УДК 517.946

В. В. Маринець, К. В. Маринець

Крайова задача Гурса–Дарбу для нелінійного рівняння гіперболічного типу

(Представлено академіком НАН України М. О. Перестюком)

Наведено один із підходів дослідження крайових задач для нелінійних диференціальних рівнянь у частинних похідних гіперболічного типу на площині. За допомогою запропонованої модифікації двостороннього методу встановлено достатні умови існування, єдиності та знакосталості регулярного або іррегулярного розв'язку розглядуваної задачі.

У даній роботі узагальнюються одержані в [1, 2] результати і дається один підхід дослідження крайової задачі для нелінійного рівняння другого порядку гіперболічного типу на площині, коли область зміни незалежних змінних обмежена "вільними" кривими та характеристиками заданого диференціального рівняння [3].

Розглянемо в $\mathbb{R}^2$ область $D = D_1 \bigcup D_2 \bigcup D_3$, де

$$D_1 = \{(x, y) \mid x \in (x_0, x_1],\ y \in (y_0, y_1]\},$$

$$D_2 = \{(x, y) \mid x \in [x_0, x_1],\ y \in (y_1, g_1(x))\},$$

$$D_3 = \{(x, y) \mid x \in (x_0, x_2],\ y \in (g_2(x), y_1]\},$$

де $x_0 < x_1 < x_2$, $y_0 < y_1 < y_2$, $y = g_i(x)$ $(x = k_i(y))$, $i = 1, 2$, — "вільні" криві, причому $g_1(x_{i-1}) = y_i$, $g_2(x_i) = y_{i-1}$, $g_i'(x) > 0$, $i = 1, 2$.

Дослідимо задачу: в просторі функцій $C^*(\overline{D}) := C^{(1.1)}(D) \bigcup C(\overline{D})$ знайти розв'язок крайової задачі

$$L_2 U(x, y) = f(x, y, U(x, y)) := f(x, y), \tag{1}$$

де L_2 — диференціальний оператор, породжений диференціальним виразом

$$l_2(U(x, y)) := U_{xy}(x, y) + a_1(x, y) U_x(x, y) + a_2(x, y) U_y(x, y),$$

$a_i(x, y) \in C(D)$, $i = 1, 2$, — задані функції, та крайовими умовами

$$\begin{gathered} U(x_0, y) = \psi(y), \qquad U(x, y_0) = \phi(x), \\ (x, y) \in \overline{D_1}, \qquad \psi(y) \in C^1[y_0, y_1], \qquad \phi(x) \in C^1[x_0, x_1], \\ U(x, g_i(x)) = \omega_i(x), \qquad x \in [x_{i-1}, x_i], \qquad \omega_i(x) \in C^1[x_{i-1}, x_i], \qquad i = 1, 2, \end{gathered} \tag{2}$$

причому виконуються умови узгодженості

$$\psi(y_0) = \phi(x_0), \omega_1(x_0) = \psi(y_1), \omega_2(x_1) = \phi(x_1). \tag{3}$$

Очевидно, розв'язок крайової задачі (1) $U(x,y) = U_s(x,y)$, $(x,y) \in \overline{D_s}$, $s = 1,2,3$, де $U_1(x,y)$ — розв'язок рівняння

$$l_2 U(x,y) = f[U(x,y)], \tag{4}$$

при $(x,y) \in \overline{D_1}$, який задовольняє умови (2) і першу з умов (3) (задача Гурса), а $U_s(x,y)$, $(x,y) \in \overline{D_s}$, $s = 2,3$, — розв'язки рівняння (4), які задовольняють відповідно умови

$$U_2(x, g_1(x)) = \omega_1(x), \qquad U_2(x, y_1) = U_1(x, y_1), \qquad x \in [x_0, x_1], \tag{5}$$

$$U_3(x, g_2(x)) = \omega_2(x), \qquad U_3(x_1, y) = U_1(x_1, y), \qquad y \in [y_0, y_1], \tag{6}$$

причому виконуються останні дві з умов узгодженості (3) (задачі Дарбу).

Надалі будемо вважати, що $a_1(x,y) \in C^{(0.1)}(D_1 \bigcup D_3)$, $a_2(x,y) \in C^{(0.1)}(D_1 \bigcup D_2)$, $f[U(x,y)] \in C(\overline{B})$, $f\colon \overline{B} \to \mathbb{R}$, $\overline{B} \in \mathbb{R}^3$.

Справедливою є така лема.

Лема 1. *Нехай крайова задача* (1) *при* $(x,y) \in \overline{D}$ *має розв'язок. Тоді розв'язок задачі* (1) *належатиме простору* $C^*(\overline{D})$ *(буде регулярним), якщо*

$$\rho_1 := \psi'(y_1) - k_1'(y_1)\Bigg\{\omega_1'(x_0) + a_2(x_0,y_1)\omega_1(x_0) - [a_2(x_0,y_0)\phi(x_0) + \phi'(x_0)] \times$$

$$\times \exp\left(\int\limits_{y_1}^{y_0} a_1(x_0,\eta)\,d\eta\right) - \int\limits_{y_0}^{y_1} F_1(x_0,\eta,\psi(\eta)) \exp\left(\int\limits_{y_1}^{\eta} a_1(x_0,\tau) d\tau\right) d\eta\Bigg\} = 0,$$

$$\rho_2 := \phi'(x_1) - \omega_2'(x_1) - g_2'(x_1)\Bigg\{a_1(x_1,y_0)\omega_2(x_1) - [a_1(x_0,y_0)\psi(y_0) + \psi'(y_0)] \times$$

$$\times \exp\left(\int\limits_{x}^{x_0} a_2(\xi,y_0)\,d\xi\right) - \int\limits_{x_0}^{x_1} F_2(\xi,y_0,\phi(\xi)) \exp\left(\int\limits_{x_1}^{\xi} a_2(\tau,y_0) d\tau\right) d\xi\Bigg\} = 0,$$

$$F_1(x,y,U(x,y)) := f[U(x,y)] + [a_{2y}(x,y) + a_1(x,y)a_2(x,y)]U(x,y),$$

$$F_2(x,y,U(x,y)) := f[U(x,y)] + [a_{1x}(x,y) + a_1(x,y)a_2(x,y)]U(x,y).$$

У супротивному випадку мають місце рівності

$$U_{1y}(x,y_1) - U_{2y}(x,y_1) = \rho_1 \exp\left(\int\limits_{x}^{x_0} a_2(\xi,y_1)\,d\xi\right), \qquad x \in [x_0,x_1],$$

$$U_{1x}(x_1,y) - U_{3x}(x_1,y) = \rho_2 \exp\left(\int\limits_{y}^{y_0} a_1(x_1,\eta)\,d\eta\right), \qquad y \in [y_0,y_1]$$

і $U(x,y) \in C^{(1.1)}(D) \bigcap C^{(1.0)}(\overline{D_1} \bigcup \overline{D_2}) \bigcap C^{(0.1)}(\overline{D_1} \bigcup \overline{D_3})$, $I = I_1 \bigcup I_2$, $I_1 = \{(x,y) \mid y = y_1$, $x \in [x_0,x_1]\}$, $I_2 = \{(x,y) \mid x = x_1,\ y \in [y_0,y_1]\}$ *(розв'язок буде іррегулярним).*

Позначимо

$$f[U(x,y)] := \begin{cases} F_1(x,y,U(x,y)), & (x,y) \in D_1 \bigcup D_2, \\ F_2(x,y,U(x,y)), & (x,y) \in D_3, \end{cases}$$

і припустимо, що $F[U(x,y)] \in C_1(\overline{B})$, тобто що функція $F[U(x,y)]$ задовольняє такі умови:

1) $F[U(x,y)] \in C(\overline{B})$;

2) в просторі функцій $C(\overline{B_1})$, $\overline{B_1} \subset \mathbb{R}^4$, $\text{Пр}_{x0y}\overline{B_1} = \overline{D}$ існує така функція $H(x,y,U(x,y), V(x,y)) := H[U(x,y);V(x,y)]$, що

а) $H[U(x,y);U(x,y)] \equiv F[U(x,y)]$,

б) для довільної з простору $C(\overline{D})$ пари функцій $U(x,y)$, $V(x,y) \in \overline{B_1}$, які задовольняють умову $U(x,y) \geqslant V(x,y)$, $(x,y) \in \overline{D}$, в області $\overline{B_1}$ виконується нерівність

$$H[U(x,y);V(x,y)] - H[V(x,y);U(x,y)] \geqslant 0, \qquad (x,y) \in \overline{D};$$

3) функція $H[U(x,y);V(x,y)]$ в області $\overline{B_1}$ задовольняє умову Ліпшіца, тобто для всяких з простору $C(\overline{D})$ функцій $U_i(x,y)$, $V_i(x,y) \in \overline{B_1}$, $i=1,2$, виконується умова

$$|H[U_1(x,y);V_1(x,y)] - H[U_2(x,y);V_2(x,y)]| \leqslant L(|W_1(x,y)| + |W_2(x,y)|),$$

$(x,y) \in D$, де L — стала Ліпшіца, а $W_i(x,y) := U_i(x,y) - V_i(x,y)$, $i=1,2$.

Очевидно, якщо функція $f[U(x,y)] \in C(\overline{B})$ і має в області $\overline{B}$ обмежену частинну похідну першого порядку по $U(x,y)$, то $f[U(x,y)] \in C_1(\overline{B})$.

Нехай $Z_{p,s}$, $V_{p,s} \in C(\overline{D_s})$ належать області $\overline{B_1}$, $s=1,2,3$, $p \in \mathbb{N}$.

Введемо позначення:

$$W_{p,s} := Z_{p,s} - V_{p,s}, \qquad (x,y) \in \overline{D_s}, \qquad s=1,2,3,$$

$$f_s^p(x,y) := H[Z_{p,s}(x,y);V_{p,s}(x,y)], \qquad f_{p,s}(x,y) := H[V_{p,s}(x,y), Z_{p,s}(x,y)],$$

$$\alpha_{p,s}^*(x,y) := Z_{p,s}(x,y) - \Omega_s(x,y) - \delta_s T_{1,s} f_1^p(\xi,\eta) - T_s f_s^p(\xi,\eta),$$

$$\beta_{p,s}^*(x,y) := V_{p,s}(x,y) - \Omega_s(x,y) - \delta_s T_{1,s} f_{p,1}(\xi,\eta) - T_s f_{p,s}(\xi,\eta), \qquad s=1,2,3,$$

$$\Omega_1(x,y) := \psi(y)\exp\left(\int\limits_x^{x_0} a_2(\xi,y)\,d\xi\right) + \int\limits_{x_0}^{x} K_1(x,y;\xi,y_0)[\phi'(\xi) + a_2(\xi,y_0)\phi(\xi)]\,d\xi,$$

$$\Omega_2(x,y) := \omega_1(k_1(y))\exp\left(\int\limits_x^{k_1(y)} a_2(\xi,y)\,d\xi\right) + \int\limits_{k_1(y)}^{x} K_1(x,y;\xi,y_0)[\phi'(\xi) + a_2(\xi,y_0)\phi(\xi)]\,d\xi,$$

$$\Omega_3(x,y) := \omega_2(x)\exp\left(\int\limits_y^{g_2(x)} a_1(x,\eta)\,d\eta\right) + \int\limits_{g_2(x)}^{y} K_2(x,y;x_0,\eta)[\psi'(\eta) + a_1(x_0,\eta)\psi(\eta)]\,d\eta,$$

$$K_1(x,y;\xi,\eta) := \exp\left(\int\limits_x^{\xi} a_2(\tau,y)d\tau + \int\limits_y^{\eta} a_1(\xi,\tau)d\tau\right),$$

$$K_2(x,y;\xi,\eta) := \exp\left(\int\limits_x^\xi a_2(\tau,\eta)d\tau + \int\limits_y^\eta a_1(x,\tau)d\tau\right), \qquad \delta_s = \begin{cases} 0, & s=1, \\ 1, & s=2,3, \end{cases}$$

$$T_1F[U_1(\xi,\eta)] := \int\limits_{x_0}^{x}\int\limits_{y_0}^{y} K_1(x,y;\xi,\eta)F[U_1(\xi,\eta)]\,d\eta d\xi, \qquad (x,y)\in\overline{D_1},$$

$$T_2F[U_2(\xi,\eta)] := \int\limits_{k_1(y)}^{x}\int\limits_{y_1}^{y} K_1(x,y;\xi,\eta)F[U_2(\xi,\eta)]\,d\eta d\xi, \qquad (x,y)\in\overline{D_2},$$

$$T_3F[U_3(\xi,\eta)] := \int\limits_{g_2(x)}^{y}\int\limits_{x_1}^{x} K_2(x,y;\xi,\eta)F[U_3(\xi,\eta)]\,d\xi d\eta, \qquad (x,y)\in\overline{D_3},$$

$$T_{1,2}F[U_1(\xi,\eta)] := \int\limits_{k_1(y)}^{x}\int\limits_{y_0}^{y_1} K_1(x,y;\xi,\eta)F[U_1(\xi,\eta)]\,d\eta d\xi, \qquad (x,y)\in\overline{D_2},$$

$$T_{1,3}F[U_1(\xi,\eta)] := \int\limits_{g_2(x)}^{y}\int\limits_{x_0}^{x_1} K_2(x,y;\xi,\eta)F[U_1(\xi,\eta)]\,d\xi d\eta, \qquad (x,y)\in\overline{D_3},$$

$$\overline{Z_{p,s}}(x,y) := Z_{p,s}(x,y) - d_{p,s}W_{p,s}(x,y),$$

$$\overline{V_{p,s}}(x,y) := V_{p,s}(x,y) + q_{p,s}(x,y)W_{p,s}(x,y), \qquad (x,y)\in\overline{D_s},$$

$$F_s^p(x,y) := H[\overline{Z_{p,s}};\overline{V_{p,s}}], \qquad F_{p,s}(x,y) := H[\overline{V_{p,s}};\overline{Z_{p,s}}],$$

$d_{p,s}(x,y)$, $q_{p,s}(x,y)\in C(\overline{D_s})$ — довільні функції, які задовольняють умови

$$0\leqslant d_{p,s}\leqslant 0{,}5, \qquad 0\leqslant q_{p,s}(x,y)\leqslant 0{,}5, \qquad (x,y)\in\overline{D_s} \tag{7}$$

для всіх $p\in\mathbb{N}$ і $s=1,2,3$.

Побудуємо послідовності функцій $\{Z_{p,s}(x,y)\}$ та $\{V_{p,s}(x,y)\}$ згідно з формулами [4]

$$\begin{aligned} Z_{p+1,s}(x,y) &= \Omega_s(x,y) + \delta_s T_{1,s}F_1^p(\xi,\eta) + T_sF_s^p(\xi,\eta), \\ V_{p+1,s}(x,y) &= \Omega_s(x,y) + \delta_s T_{1,s}F_{p,1}(\xi,\eta) + T_sF_{p,s}(\xi,\eta), \qquad (x,y)\in\overline{D_s}, \end{aligned} \tag{8}$$

де за нульове наближення $Z_{0,s}(x,y)$, $V_{0,s}\in\overline{B_0}$ вибираємо довільні з простору $C(\overline{D_s})$ функції, які задовольняють відповідно умови (2), (5), (6), (3) та нерівності

$$W_{0,s}(x,y)\geqslant 0, \qquad \alpha_{0,s}^*(x,y)\geqslant 0, \qquad \beta_{0,s}^*(x,y)\leqslant 0, \qquad (x,y)\in\overline{D_s}, \qquad s=1,2,3. \tag{9}$$

Надалі такі функції називатимемо функціями порівняння крайової задачі (1).

Теорема 1. *Нехай* $F[U(x,y)]\in C_1(\overline{B})$, *а в області* $\overline{B_1}$ *існують функції порівняння крайової задачі* (1) $Z_{0,s}(x,y), V_{0,s}(x,y)\in C(\overline{D_s})$, $s=1,2,3$.

Тоді для функцій $Z_{p,s}(x,y)$, $V_{p,s}(x,y)$, які побудовані згідно із законом (8), *де* $d_{p,s}(x,y)$, $q_{p,s}(x,y) \in C(\overline{D_s})$, *задовольняють умови* (7) *та нерівності*

$$\begin{aligned} &Z_{p,s}(x,y) - Z_{p+1,s}(x,y) \geqslant d_{p,s}(x,y)W_{p,s}(x,y), \\ &V_{p,s}(x,y) - V_{p+1,s}(x,y) \leqslant -q_{p,s}W_{p,s}(x,y), \qquad (x,y) \in \overline{D_s}, \qquad p \in \mathbb{N}, \end{aligned} \tag{10}$$

в області $\overline{B_1}$ *справедливі нерівності*

$$V_{p,s}(x,y) \leqslant V_{p+1,s} \leqslant Z_{p+1,s}(x,y) \leqslant Z_{p+1,s}(x,y), \quad (x,y) \in \overline{D_s}, \quad s = 1,2,3, \quad p \in \mathbb{N}.$$

Лема 2. *Нехай виконуються умови теореми 1.*

Тоді множина функцій $d_{p,s}(x,y), q_{p,s}(x,y) \in C(\overline{D_s})$, *які задовольняють умови* (7), (10), *не порожня.*

Позначимо:

$$\max_s[\sup_{\overline{D_s}} W_{0,s}(x,y)] \leqslant d, \qquad \max_{p,s}\sup_{\overline{D_s}}(1 - d_{p,s}(x,y) - q_{p,s}(x,y)) \leqslant q,$$

$$\max_i[\sup_{\overline{D_1}\cup D_s} K_i(x,y;\xi,\eta)] \leqslant 0{,}5K, \qquad s = 2,3, \qquad i = 1,2,$$

$$Q = \sup_{\overline{D}}(1, y - y_0 + x - x_0).$$

Теорема 2. *Нехай* $F[U(x,y)] \in C_1(\overline{B})$ *і в області* $\overline{B_1}$ *існують функції порівняння задачі* (1) $Z_{0,s}$, $V_{0,s}(x,y) \in C(\overline{D_s})$, $s = 1,2,3$.

Тоді послідовності функцій $\{Z_{p,s}(x,y)\}$, $\{V_{p,s}(x,y)\}$, *побудовані згідно із законом* (8), (7), (10)*:*

а) збігаються рівномірно до єдиного в області $\overline{D_1}$ *розв'язку задачі Гурса* (4), (2) $U_1(x,y)$, *в* $\overline{D_s}$, $s = 2,3$, *— до розв'язку* $U_s(x,y)$ *відповідно до задач Дарбу* (4), (5) *та* (4), (6)*;*

б) мають місце оцінки

$$\max_s\Big[\sup_{\overline{D_s}} W_{p,s}(x,y)\Big] \leqslant (P!)^{-1}[KLQq(y - y_0 + x - x_0)]^p d;$$

в) в області $\overline{B_1}$ *виконуються нерівності*

$$V_{p,s}(x,y) \leqslant U_s(x,y) \leqslant Z_{p,s}(x,y), \qquad (x,y) \in \overline{D_s}, \qquad s = 1,2,3,$$

для всіх $p \in \mathbb{N}$*;*

г) збіжність ітераційного методу (8), (7), (10) *не повільніша за збіжність двостороннього методу Пікара (коли* $d_{p,s}(x,y) = q_{p,s}(x,y) \equiv 0$*).*

Наслідок 1. *Нехай виконуються вимоги теореми 2. Тоді розв'язок крайової задачі* (1) *в області* $\overline{D}$ *існує і він єдиний, причому, якщо* $\rho_1 = \rho_2 = 0$, *він буде регулярним, у супротивному випадку — іррегулярним.*

Наслідок 2. *Нехай* $\phi(x) = \psi(y) = 0$, $(x, y \in \overline{D_1})$, $\omega_i(x) = 0$, $x \in [x_{i-1}, x_i]$, $i = 1,2$, $F[U(x,y)] \in C_1(\overline{B})$, *причому* $F[U(x,y)] \equiv H[U(x,y);0]$. *Тоді якщо* $F[0] \leqslant (\geqslant) 0$ *в області* $\overline{B}$, *то розв'язок крайової задачі* (1) *задовольняє нерівність*

$$U(x,y) \leqslant (\geqslant) 0, \qquad (x,y) \in \overline{D}.$$

1. *Маринець В. В., Питьовка О. Ю.* Про одну крайову задачу для диференціально-функціональних рівнянь гіперболічного типу // Наук. вісн. Ужгород. нац. ун-ту. Сер. Математика і інформатика. – 2010. – Вип. 20. – С. 79–89.
2. *Маринець В. В., Маринець Т. И., Добридень А. В.* Про одну некласичну задачу теорії рівнянь гіперболічного типу // Праці Міжнар. симп. ПОО-К. Ж ІК ім. В. М. Глушкова НАН України. – 2009. – **2**. – С. 79–84.
3. *Коллатц Л.* Функциональный анализ и вычислительная математика. – Москва: Мир, 1969. – 448 с.
4. *Маринець В. В.* Деякі підходи до побудови наближеного розв'язку задачі Гурса для систем визначених квазілінійних диференціальних рівнянь з частинними прохідними з аргументом, що відхиляється // Укр. мат. журн. – 1995. – **47**, № 3. – С. 348–364.

ДВНЗ "Ужгородський національний університет" *Надійшло до редакції 25.02.2013*

В. В. Маринец, К. В. Маринец

Краевая задача Гурса–Дарбу для нелинейного уравнения гиперболического типа

Приведен один из подходов исследования краевых задач для нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных гиперболического типа на плоскости. С помощью предложенной модификации двустороннего метода установлены достаточные условия существования, единственности и знакопостоянства регулярного или иррегулярного решения рассматриваемой задачи.

V. V. Marynets, K. V. Marynets

The Goursat–Darboux boundary-value problem for a non-linear equation of the hyperbolic type

We give a possible approach to the study of the boundary-value problems for non-linear partial differential equations of the hyperbolic type on a plane. We establish the sufficient conditions of existence, uniqueness, and sign-constancy of a regular or irregular solution of the given problem with the help of the proposed modification of the double-sided method.