \text{ если } \; \tau_k \le t < \tau_{k+1}, \; k = \overline{1, \infty}, \text{ причем } \varsigma_0 = z , \; \varsigma_k = \max(0, \varsigma_{k-1} + \eta_k) .$$

Назовем его процессом с дифференцированным полумарковским блужданием с задерживающим экраном в нуле.

Цель статьи — найти явный вид преобразования Лапласа по времени, преобразования Лапласа–Стильтьеса по фазе условного, безусловного распределений и преобразования Лапласа–Стильтьеса эргодического распределения процесса с дифференцированным полумарковским блужданием с задерживающим экраном в нуле.

Обозначим

$$R(t, x| z) = P\{X(t) < x \,|\, X(0) = z\} \;\; , \; t > 0 , \;\; x \ge 0 , \; z \ge 0,$$

$$\widetilde{R}(\theta, x| z) = \int_{t=0}^{\infty} e^{-\theta t} R(t, x| z) dt , \; \theta > 0 ,$$

$$\widetilde{\widetilde{R}}(\theta, \alpha| z) = \int_{x=0}^{\infty} e^{-\alpha x} \widetilde{R}(\theta, x| z)\, dx , \; \alpha > 0 ;$$

$$\varphi_{\eta_1^+}(\alpha) = E e^{-\alpha \eta_1^+} , \; \alpha > 0.$$

ИНТЕГРАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ ДЛЯ $\widetilde{\widetilde{R}}(\theta, \alpha| z)$ И ЕГО РЕШЕНИЕ

Докажем теорему об интегральном представлении $\widetilde{\widetilde{R}}(\theta, \alpha| z)$ и решим полученное интегральное уравнение.

Теорема. Пусть на вероятностном пространстве $(\Omega, F, P(\bullet))$ задана четырехмерная последовательность $\{\xi_k^+, \eta_k^+, \xi_k^-, \eta_k^-\}_{k=1}^{\infty}$ — одинаково распределенных и независимых между собой положительных случайных величин $\xi_k^+, \eta_k^+, \xi_k^-, \eta_k^-$. Предположим, что ξ_1^+ имеет экспоненциальное распределение. Преобразование $\widetilde{\widetilde{R}}(\theta, \alpha| z)$ удовлетворяет следующему интегральному уравнению:

$$\widetilde{\widetilde{R}}(\theta, \alpha| z) = e^{-\alpha z} \int_{t=0}^{\infty} e^{-\theta t} P\{\xi_1^+ > t\} P\{\xi_1^- > t\}\, dt +$$

$$+ e^{-\alpha z} \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_{\eta_1^+}^k(\alpha) \int_{t=0}^{\infty} e^{-\theta t} P\{\nu^+(t) = k\} P\{\xi_1^- > t\}\, dt +$$

$$+\tilde{\tilde{R}}(\theta,\alpha|\,0)P\{\eta_1^- > z\}\int\limits_{t=0}^{\infty} e^{-\theta t} P\{\xi_1^+ > t\}\, P\{\xi_1^- < t\}dt +$$

$$+\int\limits_{y=0}^{\infty}\tilde{\tilde{R}}(\theta,\alpha|\,y)\int\limits_{t=0}^{\infty} e^{-\theta t} P\{\xi_1^+ > t\}dP\{\xi_1^- < t\}d_y P\{\eta_1^- > z-y\}+$$

$$+\tilde{\tilde{R}}(\theta,\alpha|0)\sum_{k=1}^{\infty}\int\limits_{t=0}^{\infty} e^{-\theta\, t} P\{\nu^+(t)=k\}dP\{\xi_1^- < t\}\, P\left\{\sum_{i=1}^{k}\eta_1^+ - \eta_1^- < -z\right\}+$$

$$+\int\limits_{y=0}^{\infty}\tilde{\tilde{R}}(\theta,\alpha|\,y)\sum_{k=1}^{\infty}\int\limits_{t=0}^{\infty} e^{-\theta\, t} P\{\nu^+(t)=k\}dP\{\xi_1^- < t\}d_y P\left\{\sum_{i=1}^{k}\eta_1^+ - \eta_1^- < y-z\right\}.$$

Доказательство. По формуле полной вероятности имеем

$$P\{X(t)< x|\,X(0)=z\} = P\{X(t)< x,\, \xi_1^- > t|\,X(0)=z\}+$$

$$+\int\limits_{y=0}^{\infty}\int\limits_{s=0}^{t} P\{\,\xi_1^- \in ds;\, X(s)\in dy|\,X(0)=z\}\, P\{X(t-s)< x\,|\,X(0)=y\} =$$

$$= P\{z + X^+(t) < x,\, \xi_i^- > t\}+$$

$$+\int\limits_{y=0}^{\infty}\int\limits_{s=0}^{t} P\{X(t-s)< x\,|\,X(0)=y\}\, P\{\max\{0,\, z+X^+(s)-\eta_1^-\}< y\}\, dP\{\xi_1^- < s\}.$$

Обе части последнего уравнения умножим на $e^{-\theta t}$ и проинтегрируем от нуля до бесконечности:

$$\tilde{R}(\theta, x|\,z) = \int\limits_{t=0}^{\infty} e^{-\theta t} P\{z+X^+(t)< x\}\, P\{\xi_1^- > t\}dt +$$

$$+\int\limits_{y=0}^{\infty}\tilde{R}(\theta, x|\,y)\, d_y \int\limits_{t=0}^{\infty} e^{-\theta t} P\{\max\{0,\, z+X^+(t)-\eta_1^-\}< y\}dP\{\xi_1^- < t\}.$$

Первое слагаемое упростим:

$$\int\limits_{t=0}^{\infty} e^{-\theta\, t} P\{z+X^+(t)< x\}\, P\{\xi_1^- > t\}\, dt =$$

$$= \int\limits_{t=0}^{\infty} e^{-\theta\, t} P\left\{ z + \sum_{i=1}^{\nu^+(t)} \eta_i^+ < x\right\} P\{\xi_1^- > t\}dt =$$

$$= \int\limits_{t=0}^{\infty} e^{-\theta\, t} \sum_{k=0}^{\infty} P\left\{ z + \sum_{i=1}^{k} \eta_i^+ < x,\ \nu^+(t)=k\right\} P\{\xi_1^- > t\}\, dt =$$

$$= \int\limits_{t=0}^{\infty} e^{-\theta t} P\{z< x, \nu^+(t)=0\} P\{\xi_1^- > t\}\, dt +$$

$$+\int_{t=0}^{\infty} e^{-\theta t}\sum_{k=1}^{\infty} P\left\{z+\sum_{i=1}^{k}\eta_i^+ < x, \nu^+(t)=k\right\} P\{\xi_1^- > t\}\,dt =$$

$$=\varepsilon(x-z)\int_{t=0}^{\infty} e^{-\theta t} P\{\xi_1^+ > t\} P\{\xi_1^+ > t\}\,dt +$$

$$+\int_{t=0}^{\infty} e^{-\theta t}\sum_{k=1}^{\infty} P\left\{\sum_{i=1}^{k}\eta_i^+ < x-z\right\} P\{\nu^+(t)=k\} P\{\xi_1^- > t\}\,dt .$$

Тогда последнее уравнение можно записать также в виде

$$\widetilde{R}(\theta, x\,|\,z)=\varepsilon(x-z)\int_{t=0}^{\infty} e^{-\theta t} P\{\xi_1^- > t\} P\{\xi_1^+ > t\}\,dt +$$

$$+\int_{t=0}^{\infty} e^{-\theta t}\sum_{k=1}^{\infty} P\left\{\sum_{i=1}^{k}\eta_i^+ < x-z\right\} P\{\xi_1^- > t\} P\{\nu^+(t)=k\}\,dt +$$

$$+\int_{y=0}^{\infty} \widetilde{R}(\theta, x\,|\,y)\,d_y \int_{t=0}^{\infty} e^{-\theta t} P\{\max(0, z-\eta_1^-) < y\} P\{\xi_1^+ > t\}\,dP\{\xi_1^- < t\} +$$

$$+\int_{y=0}^{\infty} \widetilde{R}(\theta, x\,|\,y)\,d_y \sum_{k=1}^{\infty}\int_{t=0}^{\infty} e^{-\theta t} P\left\{\max\left\{0, z+\sum_{i=1}^{k}\eta_1^+ - \eta_1^-\right\} < y\right\} P\{\nu^+(t)=k\}\,dP\{\xi_1^- < t\}.$$

В силу того, что $P\{\max(0, z-\eta_1^-) < y\} = \varepsilon(y) P\{\eta_1^- < z-y\}$, с учетом обозначений

$$\widetilde{R}(\theta, \alpha\,|\,z)=\int_{0}^{\infty} e^{-\alpha x} d_x \widetilde{R}(\theta, x\,|\,z),\ \alpha > 0 ,$$

получим

$$\widetilde{\widetilde{R}}(\theta, \alpha\,|\,z)=e^{-\alpha z}\int_{t=0}^{\infty} e^{-\theta t} P\{\xi_1^+ > t\} P\{\xi_1^- > t\}\,dt +$$

$$+e^{-\alpha z}\sum_{k=1}^{\infty}\varphi_{\eta_1^+}^k(\alpha)\int_{t=0}^{\infty} e^{-\theta t} P\{\nu^+(t)=k\} P\{\xi_1^- > t\}\,dt +$$

$$+\widetilde{\widetilde{R}}(\theta, \alpha\,|\,0) P\{\eta_1^- > z\}\int_{t=0}^{\infty} e^{-\theta t} P\{\xi_1^+ > t\}\,dP\{\xi_1^- < t\} + \qquad (1)$$

$$+\int_{t=0}^{\infty} \widetilde{\widetilde{R}}(\theta, \alpha\,|\,y)\int_{t=0}^{\infty} e^{-\theta t} P\{\xi_1^+ > t\}\,dP\{\xi_1^- < t\}\,d_y P\{\eta_1^- > z-y\} +$$

$$+\widetilde{\widetilde{R}}(\theta, \alpha\,|\,0)\sum_{k=1}^{\infty}\int_{t=0}^{\infty} e^{-\theta t} P\{\nu^+(t)=k\}\,dP\{\xi_1^- < t\}\, P\left\{\sum_{i=1}^{k}\eta_i^+ - \eta_i^- < -z\right\} +$$

$$+\int_{t=0}^{\infty} \widetilde{\widetilde{R}}(\theta, \alpha\,|\,y)\sum_{k=1}^{\infty}\int_{t=0}^{\infty} e^{-\theta t} P\{\nu^+(t)=k\}\,dP\{\xi_1^- < t\}\,d_y P\left\{\sum_{i=1}^{k}\eta_i^+ - \eta_i^- < y-z\right\}.$$

Теорема доказана.

Уравнение (1) будем решать в случае, когда случайные величины ξ_k^+, η_k^+, ξ_k^-, η_k^-, $k=\overline{1,\infty}$, имеют экспоненциальное распределение с параметрами λ_+, μ_+, λ_-, μ_- соответственно. Однако его можно решить при эрланговском распределении любого порядка, если ξ_k^+ имеет экспоненциальное распределение.

Учитывая, что случайные величины ξ_k^+, η_k^+, ξ_k^-, η_k^-, $k=\overline{1,\infty}$, имеют экспоненциальное распределение с параметрами λ_+, μ_+, λ_- и μ_- соответственно, то уравнение (1) примет следующий вид:

$$\tilde{\tilde{R}}(\theta,\alpha\,|\,z)=e^{-\alpha z}\int_{t=0}^{\infty}e^{-(\lambda_++\lambda_-+\theta)t}dt+$$

$$+e^{-\alpha z}\sum_{k=1}^{\infty}\varphi_{\eta_1^+}^k(\alpha)\int_{t=0}^{\infty}e^{-(\lambda_++\lambda_-+\theta)t}\frac{(\lambda_+t)^k}{k!}dt+$$

$$+\lambda_-e^{-\mu_-z}\tilde{\tilde{R}}(\theta,\alpha\,|\,0)\int_{t=0}^{\infty}e^{-(\lambda_++\lambda_-+\theta)t}dt+$$

$$+\lambda_-\mu_-e^{-\mu_-z}\int_{y=0}^{z}e^{\mu_-y}dt\tilde{\tilde{R}}(\theta,\alpha\,|\,y)d_y\int_{t=0}^{\infty}e^{-(\lambda_++\lambda_-+\theta)t}dt+$$

$$+\lambda_-\tilde{\tilde{R}}(\theta,\alpha\,|\,0)\sum_{k=1}^{\infty}\int_{t=0}^{\infty}e^{-(\lambda_++\lambda_-+\theta)t}\frac{(\lambda_+t)^k}{k!}dt\int_{\gamma=0}^{\infty}P\{\gamma-\eta_1^-<-z\}\,dP\left\{\sum_{i=1}^{k}\eta_i^+<\gamma\right\}+$$

$$+\lambda_-\int_{y=0}^{\infty}\tilde{\tilde{R}}(\theta,\alpha\,|\,y)\sum_{k=1}^{\infty}\int_{t=0}^{\infty}e^{-(\lambda_++\lambda_-+\theta)t}\frac{(\lambda_+t)^k}{k!}dtdy\int_{\gamma=0}^{\infty}P\{\gamma-\eta_1^-<-z\}\,dP\left\{\sum_{i=1}^{k}\eta_i^+<\gamma\right\}.$$

После некоторых выкладок имеем

$$\tilde{\tilde{R}}(\theta,\alpha\,|\,z)=\frac{e^{-\alpha z}}{\lambda_++\lambda_-+\theta}+\frac{1}{\lambda_++\lambda_-+\theta}e^{-\alpha z}\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{\lambda_+\varphi_{\eta_1^+}(\alpha)}{\lambda_++\lambda_-+\theta}\right)^k+$$

$$+\frac{\lambda_-}{\lambda_++\lambda_-+\theta}e^{-\mu_-z}\tilde{\tilde{R}}(\theta,\alpha\,|\,0)+\frac{\lambda_-\mu_-}{\lambda_++\lambda_-+\theta}e^{-\mu_-z}\int_{y=0}^{z}e^{-\mu_-y}\tilde{\tilde{R}}(\theta,\alpha\,|\,y)dy+$$

$$+\frac{\lambda_-}{\lambda_++\lambda_-+\theta}e^{-\mu_-z}\tilde{\tilde{R}}(\theta,\alpha\,|\,0)\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{\lambda_+}{\lambda_++\lambda_-+\theta}\right)^k\int_{\gamma=0}^{z}e^{-(\mu_++\mu_-)\gamma}\mu_+\frac{(\mu_+\gamma)^{k-1}}{(k-1)!}d\gamma+$$

$$+\frac{\lambda_-}{\lambda_++\lambda_-+\theta}\int_{y=0}^{\infty}\tilde{\tilde{R}}(\theta,\alpha\,|\,y)\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{\lambda_+}{\lambda_++\lambda_-+\theta}\right)^k dy\times$$

$$\times\int_{\gamma=0}^{\infty}P\{\eta_1^->\gamma-y+z\}\,\mu_+\frac{(\mu_+\gamma)^{k-1}}{(k-1)!}e^{-\mu_+y}d\gamma.$$

Далее после преобразований получим

$$\tilde{\tilde{R}}(\theta,\alpha|\, z)=\frac{e^{-\alpha z}}{\lambda_{+}+\lambda_{-}+\theta}+\frac{\lambda_{+}\varphi_{\eta_1^+}(\alpha)}{(\lambda_{+}+\lambda_{-}+\theta)[\lambda_{+}+\lambda_{-}+\theta-\lambda_{+}\varphi_{\eta_1^+}(\alpha)]}e^{-\alpha z}+$$

$$+\frac{\lambda_{-}}{\lambda_{+}+\lambda_{-}+\theta}e^{-\mu_{-}z}\tilde{\tilde{R}}(\theta,\alpha|0)+\frac{\lambda_{-}}{\lambda_{+}+\lambda_{-}+\theta}e^{-\mu_{-}z}\int\limits_{y=0}^{\infty}e^{-\mu_{-}y}\tilde{\tilde{R}}(\theta,\alpha|\, y)dy+$$

$$+\frac{\lambda_{-}}{\lambda_{+}+\lambda_{-}+\theta}e^{-\mu_{-}z}\tilde{\tilde{R}}(\theta,\alpha|0)\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{\lambda_{+}\mu_{+}}{\mu_{+}+\mu_{-}}\right)^{k}\frac{1}{(\lambda_{+}+\lambda_{-}+\theta)^{k}}+$$

$$+\frac{\lambda_{-}\mu_{-}}{\lambda_{+}+\lambda_{-}+\theta}\int\limits_{y=0}^{\infty}e^{\mu_{-}y}\tilde{\tilde{R}}(\theta,\alpha|\, y)\times$$

$$\times\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{\lambda_{+}}{\lambda_{+}+\lambda_{-}+\theta}\right)^{k}dy\int\limits_{\gamma=\max(0,\,y-z)}^{\infty}e^{-(\mu_{+}+\mu_{-})\gamma}\frac{\gamma^{k-1}}{(k-1)!}e^{-\mu_{-}z}d\gamma.$$

С учетом того, что

$$\max(0,\, y-z)=\begin{cases}0, & y<z,\\ y-z, & y>z,\end{cases}$$

получим

$$\tilde{\tilde{R}}(\theta,\alpha|\, z)=\frac{e^{-\alpha z}}{\lambda_{+}+\lambda_{-}+\theta}+\frac{\lambda_{+}\varphi_{\eta_1^+}(\alpha)}{(\lambda_{+}+\lambda_{-}+\theta)[\lambda_{+}+\lambda_{-}+\theta-\lambda_{+}\varphi_{\eta_1^+}(\alpha)]}e^{-\alpha z}+$$

$$+\frac{\lambda_{-}}{\lambda_{+}+\lambda_{-}+\theta}e^{-\mu_{-}z}\int\limits_{y=0}^{z}e^{-\mu_{-}y}\tilde{\tilde{R}}(\theta,\alpha|\, y)dy+\frac{\lambda_{-}}{\lambda_{+}+\lambda_{-}+\theta}e^{-\mu_{-}z}\tilde{\tilde{R}}(\theta,\alpha|\,0)+$$

$$+\frac{\lambda_{-}}{\lambda_{+}+\lambda_{-}+\theta}\,\frac{\lambda_{+}\mu_{+}}{\lambda_{+}\mu_{-}+(\lambda_{-}+\theta)(\mu_{+}+\mu_{-})}\,e^{-\mu_{-}z}\tilde{\tilde{R}}(\theta,\alpha|0)-$$

$$-\frac{\lambda_{-}\mu_{-}}{\lambda_{+}+\lambda_{-}+\theta}e^{-\mu_{-}z}\int\limits_{y=0}^{z}e^{\mu_{-}y}\tilde{\tilde{R}}(\theta,\alpha|\, y)\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{\lambda_{+}}{\lambda_{+}+\lambda_{-}+\theta}\right)^{k}dy\times$$

$$\times\int\limits_{y=\max(0,\,y-z)}^{\infty}e^{-(\mu_{+}+\mu_{-})\gamma}\frac{\gamma^{k-1}}{(k-1)!}e^{\mu_{-}z}d\gamma-$$

$$-\frac{\lambda_{-}\mu_{-}}{\lambda_{+}+\lambda_{-}+\theta}e^{-\mu_{-}z}\int\limits_{y=0}^{\infty}e^{\mu_{-}y}\tilde{\tilde{R}}(\theta,\alpha|\, y)\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{\lambda_{+}}{\lambda_{+}+\lambda_{-}+\theta}\right)^{k}dy\times$$

$$\times\int\limits_{y=\max(0,\,y-z)}^{\infty}e^{-(\mu_{+}+\mu_{-})\gamma}\frac{\gamma^{k-1}}{(k-1)!}e^{-\mu_{+}\gamma}d\gamma.$$

Таким образом, получили интегральное уравнение для $\tilde{\tilde{R}}(\theta,\alpha|\, z)$, когда случайные величины ξ_k^{+}, η_k^{+}, ξ_k^{-}, η_k^{-}, $k=\overline{1,\infty}$, имеют экспоненциальное распределение с параметрами λ_{+}, λ_{-}, μ_{+}, μ_{-} соответственно. После некоторых выкладок получим

$$\tilde{\tilde{R}}(\theta,\alpha|\,z)=\frac{e^{-\alpha z}}{\lambda_+ +\lambda_- +\theta}+\frac{\lambda_+\varphi_{\eta_1^+}(\alpha)}{(\lambda_+ +\lambda_- +\theta)[\lambda_+ +\lambda_- +\theta-\lambda_+\varphi_{\eta_1^+}\alpha]}e^{-\alpha z}+$$

$$+\frac{\lambda_-}{\lambda_+ +\lambda_- +\theta}e^{-\mu_- z}\int\limits_{y=0}^{z}e^{-\mu_- y}\tilde{\tilde{R}}(\theta,\alpha|\,y)dy+\frac{\lambda_-}{\lambda_+ +\lambda_- +\theta}e^{-\mu_- z}\tilde{\tilde{R}}(\theta,\alpha|0)+$$

$$+\frac{\lambda_+\lambda_-\mu_+}{\lambda_+ +\lambda_- +\theta}\frac{1}{(\lambda_- +\theta)(\mu_+ +\mu_-)+\lambda_+\mu_-}e^{-\mu_- z}\tilde{\tilde{R}}(\theta,\alpha|\,0)+$$

$$+\frac{\lambda_+\lambda_-\mu_+\mu_-}{\lambda_+ +\lambda_- +\theta}\frac{1}{(\lambda_+ +\lambda_- +\theta)(\mu_+ +\mu_-)-\lambda_+\mu_+}e^{-\mu_- z}\int\limits_{y=0}^{z}e^{\mu_- y}\tilde{\tilde{R}}(\theta,\alpha|\,y)dy+$$

$$+\frac{\lambda_+\lambda_-\mu_+\mu_-}{\lambda_+ +\lambda_- +\theta}\frac{1}{(\lambda_+ +\lambda_- +\theta)(\mu_+ +\mu_-)-\lambda_+\mu_+}e^{\frac{(\lambda_- +\theta)\mu_+}{\lambda_+ +\lambda_- +\theta}z}\times$$

$$\times\int\limits_{y=0}^{\infty}e^{-\frac{(\lambda_- +\theta)\mu_+}{\lambda_+ +\lambda_- +\theta}y}\tilde{\tilde{R}}(\theta,\alpha|\,y)\,dy\,.$$

Учитывая, что $\varphi_{\eta_1^+}=Ee^{-\alpha\eta_1^+}=\frac{\mu_+}{\alpha+\mu_+}$, получаем интегральное уравнение для $\tilde{\tilde{R}}(\theta,\alpha|\,z)$ в случае экспоненциально-распределенных случайных величин ξ_k^+, η_k^+, ξ_k^-, η_k^-, $k=\overline{1,\infty}$, с параметрами λ_+, λ_-, μ_+, μ_- соответственно:

$$\tilde{\tilde{R}}(\theta,\alpha|\,z)=\frac{\alpha+\mu_+}{(\lambda_+ +\lambda_- +\theta)\alpha+(\lambda_- +\theta)\mu_+}e^{-\alpha z}+$$

$$+\frac{\lambda_-(\mu_+ +\mu_-)}{(\lambda_+ +\lambda_- +\theta)\mu_- +(\lambda_- +\theta)\mu_+}e^{-\mu_- z}\tilde{\tilde{R}}(\theta,\alpha|\,0)+$$

$$+\frac{\lambda_-(\mu_+ +\mu_-)}{(\lambda_+ +\lambda_- +\theta)\mu_- +(\lambda_- +\theta)\mu_+}e^{-\mu_- z}\int\limits_{y=0}^{z}e^{-\mu_- y}\tilde{\tilde{R}}(\theta,\alpha|\,y)dy+$$

$$+\frac{\lambda_+\lambda_-\mu_+\mu_-}{\lambda_+ +\lambda_- +\theta}\frac{1}{(\lambda_- +\theta)(\mu_+ +\mu_-)+\lambda_+\mu_-}+ \tag{2}$$

$$+\frac{\lambda_+\lambda_-\mu_+}{\lambda_+ +\lambda_- +\theta}\frac{1}{(\lambda_- +\theta)(\mu_+ +\mu_-)+\lambda_+\mu_-}e^{\frac{(\lambda_- +\theta)\mu_+}{\lambda_+ +\lambda_- +\theta}z}\int\limits_{y=0}^{\infty}e^{-\frac{(\lambda_- +\theta)\mu_+}{\lambda_+ +\lambda_- +\theta}y}\tilde{\tilde{R}}(\theta,\alpha|\,y)dy.$$

Из (2) получим дифференциальное уравнение

$$\tilde{\tilde{R}}_z''(\theta,\alpha|\,z)+\frac{(\lambda_+ +\theta)\mu_- -(\lambda_- +\theta)}{\lambda_+ +\lambda_- +\theta}\tilde{\tilde{R}}_z'(\theta,\alpha|\,z)-\frac{\mu_+\mu_-\theta}{\lambda_+ +\lambda_- +\theta}\tilde{\tilde{R}}(\theta,\alpha|\,z)=$$

$$=\frac{(\alpha+\mu_+)(\alpha-\mu_-)}{\lambda_+ +\lambda_- +\theta}e^{-\alpha z} \tag{3}$$

с общим решением

$$\tilde{\tilde{R}}(\theta, \alpha | z) = c_1(\theta)^{k_1(\theta)} + c_2(\theta)^{k_2(\theta)} +$$

$$+ \frac{(\alpha + \mu_+)(\alpha - \mu_-)}{(\lambda_+ + \lambda_- + \theta)(\alpha + k_1(\theta))(\alpha + k_2(\theta))} e^{-\alpha z}, \tag{4}$$

характеристическим уравнением

$$k^2(\theta) + \frac{(\lambda_+ + \theta)\mu_- - (\lambda_- + \theta)}{(\lambda_+ + \lambda_- + \theta)} k(\theta) - \frac{\mu_+ \mu_- \theta}{(\lambda_+ + \lambda_- + \theta)} = 0, \tag{5}$$

где $k_1(\theta)$, $k_2(\theta)$ — корни характеристического уравнения.

Из (2) получим граничные условия

$$\begin{cases} \tilde{\tilde{R}}(\theta, \alpha | z) = \dfrac{\alpha + \mu_+}{(\lambda_+ + \lambda_- + \theta)\alpha + (\lambda_- + \theta)\mu_+} + \\ \qquad + \dfrac{\lambda_-(\mu_+ + \mu_-)}{(\lambda_+ + \lambda_- + \theta)\mu + (\lambda_- + \theta)\mu_+} \tilde{\tilde{R}}(\theta, \alpha | 0) + \\ \qquad + \dfrac{\lambda_+ \lambda_- \mu_+ \mu_-}{\lambda_+ + \lambda_- + \theta} \dfrac{1}{(\lambda_+ + \lambda_- + \theta)\mu_- + (\lambda_- + \theta)\mu_+} \displaystyle\int_{y=0}^{\infty} e^{-\frac{(\lambda_- + \theta)\mu_+}{\lambda_+ + \lambda_- + \theta} y} \tilde{\tilde{R}}(\theta, \alpha | y) dy, \\ \tilde{\tilde{R}}'(\theta, \alpha | 0) = -\dfrac{\alpha(\alpha + \mu_+)}{(\lambda_+ + \lambda_- + \theta)\alpha + (\lambda_- + \theta)\mu_+} - \\ \qquad - \dfrac{\lambda_+ \lambda_- \mu_+ \mu_-}{\lambda_+ + \lambda_- + \theta} \dfrac{1}{(\lambda_+ + \lambda_- + \theta)\mu_- + (\lambda_- + \theta)\mu_+} \tilde{\tilde{R}}(\theta, \alpha | 0) + \\ \qquad + \dfrac{(\lambda_- + \theta)\mu_+}{\lambda_+ + \lambda_- + \theta} \{\tilde{\tilde{R}}(\theta, \alpha | 0) - \dfrac{\alpha + \mu_+}{(\lambda_+ + \lambda_- + \theta)\alpha + (\lambda_- + \theta)\mu_+} - \\ \qquad - \dfrac{\lambda_-(\mu_+ + \mu_-)}{\lambda_+ + \lambda_- + \theta} \tilde{\tilde{R}}(\theta, \alpha | 0)\}. \end{cases} \tag{6}$$

Из (4) и (6) получим систему алгебраических уравнений относительно $c_1(\theta)$, $c_2(\theta)$:

$$\begin{cases} \left\{ (\lambda_+ + \theta)\mu_- + \mu_+ \theta + \dfrac{\lambda_+ \lambda_- \mu_+ \mu_-}{(\lambda_+ + \lambda_- + \theta)k_1(\theta) - (\lambda_+ + \theta)\mu_+} \right\} c_1(\theta) + \\ + \left\{ (\lambda_+ + \theta)\mu_- + \mu_+ \theta + \dfrac{\lambda_+ \lambda_- \mu_+ \mu_-}{(\lambda_+ + \lambda_- + \theta)k_2(\theta) - (\lambda_+ + \theta)\mu_+} \right\} c_2(\theta) = \\ \qquad = \dfrac{\lambda_-}{\lambda_+ + \lambda_- + \theta} \dfrac{(\alpha + \mu_+)(\mu_+ + \mu_-)\alpha}{(\alpha + k_1(\theta))(\alpha + k_2(\theta))}, \\ \{(\lambda_+ + \lambda_- + \theta)k_1(\theta) - \mu_+ \theta\} c_1(\theta) + \{(\lambda_+ + \lambda_- + \theta)k_2(\theta) - \mu_+ \theta\} c_2(\theta) = \\ \qquad = -\dfrac{\lambda_-}{\lambda_+ + \lambda_- + \theta} \dfrac{(\alpha + \mu_+)(\mu_+ + \mu_-)\alpha}{(\alpha + k_1(\theta))(\alpha + k_2(\theta))}. \end{cases} \tag{7}$$

Покажем, что уравнения в (7) линейно зависимы. Правые части этих уравнений являются противоположными величинами. Затем после некоторых выкладок, получим

$$\frac{(\lambda_+ + \lambda_- + \theta)^2}{(\lambda_+ + \lambda_- + \theta)k_1(\theta) - (\lambda_- + \theta)\mu_+} \times$$

$$\times \left\{ k_1^2(\theta) + \frac{(\lambda_+ + \theta)\mu_- - (\lambda_- + \theta)}{(\lambda_+ + \lambda_- + \theta)} k_1(\theta) - \frac{\mu_+ \mu_- \theta}{(\lambda_+ + \lambda_- + \theta)} \right\} c_1(\theta) +$$

$$+ \frac{(\lambda_+ + \lambda_- + \theta)^2}{(\lambda_+ + \lambda_- + \theta)k_2(\theta) - (\lambda_- + \theta)\mu_+} \times$$

$$\times \left\{ k_2^2(\theta) + \frac{(\lambda_+ + \theta)\mu_- - (\lambda_- + \theta)}{(\lambda_+ + \lambda_- + \theta)} k_2(\theta) - \frac{\mu_+ \mu_- \theta}{(\lambda_+ + \lambda_- + \theta)} \right\} c_2(\theta) = 0.$$

С учетом (5) имеем $0 \cdot c_1(\theta) + 0 \cdot c_2(\theta) = 0$. Тогда один из корней системы (7) можем считать равным нулю. Например, пусть $c_2(\theta) = 0$. Из (7) находим $c_1(\theta)$ и подставим его в (4). Получим

$$\tilde{\tilde{R}}(\theta, \alpha | z) = -\frac{\lambda_-}{(\lambda_+ + \lambda_- + \theta)} \frac{\mu_+ + \mu_-}{(\lambda_+ + \lambda_- + \theta)k_1(\theta) - \mu_+ \theta} \frac{(\alpha + \mu_+)\alpha}{(\alpha + k_1(\theta))(\alpha + k_2(\theta))} e^{k_1(\theta)} +$$

$$+ \frac{(\alpha + \mu_+)(\alpha - \mu_-)}{(\lambda_+ + \lambda_- + \theta)(\alpha + k_1(\theta))(\alpha + k_2(\theta))} e^{-\alpha z}. \tag{8}$$

Итак, получено выражение для $\tilde{\tilde{R}}(\theta, \alpha | z)$.

Ввиду того, что $X(0, \omega)$ имеет экспоненциальное распределение с параметром μ_+, можно найти выражение для $\tilde{\tilde{R}}(\theta, \alpha)$.

По формуле полной вероятности имеем

$$\tilde{\tilde{R}}(\theta, \alpha) = \int_{z=0}^{\infty} \tilde{\tilde{R}}(\theta, \alpha | z) dP\{X(0, \omega) < z\} = \mu_+ \int_{z=0}^{\infty} \tilde{\tilde{R}}(\theta, \alpha | z) e^{-\mu_+ z} dz.$$

С учетом (8) находим

$$\tilde{\tilde{R}}(\theta, \alpha) = -\frac{\lambda_- \mu_+^2}{(\lambda_+ + \lambda_- + \theta)} \times$$

$$\times \frac{1}{(\lambda_+ + \lambda_- + \theta)k_1(\theta) - \mu_+ \theta} \frac{(\alpha + \mu_+)(\mu_+ + \mu_-)\alpha}{(\alpha + k_1(\theta))(\alpha + k_2(\theta))} \frac{1}{(k_1(\theta) - \mu_+)^2} +$$

$$+ \frac{\mu_+^2}{(\lambda_+ + \lambda_- + \theta)} \frac{(\alpha + \mu_+)(\alpha - \mu_-)}{(\alpha + k_1(\theta))(\alpha + k_2(\theta))} \frac{1}{(\alpha + \mu_+)^2}. \tag{9}$$

Если $E\xi_1^+ E\eta_1^- > E\xi_1^- E\eta_1^+$ или $\dfrac{\lambda_+}{\lambda_-} < \dfrac{\mu_+}{\mu_-}$ (см. [4, с. 362]), то процесс $X(t)$ будет эргодическим. Тогда можно воспользоваться тауберовой теоремой:

$$\tilde{R}(\alpha) = \lim_{\theta \to 0} \theta \tilde{\tilde{R}}(\theta, \alpha). \tag{10}$$

С использованием (9) и (10) получим преобразование Лапласа–Стильтьеса эргодического распределения процесса $X(t)$:

$$\tilde{R}(\alpha) = -\frac{\lambda_+ \mu_- - \lambda_- \mu_+}{\mu_+} \frac{\alpha + \mu_+}{(\lambda_+ + \lambda_-)\alpha - \lambda_+ \mu_- + \lambda_- \mu_+}.$$

Предел процесса $X(t,\omega)$ при больших значениях t обозначим $\xi(\omega)$. Тогда имеем

$$\widetilde{R}(\alpha) = \int_{x=0}^{\infty} e^{-\alpha x} dP\{\xi(\omega) < x\} = -\frac{\lambda_+\mu_- - \lambda_-\mu_+}{\mu_+} \frac{\alpha + \mu_+}{(\lambda_+ + \lambda_-)\alpha - \lambda_+\mu_- + \lambda_-\mu_+}. \quad (11)$$

Известно, что

$$E\xi(\omega) = -\widetilde{R}'(0), \ D\xi(\omega) = \widetilde{R}''(0) - [\widetilde{R}'(0)]^2.$$

Из (11) находим, что

$$\widetilde{R}'(\alpha) = -\frac{\lambda_+\mu_- - \lambda_-\mu_+}{\mu_+} \frac{-\lambda_+(\mu_+ + \mu_-)}{[(\lambda_+ + \lambda_-)\alpha - \lambda_+\mu_- + \lambda_-\mu_+]^2},$$

$$\widetilde{R}''(\alpha) = \frac{\lambda_+(\lambda_+\mu_- - \lambda_-\mu_+)(\mu_+ + \mu_-)}{\mu_+} \frac{2(\lambda_+ + \lambda_-)}{[(\lambda_+ + \lambda_-)\alpha - \lambda_+\mu_- + \lambda_-\mu_+]^3}.$$

Из последних равенств при $\alpha = 0$ получим

$$E\xi(\omega) = -\frac{\lambda_+(\mu_+ + \mu_-)}{(\lambda_+\mu_- - \lambda_-\mu_+)\mu_+},$$

$$D\xi(\omega) = -\frac{\lambda_+(\mu_+ + \mu_-)}{(\lambda_+\mu_- - \lambda_-\mu_+)^2\mu_+} \frac{\lambda_+(\mu_+ + \mu_-) + 2\lambda_-\mu_+}{\mu_+}.$$

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной статье исследовано распределение процесса с дифференцированным полумарковским блужданием с задерживающим экраном в нуле и найдено математическое ожидание и дисперсия эргодического распределения процесса.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Боровков А.А. Об асимптотике распределений времен первого прохождения // Мат. заметки. — 2004. — **75**, № 3. — С. 350–359.
2. Боровков А.А. Теория вероятностей. — М.: Наука, 2009 — 656 с.
3. Лотов В.И. О достижении высокого уровня случайным блужданием с задержкой в нуле // Сибир. мат. журнал. — 1990. — № 1. — С. 1306–1318.
4. Лотов В.И. Предельные теоремы в одной граничной задаче для случайных блужданий // Там же. — 1999. — № 5. — С 1095–1108.
5. Гихман И.И., Скороход А.В. Теория случайных процессов. Т. 2. — М.: Наука, 1973. — 640 с.

Поступила 07.06.2011
После доработки 27.07.2012