

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ДИНАМИКИ АНОМАЛЬНЫХ МИГРАЦИОННЫХ ПОЛЕЙ В РАМКАХ МОДЕЛИ РАСПРЕДЕЛЕННОГО ПОРЯДКА

Ключевые слова: математическое моделирование, неклассические модели, неравновесная геофильтрация, модель распределенного порядка, системы дифференциальных уравнений, краевые задачи, приближенные решения.

ВВЕДЕНИЕ

В настоящее время повысился интерес к исследованию геомиграционных процессов аномальной природы [1, 2], для которых характерно существенное отклонение от классического закона Фика. Проявляющиеся в сложных горно-геологических условиях локально-неравновесные свойства геомиграционного процесса обусловлены многими причинами, в частности, сложностью пространственно-временной структуры геосреды, ее микронеоднородностью, кавернностью, релаксационными свойствами пористого скелета и насыщающих жидкостей, многофазностью состава, неизотермичностью процессов, влиянием геохимических факторов и т.д. [3]. Отметим, что локально-не равновесные диффузионные процессы имеют место также в высокоэнергетической плазме, при переносе во фрактальных средах и аморфных полупроводниках, полимерах, биологических системах, случайных и разреженных средах.

Попытки теоретического учета эффектов памяти и пространственных корреляций (временная и пространственная нелокальности) в рамках классических математических моделей приводят к интегродифференциальным уравнениям, ядро которых содержит информацию о природе нелокальности процесса. При решении этих уравнений интегральные операторы разлагаются в ряды дифференциальных операторов, имеющих растущие показатели порядка дифференцирования, поэтому данный подход не эффективен при отсутствии надлежащего малого параметра [4]. Используя аппарат интегродифференцирования дробного порядка, в рамках которого удается получить новые важные результаты [1, 2, 5–7], можно достичь эффективности подхода в описании процессов переноса в системах, для которых важен учет нелокальных пространственно-временных свойств.

Геоинформационные задачи, относящиеся к математическому моделированию динамики систем, описывающих различные процессы геофильтрации, массопереноса и массообмена, представляют значительный интерес при разработке современных геотехнологий, а также при изучении вопросов охраны подземных вод от загрязнений в результате воздействия техногенных факторов человеческой деятельности. В частности, информация об особенностях динамики неравновесных геомиграционных процессов играет важную роль при решении задач охраны подземных вод от загрязнений содержимым накопителей промышленных и бытовых стоков. При этом математическое моделирование геомиграционных процессов традиционно развивалось в предположении насыщенности массивов геопористой среды чистой водой, однако в настоящее время в связи с экологическими приложениями особую актуальность приобретают исследования в области математического моделирования динамики геомиграционных процессов в пористых массивах геосреды, насыщенных солевыми растворами. Ведутся

комплексные исследования динамики геомиграции солевых растворов при учете релаксационных свойств жидкости и пористого скелета, неизотермичности процесса, влияния геохимических факторов и др. [8–10]. В частности, в работе [11] разработана неклассическая математическая модель для исследования динамики геомиграционного процесса в насыщенном соевым раствором геопористом массиве в условиях сильной временной нелокальности. Указанная модель базируется на предположениях теории аномальных субдиффузионных процессов [1, 2, 5–7] и включает систему нелинейных уравнений с производными дискретного дробного порядка от искоемых функций (порового давления и концентрации).

В настоящей статье выполнено математическое моделирование динамики локально-неравновесного во времени геомиграционного процесса в насыщенной соевым раствором геопористой среде на основе субдиффузионной модели, описываемой системой уравнений распределенного порядка, что позволяет моделировать процесс в рамках теории сверхмедленной диффузии [12–14]. В постановке задачи учтена также временная нелокальность процесса межфазного массообмена.

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ И ПОСТАНОВКА КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ

Математическое моделирование динамики локально-неравновесного во времени геомиграционного процесса в насыщенной соевыми растворами геопористой среде базируется на следующих обобщениях законов Дарси и Фика [11]:

$$u_x = D_t^{1-\beta} \left(-\frac{k}{\gamma} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \frac{\partial C}{\partial x} \right), \quad (1)$$

$$q = D_t^{1-\beta} \left(-d \frac{\partial C}{\partial x} + C \left(-\frac{k}{\gamma} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \frac{\partial C}{\partial x} \right) \right), \quad (2)$$

где u_x — скорость фильтрации; q — плотность диффузионного потока; C — концентрация солей в жидкой фазе; p — поровое давление; k — коэффициент фильтрации; d — коэффициент диффузии; ν — коэффициент осмоса; γ — удельный вес жидкости; $D_t^{1-\beta}$ — оператор дробного дифференцирования Римана–Лиувилля [6] порядка $1-\beta$ ($0 < \beta \leq 1$).

С учетом (1), (2) из уравнений неразрывности жидкой фазы и материального баланса массы растворенного вещества в предположении наличия условий сильной временной нелокальности, а также массообмена между жидкой и твердой фазами получаем систему уравнений модели в виде

$$D_t^{(\beta)} p = C_v \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} - \eta \frac{\partial^2 C}{\partial x^2}, \quad (3)$$

$$\sigma D_t^{(\beta)} C + D_t^{(\beta)} N = d \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} + \left(\frac{k}{\gamma} \frac{\partial p}{\partial x} - \nu \frac{\partial C}{\partial x} \right) \frac{\partial C}{\partial x}, \quad (4)$$

где N — концентрация вещества в твердой фазе; C_v — коэффициент консолидации [8]; $\eta = \frac{\nu \gamma C_v}{k}$; $D_t^{(\beta)}$ — оператор регуляризованной дробной производной [6] порядка β ; σ — пористость среды.

Обобщенное на случай временной нелокальности уравнение кинетики массообмена с учетом уравнения неравновесной обратимой сорбции при изотерме

Генри запишем в виде

$$D_t^{(\beta)} N = \gamma_0 (\sigma C - \alpha_0 N), \quad (5)$$

где α_0 — коэффициент равновесного сорбционного распределения, γ_0 — коэффициент скорости сорбции [15].

Таким образом, математическая модель рассматриваемого локально-неравновесного во времени геомиграционного процесса с учетом осмотических явлений в условиях массообмена базируется на системе уравнений (3)–(5). Видоизменяя уравнения модели на случай описания сверхмедленных субдиффузионных процессов [12–14], получаем для моделирования динамики геомиграции солевых растворов в геопористой среде в условиях временной нелокальности систему уравнений с производными распределенного порядка вида

$$D_t^{(\lambda)} p = C_v \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} - \eta \frac{\partial^2 C}{\partial x^2}, \quad (6)$$

$$\sigma D_t^{(\lambda)} C + D_t^{(\lambda)} N = d \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} + \left(\frac{k}{\gamma} \frac{\partial p}{\partial x} - \nu \frac{\partial C}{\partial x} \right) \frac{\partial C}{\partial x}, \quad (7)$$

$$D_t^{(\lambda)} N = \gamma_0 (\sigma C - \alpha_0 N), \quad (8)$$

где введено обозначение [14]:

$$D_t^{(\lambda)} u = \int_0^1 \lambda(\beta) D_t^{(\beta)} u d\beta, \quad (9)$$

$\lambda(\beta) > 0$ — весовая функция.

В рамках неклассической математической модели, базирующейся на системе уравнений (6)–(8), исследование динамики полей давлений и концентраций при геофильтрации солевых растворов в условиях массообмена и временной нелокальности процесса в случае массива конечной мощности l с проницаемой нижней и непроницаемой верхней гранями сводится к решению в области $(0, l) \times (0, +\infty)$ системы уравнений (6)–(8) с краевыми условиями

$$p(0, t) = 0, \quad p'_x(l, t) = 0, \quad p(x, 0) = p_0, \quad (10)$$

$$C(0, t) = C_0, \quad C'_x(l, t) = 0, \quad C(x, 0) = 0, \quad N(x, 0) = N_0, \quad (11)$$

где p_0 — начальное поровое давление в массиве, C_0 — заданное значение концентрации солей на входе фильтрационного потока, N_0 — заданное значение начальной концентрации вещества в твердой фазе.

Введем в рассмотрение безразмерные переменные и параметры соотношениями

$$x' = \frac{x}{l}, \quad t' = \left(\frac{C_v}{l^2} \right)^{\frac{1}{\beta}} t, \quad C' = \frac{C}{C_0}, \quad p' = \frac{p}{p_0}, \quad N' = \frac{N}{C_0}, \quad d' = \frac{d}{C_v},$$

$$\nu' = \frac{\nu C_0}{C_v}, \quad k' = \frac{k p_0}{\gamma C_v}, \quad \eta' = \frac{\eta C_0}{p_0}, \quad N'_0 = \frac{N_0}{C_0}, \quad \gamma'_0 = \frac{\gamma_0 l^2}{C_v}. \quad (12)$$

Переходя в (6)–(11) к безразмерным переменным согласно соотношениям (12) и опуская в дальнейшем знак штрих над безразмерными величинами, получаем в области $(0, 1) \times (0, +\infty)$ нелинейную краевую задачу вида

$$D_t^{(\lambda)} p = \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} - \eta \frac{\partial^2 C}{\partial x^2}, \quad (13)$$

$$\sigma D_t^{(\lambda)} C + D_t^{(\lambda)} N = d \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} + \left(k \frac{\partial p}{\partial x} - \nu \frac{\partial C}{\partial x} \right) \frac{\partial C}{\partial x}, \quad (14)$$

$$D_t^{(\lambda)} N = \gamma_0 (\sigma C - \alpha_0 N), \quad (15)$$

$$p(0, t) = 0, \quad p'_x(1, t) = 0, \quad p(x, 0) = 1, \quad (16)$$

$$C(0, t) = 1, \quad C'_x(1, t) = 0, \quad C(x, 0) = 0, \quad N(x, 0) = N_0. \quad (17)$$

МЕТОДИКА ПРИБЛИЖЕННОГО РЕШЕНИЯ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ И АЛГОРИТМ РАСЧЕТА

Изложим кратко методику построения приближенного решения краевой задачи (13)–(17), базирующуюся на совместном использовании комбинации численно-аналитического и численного подходов. Сначала рассмотрим задачу (13), (16) относительно неизвестной функции p (функция $C(x, t)$ при этом считается известной). Для решения указанной задачи используем подход, сочетающий два метода: дифференциально-разностный и суммарных представлений [15]. Введя в рассмотрение сеточную область $\omega_h = \{x_i : x_i = ih \ (i = 0, m+1)\}$, где h — шаг сетки по геометрической переменной, применим к интегралу в левой части уравнения (13) простейшую квадратурную формулу трапеций по трем узлам: $\beta_0 = 0, \beta_1 = 0,5, \beta_2 = 1$. В результате получим задачу

$$\lambda_2 \frac{\partial p}{\partial t} + \lambda_1 D_t \left(\frac{1}{2} \right) p = \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} - \lambda_0 p - \eta \frac{\partial^2 C}{\partial x^2}, \quad (18)$$

$$p(0, t) = 0, \quad p'_x(1, t) = 0, \quad p(x, 0) = 1, \quad (19)$$

где $\lambda_0 = \frac{1}{4} \lambda(0), \lambda_1 = \frac{1}{2} \lambda \left(\frac{1}{2} \right), \lambda_2 = \frac{1}{4} \lambda(1)$.

На сетке ω_h поставим в соответствие задаче (18), (19) дифференциально-разностную задачу вида

$$\lambda_2 \frac{d \bar{p}(t)}{dt} + \lambda_1 D_t \left(\frac{1}{2} \right) \bar{p}(t) = \left[\frac{1}{h^2} (T_3^{(m)} - 2E) - \lambda_0 \right] \bar{p}(t) - \frac{\eta}{h^2} (T_3^{(m)} - 2E) \bar{C}(t), \quad (20)$$

$$\bar{p}(0) = \bar{e}, \quad (21)$$

где обозначено $\bar{p}(t) = [p_1(t), p_2(t), \dots, p_m(t)]^T, \bar{C}(t) = [C_1(t), C_2(t), \dots, C_m(t)]^T, \bar{e} = [1, 1, \dots, 1]^T, u_i(t) = u(x_i, t) \ (i = \overline{1, m}), T_3^{(m)}$ — квадратная матрица порядка m , определенная в [16], E — единичная матрица m -го порядка.

Введем в рассмотрение P -трансформации векторов $\vec{p}, \vec{C}, \vec{e}$ соотношениями

$$\vec{p}(t) = P_3^{(m)*} \vec{p}(t), \quad \vec{C}(t) = P_3^{(m)*} \vec{C}(t), \quad \vec{e} = P_3^{(m)*} \vec{e}, \quad (22)$$

где $P_3^{(m)*}$ — транспонированная по отношению к матрице $P_3^{(m)}$ квадратная матрица порядка m , $P_3^{(m)}$ — фундаментальная матрица по отношению к матрице $T_3^{(m)}$, определенная соотношением [16]:

$$P_3^{(m)} = [P_{kj}^{(3)}]_{k,j=1}^m = \frac{2}{\sqrt{2m+1}} \left[\sin \left(\frac{\pi k(2j-1)}{2m+1} \right) \right]_{k,j=1}^m.$$

Принимая во внимание (22) и умножая (20), (21) слева на матрицу $P_3^{(m)*}$ с учетом равенства [16]: $T_3^{(m)} = P_3^{(m)} \Lambda_3^{(m)} P_3^{(m)*}$, здесь $\Lambda_3^{(m)} = [\lambda_1^{(3)}, \lambda_2^{(3)}, \dots, \lambda_m^{(3)}]$ — диагональная матрица собственных чисел матрицы $T_3^{(m)}$, $\lambda_k^{(3)} = 2 \cos(\pi(2k-1)/(2m+1))$ ($k = \overline{1, m}$), получаем в изображениях задачу Коши, записанную в скалярной форме в виде

$$\frac{d\hat{p}_i(t)}{dt} - \lambda D_i \left(\frac{1}{2} \right) \hat{p}_i(t) - \mu_i \hat{p}_i(t) = \hat{F}_i(t) \quad (i = \overline{1, m}), \quad (23)$$

$$\hat{p}_i(0) = \hat{e}_i \quad (i = \overline{1, m}), \quad (24)$$

где

$$\hat{F}_i(t) = \frac{\eta}{\lambda_2 h^2} (2 - \lambda_i^{(3)}) \hat{C}_i(t), \quad \mu_i = \frac{1}{\lambda_2} \left[\frac{1}{h^2} (\lambda_i^{(3)} - 2) - \lambda_0 \right],$$

$$\lambda = -\frac{\lambda_1}{\lambda_2}, \quad \hat{e}_i = \sum_{k=1}^m P_{ki}^{(3)} \quad (i = \overline{1, m}). \quad (25)$$

Решение задачи (23)–(25) согласно [6] запишем в виде

$$\hat{p}_i(t) = \hat{e}_i \Phi_i(t) + \int_0^t G_{1, \frac{1}{2}; \lambda, \mu_i} (t-\tau) \hat{F}_i(\tau) d\tau \quad (i = \overline{1, m}), \quad (26)$$

где

$$\Phi_i(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\mu_i t)^n}{n!} \left\{ {}_1\Psi_1 \left[\begin{matrix} (n+1, 1) \\ n+1, \frac{1}{2} \end{matrix} \middle| \lambda \sqrt{t} \right] - \lambda \sqrt{t} {}_1\Psi_1 \left[\begin{matrix} (n+1, 1) \\ n+\frac{3}{2}, \frac{1}{2} \end{matrix} \middle| \lambda \sqrt{t} \right] \right\}, \quad (27)$$

$$G_{1, \frac{1}{2}; \lambda, \mu_i} (z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\mu_i z)^n}{n!} {}_1\Psi_1 \left[\begin{matrix} (n+1, 1) \\ n+1, \frac{1}{2} \end{matrix} \middle| \lambda z^{\frac{1}{2}} \right], \quad (28)$$

${}_1\Psi_1(z)$ — обобщенная функция Райта [6].

Возвращаясь в соотношениях (26) к оригиналам по геометрической переменной, получаем решение дифференциально-разностной задачи (20), (21) в виде

$$p_i(t) = \chi_i(t) + \sum_{k=1}^m \int_0^t \Omega_{ik}(t-\tau) C_k(\tau) d\tau \quad (i = \overline{1, m}), \quad (29)$$

где

$$\chi_i(t) = \sum_{l=1}^m \sum_{k=1}^m p_{il}^{(3)} p_{kl}^{(3)} \Phi_l(t) \quad (i = \overline{1, m}), \quad (30)$$

$$\Omega_{ik}(t-\tau) = \frac{\eta}{h^2 \lambda_2} \sum_{l=1}^m p_{il}^{(3)} p_{kl}^{(3)} (2 - \lambda_l^{(3)}) G_{1, \frac{1}{2}; \lambda, \mu_l} (t-\tau) \quad (i = \overline{1, m}, k = \overline{1, m}). \quad (31)$$

Аналогично изложенному выше, аппроксимируя интеграл в левой части уравнения (15) согласно квадратурной формуле трапеций, получаем для определения концентрации $N(x, t)$ задачу

$$\frac{\partial N}{\partial t} - \lambda D_t \left(\frac{1}{2} \right) N - \tilde{\mu} N = \rho C, \quad N(x, 0) = N_0, \quad (32)$$

где

$$\tilde{\mu} = -\frac{\lambda_0 + \alpha_0 \gamma_0}{\lambda_2}, \quad \rho = \frac{\sigma \gamma_0}{\lambda_2}.$$

Решение задачи (32) согласно [6] запишется в виде

$$N(x, t) = N_0 R(t) + \rho \int_0^t G_{1, \frac{1}{2}; \lambda, \tilde{\mu}}(t - \tau) C(x, \tau) d\tau, \quad (33)$$

где функции R, G определяются согласно соотношениям (27), (28) с предварительной заменой в этих формулах μ_i на $\tilde{\mu}$.

Таким образом, явные зависимости (29)–(31) и (33) открывают возможность непосредственного вычисления на рассматриваемом временном слое значений неизвестных полей p и N при известном значении поля концентрации C на этом слое.

Задача для отыскания поля концентраций C решается конечно-разностным методом. Для этого введем в рассмотрение сеточную область $\omega_{ht} = \{(x_i, t_j) : x_i = ih (i = 0, m+1), t_j = j\tau (j = 0, n)\}$, здесь h, τ — шаги сетки по геометрической переменной и времени соответственно, и поставим в соответствие задаче (14), (17) систему разностных уравнений, записанную в стандартных обозначениях [17] в виде

$$\sigma \Delta_t^{(\lambda)} C = \frac{d}{2} (\hat{C}_{\bar{x}x} + C_{\bar{x}x}) + \frac{1}{2} (k p_0 - \nu C_0) (\hat{C}_0 + C_0) - \gamma_0 (\sigma \hat{C} - \alpha_0 N), \quad (34)$$

где

$$\Delta_t^{(\lambda)} C = \sum_{s=0}^j \rho_s^{(j)} C_t^s, \quad \rho_s^{(j)} = \int_0^1 \frac{\lambda(\beta)}{\Gamma(2-\beta)} b_s^{(j)}(\beta) d\beta,$$

$$b_s^{(j)}(\beta) = \tau^{1-\beta} ((j-s+1)^{1-\beta} - (j-s)^{1-\beta}), \quad C_t^s = \frac{C^{s+1} - C^s}{\tau},$$

$\Gamma(\beta)$ — гамма-функция Эйлера [18]. Отметим, что в классе достаточно гладких функций справедливо соотношение $D_t^{(\lambda)} C = \Delta_t^{(\lambda)} C + O(\tau)$.

Расписывая в соотношении (34) соответствующие разностные операторы и приводя подобные члены, получаем следующую систему линейных алгебраических уравнений:

$$A_i^j C_{i-1}^{j+1} - S_i^j C_i^{j+1} + B_i^j C_{i+1}^{j+1} = -F_i^j \quad (i = \overline{1, m}; j = \overline{0, n}), \quad (35)$$

где обозначено

$$A_i^j = \frac{1}{2h} \left(\frac{d}{h} - \nu_i^j \right), \quad B_i^j = \frac{1}{2h} \left(\frac{d}{h} + \nu_i^j \right), \quad S_i^j = \sigma \left(\frac{\rho}{\tau} + \gamma_0 \right) + A_i^j + B_i^j,$$

$$\nu_i^j = \frac{1}{4h} (k(p_{i+1}^j - p_{i-1}^j) - \nu(C_{i+1}^j - C_{i-1}^j)), \quad \rho = \int_0^1 \frac{\lambda(\beta) \tau^{1-\beta}}{\Gamma(2-\beta)} d\beta,$$

$$F_i^j = \sigma \frac{\rho}{\tau} C_i^j - \sigma \sum_{s=0}^{j-1} \rho_s^{(j)} \frac{C_i^{s+1} - C_i^s}{\tau} + \frac{d}{2h^2} (C_{i-1}^j - 2C_i^j + C_{i+1}^j) + \frac{v_i^j}{2h} (C_{i+1}^j - C_{i-1}^j) + \alpha_0 \gamma_0 \sigma N_i^j, \quad \sum_{s=0}^{j-1} (\cdot) = 0 \quad \text{при } j=0.$$

Разностные уравнения системы (35) являются трехточечными и эффективно решаются методом прогонки [17], устойчивость которого при этом вытекает из факта диагонального преобладания в матрице коэффициентов приведенной системы алгебраических уравнений.

С учетом изложенного сформулируем следующий комбинированный алгоритм для приближенного решения исходной краевой задачи (13)–(17):

- 1) зная значения величин p и N на предыдущем временном слое, вычисляем значения C на данном временном слое в соответствии с разностной схемой (34);
- 2) с учетом найденных значений C на рассматриваемом временном слое вычисляем значения p и N на нем согласно явным зависимостям (29) и (33);
- 3) завершение решения задачи на рассматриваемом временном слое.

Переходим на следующий временной слой и повторяем вычисления начиная с п. 1.

Численное моделирование динамики полей фильтрационных давлений и полей концентраций в насыщенном соевым раствором геопористом массиве в соответствии с изложенным алгоритмом выполнено относительно безразмерных переменных и параметров, определяемых соотношениями (12). Некоторые из полученных результатов, соответствующих значению $\lambda(\beta) = H(\beta) - H(\beta - 1)$, здесь H — единичная функция Хевисайда [18], графически изображены на рис. 1, где показана динамика полей поровых давлений (кривые 1–5) и полей концентраций C в жидкой фазе (кривые 1'–5') в различные моменты безразмерного времени t (кривые 1, 1' при $t = 0,01$; кривые 2, 2' при $t = 0,05$; кривые 3, 3' при $t = 0,1$; кривые 4, 4' при $t = 0,2$; кривые 5, 5' при $t = 0,3$).

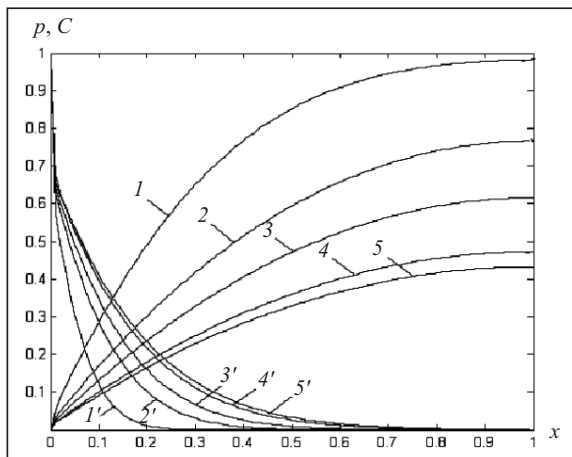


Рис. 1

Анализ результатов численных экспериментов позволяет, в частности, сделать вывод о том, что принятая в работе математическая модель и разработанный алгоритм расчета аномального геомиграционного процесса в условиях временной нелокальности приводят к физически непротиворечивой картине динамики рассеивания поля первоначальных поровых давлений и динамики роста концентрации растворимых веществ в насыщенной соевыми растворами геопористой среде (см. рис. 1).

При этом результаты численного моделирования геомиграционного процесса согласно рассмотренной математической модели распределенного порядка качественно согласуются с результатами, полученными ранее [11] в рамках локально-неравновесной геомиграционной модели дискретного дробного порядка.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Рассмотренная неклассическая математическая модель для описания локально-неравновесного во времени миграционного процесса в насыщенных солевыми растворами геопористых средах в условиях массообмена позволяет теоретически изучать динамику аномальных миграционных полей в рамках теории сверхмедленной диффузии [12–14] и производить учет важных дополнительных факторов (например, временную нелокальность составляющих процесса переноса), традиционно не учитываемых в классических математических моделях. Учет указанных факторов при построении современных математических моделей геомиграции обусловлен необходимостью повышения степени адекватности математического моделирования неравновесных процессов переноса в сложных горно-геологических условиях.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Metzler R., Klafter J. The random walk's guide to anomalous diffusion: a fractional dynamics approach // *Phys. Reports.* — 2000. — **339**. — P. 1–77.
2. Zaslavsky G.M. Chaos, fractional kinetics and anomalous transport // *Phys. Reports.* — 2002. — **371**. — P. 461–580.
3. Хасанов М.М., Булгакова Г.Т. Нелинейные и неравновесные эффекты в геологически сложных средах. — Москва — Ижевск: Ин-т компьютер. исслед., 2003. — 288 с.
4. Мейланов М.М., Шибанова М.Р. Особенности решения уравнения теплопереноса в производных дробного порядка // *Журн. техн. физики.* — 2011. — **81**, № 7. — С. 1–6.
5. Gorenflo R., Mainardi F. Random walk models for space-fractional diffusion processes // *Fractional calculus and applied analysis.* — 1998. — N 1. — P. 167–191.
6. Kilbas A.A., Srivastava H.M., Trujillo J.J. Theory and applications of fractional differential equations. — Amsterdam: Elsevier, 2006. — 523 p.
7. Учайкин В.В. Метод дробных производных. — Ульяновск: Изд-во «Артишок», 2008. — 512 с.
8. Булавацький В.М., Кривонос Ю.Г., Скопецький В.В. Некласичні математичні моделі процесів тепло- та масопереносу. — К.: Наук. думка, 2005. — 283 с.
9. Бомба А.Я., Булавацький В.М., Скопецький В.В. Нелінійні математичні моделі процесів геогідродинаміки. — К.: Наук. думка, 2007. — 292 с.
10. Булавацький В.М., Скопецький В.В. Неклассические дифференциальные модели динамики пространственно-временных консолидационных процессов // *Кибернетика и системный анализ.* — 2011. — № 3. — С. 78–87.
11. Булавацький В.М. Математическая модель геоинформатики для исследования динамики локально-неравновесных геофильтрационных процессов // *Проблемы управления и информатики.* — 2011. — № 6. — С. 76–83.
12. Chechkin A.V., Gorenflo R., Sokolov I. M., Gonchar V. Yu. Distributed order time fractional diffusion equation // *Fractional Calculus and Appl. Analysis.* — 2003. — N 6. — P. 259–279.
13. Naber M. Distributed order fractional sub-diffusion // *Fractals.* — 2004. — **12**. — P. 23–32.
14. Kochubei A.N. Distributed order calculus and equations of ultraslow diffusion // *J. Math. Anal. Appl.* — 2008. — **340**, N 1. — P. 252–281.
15. Ляшко И.И., Демченко Л.И., Мистецкий Г.Е. Численное решение задач тепло- и массопереноса в пористых средах. — К.: Наук. думка, 1991. — 264.
16. Положий Г.Н. Численное решение двумерных и трехмерных краевых задач математической физики и функции дискретного аргумента. — К.: Вища школа, 1962. — 161 с.
17. Самарский А.А. Теория разностных схем. — М.: Наука, 1977. — 656 с.
18. Abramovitz M., Stegun I. A. Handbook of Mathematical Functions. — New York: Dover, 1965. — 831 p.

Поступила 10.05.2012