УДК 681.5

ТЕОРЕТИКО-ИГРОВОЙ ПОДХОД В ЗАДАЧАХ КООРДИНАЦИИ ДЕЙСТВИЙ С ОБМЕНОМ ИНФОРМАЦИЕЙ

С.И. Доценко

Киевский национальный университет имени Тараса Шевченко

Для кооперативной игры с ограниченной кооперацией рассмотрено коммуникативное расширение игры путем введения нового игрока, обязанностью которого является обеспечение координации взаимодействия между агентами исходной игры. Для расширенной игры применена методика вычисления вектора Шепли. Данный метод применен к биматричной игре «координация усилий» и игровой задаче оптимального выбора.

Ключевые слова: кооперативная игра, коммуникативное расширение, вектор Шепли, стохастическое неравенство, задача оптимального выбора.

Для кооперативної гри з обмеженою кооперацією розглянуто комунікативне розширення гри шляхом введення нового гравця, обов'язками якого є забезпечення координації взаємодії між агентами початкової гри. Для розширеної гри розглянуто методику обчислення вектора Шеплі. Даний метод було застосовано на прикладах біматричної гри «координація зусиль» та ігрової задачі оптимального вибору.

Ключові слова: кооперативна гра, комунікативне розширення, вектор Шеплі, стохастична нерівність, задача оптимального вибору.

Введение

Теория кооперативных игр является неотъемлемой составной частью современной экономической теории. В 2012 году ее основателю — Ллойду Шепли была присуждена Нобелевская премия по экономике. Если в первых работах по кооперативной теории игр характеристическая функция была заданной извне и неизменной, то в дальнейшем стали рассматриваться так называемые расширенные игры, в которые могут добавляться игроки, чей статус отличается от игроков исходной задачи тем, что они непосредственно не принимают участие в игре, но обеспечивают взаимодействие между ними, и, таким образом, влияют на характеристическую функцию игры, заданную на множестве исходных игроков. При этом рассматривается модель расширенной игры, а для добавленных игроков (называемых связистами или коннекторами) вычисляются компоненты вектора Шепли.

Такой подход носит название коммуникативного расширения игры.

Постановка задачи коммуникативного расширения

Рассмотрим эффект расширения кооперативной игры с ограниченной кооперацией.

Пусть $N = \{1, 2, \ldots, n\}$ — конечное множество, на котором задана характеристическая функция кооперативной игры. Пусть элементы множества N являются вершинами некоторого неориентированного графа Г.

Предположим, что характеристическая функция $V(S)$ обладает свойствами неотрицательности и супераддитивности, это значит, что $(\forall S \in N)(V(S) \geq 0)$ для любых двух непересекающихся подмножеств $S, T \in N$ справедливо неравенство $V(S \cup T) \geq V(S) + V(T)$, а также выполнено условие $V(\varnothing) = 0$ (пустая коалиция ничего не зарабатывает).

Маргинальным вкладом игрока i в коалицию S (где $i \notin S$) называется величина $\mathrm{Add}(i,S) = V(S \cup i) - V(S)$.

Свойство характеристической функции, называемое «эффект снежного кома», состоит в том, что маргинальный вклад любого из игроков не уменьшается с ростом коалиции, или формально

$$(\forall S \subset T)(\forall i \notin T)(\mathrm{Add}(i,S) \leq \mathrm{Add}(i,T)).$$

Оказывается, что супераддитивность и эффект снежного кома являются равносильными свойствами (см., например [1]).

В [3], [4] была введена игра с ограниченной кооперацией на графе, и характеристическая функция игры определялась таким образом: $W_\Gamma = (V/\Gamma)$.

1. Если S — связное множество в Г, то $W_\Gamma(S) = V(S)$.

2. Если множество S не связно, то $W_\Gamma(S) = \sum V(T_k)$, где сумма берется по компонентам связности S в графе Г.

Будем называть пару (V, Г) расширенной игрой с ограниченной кооперацией. В данном случае V задает максимально возможный гипотетический выигрыш коалиции S при условии, что осуществима кооперация всех ее членов. Граф Г описывает реальные возможности кооперации. Поэтому S не может кооперировать всех своих участников и получать максимальный совместный выигрыш, если Г не содержит необходимых для осуществления этого ребер.

Рассмотрим расширенную игру с множеством игроков $N \cup \Gamma$, т. е. игроками расширенной игры, наряду с элементами множества N становятся ребра из Г, и допустимые коалиции данной игры имеют вид $S \cup \Lambda$, где $S \subset N, \Lambda \subset \Gamma$. Характеристическая функция такой игры определяется как $U(S \cup \Lambda) = (V/\Lambda)(S)$. Вектор Шепли Sh для данной характеристической функции вычисляется обычным образом, а его компоненты $\mathrm{Sh}_i(U), i \in N$ и $\mathrm{Sh}_{(i,j)}(U), (i,j) \in \Gamma$ описывают вклады игроков исходной игры, являющихся узлами графа и игроков-ребер, отвечающих за поддержание связи в максимально возможную полезность гранд-коалиции $N \cup \Gamma$ в расширенной игре $(V/\Gamma)(N)$.

Пример 1. Пусть $N = \{1, 2\}$, $V(\{1\}) = V(\{2\}) = 1$, $V(\{1, 2\}) = 4$ и пусть $\Gamma = \{(1, 2)\}$.

Это означает, что каждый из игроков 1 и 2 может самостоятельно заработать одну единицу. Они могут совместно заработать 4 единицы, но только лишь в том случае, если скооперируются, при отсутствии кооперации они получат лишь 2 единицы на двоих. В данном случае сеть имеет простейшую структуру и состоит только из одного ребра a = (1,2). Игрокам нужно использовать это ребро, чтобы получить дополнительно две единицы. Тогда характеристическая функция расширенной кооперативной игры имеет вид

$$U(\phi) = U(\{a\}) = 0, \quad U(\{1\}) = U(\{2\}) = U(\{1,a\}) = U(\{2,a\}) = 1,$$
$$U(\{1,2\}) = 2, \quad U(\{1,2,a\}) = 4,$$

а вектор Шепли равен Sh(1) = Sh(2) = 5/3, Sh(a) = 2/3.

Таким образом, владельцу ребра за установление кооперации между игроками 1 и 2 и, как следствие, увеличение их выигрыша, полагается доля в размере 2/3.

Рассмотренная игра является частным случаем так называемой игры с мультилинейным расширением, введенной в [2], [3]. При этом термин «мультилинейность» означает, что характеристическая функция игры формально представима в виде полиномиальной формы, линейной по индикаторам участия всех игроков в коалиции (хотя фактически индикаторы участия в коалиции принимают всего два значения: –1, если игрок присутствует в коалиции и 0 в противном случае).

Оуэном было доказано, что для любой характеристической функции игры существует ее единственное мультилинейное расширение, заданное внутри единичного n-мерного куба $[0,1]^{\times n}$, представимое в виде

$$f(x_1,\ldots,x_n) = \sum\nolimits_{S\subset N} \{\prod\nolimits_{j\in S} x_j \prod\nolimits_{j\notin S} (1-x_j)\}\ V(S)\,. \tag{1}$$

Если рассмотреть множество вершин $\alpha^S \in \{0,1\}^n$ заданного n-мерного куба $[0,1]^{\times n}$, представляющих собой n-мерные вектора с компонентами 0 либо 1, и задать взаимно-однозначное соответствие между вершинами и коалициями S, так что $\alpha_i^S = \chi\,(i \in S)$, то окажется, что значение (1), вычисленное в вершинах, совпадает с соответствующими значениями характеристической функции игры $V(S)$, т. е. $f(\alpha_i^S) = V(S)$.

Для рассмотренного примера характеристическая функция представима в виде

$$F(q_1, q_2, q_a) = q_1 + q_2 + 2q_1q_2q_a\,. \tag{2}$$

Для мультилинейной характеристической функции стандартным приемом нахождения вектора Шепли является нахождение ее частных производных по соответствующим аргументам, а затем их интегрирование вдоль диагонали единичного куба.

В данном случае

$$F_1 = \frac{\partial F}{\partial q_1} = 1 + 2q_2q_a, \quad F_2 = \frac{\partial F}{\partial q_2} = 1 + 2q_2q_a, \quad F_a = \frac{\partial F}{\partial q_a} = 2q_1q_2\,, \tag{3}$$

отсюда

$$\mathrm{Sh}(1) = \int_0^1 F_1(t,t,t)dt = \int_0^1 \left(1 + 2t^2\right)dt = 5/3 ,$$

$\mathrm{Sh}(2) = 5/3$ (вычисляется аналогично), и, наконец,

$$\mathrm{Sh}(a) = \int_0^1 F_a(t,t,t)dt = \int_0^1 2t^2 dt = 2/3 .$$

Одна из трактовок вектора Шепли, данных самим Ллойдом Шепли в [5] имеет такую вероятностную интерпретацию. Пусть задана характеристическая функция кооперативной игры, и пусть игроки присоединяются по одному случайным образом к гранд-коалиции так, что все перестановки, описывающие присоединение игроков, равновероятны. Тогда компонента вектора Шепли каждого из игроков равна математическому ожиданию его вклада в гранд-коалицию.

Такую равновероятность всех перестановок можно получить, предположив, что игроки присоединяются к гранд-коалиции в случайные моменты времени согласно заданной функции распределения, одинаковой для всех игроков. Вид функции распределения не имеет принципиального значения, единственным требованием является ее непрерывность для того, чтобы вероятность одновременного присоединения каких-либо двух игроков была бы равна нулю. Наиболее удобно с вычислительной точки зрения в данном случае использовать равномерное распределение.

Однако, возможно рассмотреть обобщение концепции вектора Шепли на случай, когда не обязательно все перестановки игроков равновероятны.

Предположим, что игроки присоединяются к коалиции во временном интервале [0, 1]. Пусть время прибытия i-го игрока задается функцией распределения $G_i(t), i = \overline{1,n}$, и для всех i $G_i(0) = 0, G_i(1) = 1$, где $G_i(t)$ — непрерывные функции на интервале [0,1]. В этом случае математическое ожидание маргинального вклада i-го игрока в гранд-коалицию (а следовательно, его компонента в обобщенном векторе Шепли) описывается интегралом

$$Z_i = \int_0^1 F_i\left(G_1(t),...,G_n(t)\right)dG_i(t) . \tag{4}$$

Покажем, как работает данная формула для ранее рассмотренного примера 1. Пусть по-прежнему $N = \{1, 2\}$, $V(\{1\}) = V(\{2\}) = 1$, $V(\{1, 2\}) = 4$, $\Gamma = \{(1, 2)\}$. Пусть моменты прихода обоих игроков независимы и имеют одинаковую функцию распределения $G_1(t) = G_2(t) = t$, а момент прихода ребра, обеспечивающего связь между ними, имеет вид $G_a(t) = 2t - t^2$.

Тогда подынтегральные функции в формуле (3) имеют вид

$$F_1\left(G_1(t), G_2(t), G_a(t)\right) = F_2\left(G_1(t), G_2(t), G_a(t)\right) = 1 + 2t(2t - t^2) = 1 + 4t^2 - 2t^3 ,$$

$$F_a\left(G_1(t), G_2(t), G_a(t)\right) = 2t^2 ,$$

а искомые компоненты обобщенного вектора Шепли (Z_1, Z_2, Z_a) равны:

$$Z_1 = Z_2 = \int_0^1 F_1\big(G_1(t), G_2(t), G_a(t)\big)dt = \frac{11}{6},$$

$$Z_a = \int_0^1 F_a\big(G_1(t), G_2(t), G_a(t)\big)dG_a(t) = \frac{1}{3}.$$

Если же положить, что $G_a(t) = t^2$, полагая $G_1(t)$ и $G_2(t)$ неизменными, то подынтегральные функции в (3) приобретают вид

$$F_1\big(G_1(t), G_2(t), G_a(t)\big) = F_2\big(G_1(t), G_2(t), G_a(t)\big) = 1 + 2t^3,$$

$$F_a\big(G_1(t), G_2(t), G_a(t)\big) = 2t^2,$$

тогда $Z_1 = Z_2 = \frac{3}{2}$, $Z_a = 1$.

Легко видеть, что по сравнению с классическим вектором Шепли компонента обобщенного вектора, соответствующая ребру графа, в первом случае уменьшилась, а во втором возросла. Заметим, что при этом функция распределения времени прихода ребра $G_a(t) = t$ в первом случае заменялась на $G_a(t) = 2t - t^2$, а во втором — на $G_a(t) = t^2$, что соответствует «стохастически меньшей» и «стохастически большей» случайным величинам, соответственно.

Покажем, что такая тенденция не случайна. Для этого сформулируем и докажем теорему о связи компонент обобщенного вектора Шепли и функциями распределения моментов присоединения игроков. Но предварительно напомним определения и основные свойства стохастических неравенств.

Определение 1. Известно, что случайная величина ξ_1 стохастически меньше величины ξ_2 (и это обозначается $\xi_1 \overset{st}{\leq} \xi_2$), если эти величины можно задать на одном вероятностном пространстве так, чтобы $\xi_1(\omega) \leq \xi_2(\omega)$ почти для всех $\omega \in \Omega$ (т. е. за исключением, может быть, множества ω меры ноль).

Свойство 1. Утверждение $\xi_1 \overset{st}{\leq} \xi_2$ равносильно утверждению, что для соответствующих функций распределения справедливо неравенство $(\forall x)\big(F_1(x) \geq F_2(x)\big)$.

Свойство 2. Утверждение $\xi_1 \overset{st}{\leq} \xi_2$ равносильно утверждению, что для любой неубывающей функции $g(x): R \to R$ справедливо неравенство $M\big(g(\xi_1)\big) \leq M\big(g(\xi_2)\big)$. В частности, из соотношения $\xi_1 \overset{st}{\leq} \xi_2$ следует $M(\xi_1) \leq M(\xi_2)$.

Свойство 3. Отношение «стохастически меньше», заданное на множестве случайных величин, является отношением частичного порядка (т. е. обладает свойствами рефлексивности, антисимметричности и транзитивности).

Теорема. Пусть задана кооперативная игра n игроков с супераддитивной характеристической функцией. Пусть $\tau_i, i=\overline{1,n}$ — случайные попарно независимые моменты присоединения игроков к гранд-коалиции с заданными (непрерывными) функциями распределения $F_i(t)$. Если заменить момент прихода k-го игрока τ_k на другой момент $\tau_k^{'}$, «стохастически больший» (так что $\tau_k \overset{\text{st}}{\le} \tau_k^{'}$), то компонента обобщенного вектора Шепли k-го игрока не уменьшится.

Доказательство. Зададим τ_k и $\tau_k^{'}$ на одном вероятностном пространстве так, чтобы любая реализация $\tau_k^{'}$ была бы не меньшей соответствующей реализации τ_k. Разыграем τ_k и $\tau_k^{'}$ так, что для реализаций этих величин справедливо неравенство $t_k \le t_k^{'}$ с вероятностью 1. И разыграем моменты присоединения к гранд-коалиции всех остальных игроков $t_i, i \ne k$.

Обозначим через S и $S^{'}$ множества индексов игроков, лежащих левее t_k и $t_k^{'}$ соответственно. Тогда очевидно, что для данной (равно как и для любой другой) реализации набора величин τ_i справедливо теоретико-множественное включение $S \subset S^{'}$. В силу предположения, характеристическая функция супераддитивна, следовательно, обладает эффектом снежного кома. Отсюда $\mathrm{Add}(k,S) \le \mathrm{Add}(k,S^{'})$. Но соответствующая компонента вектора Шепли равна интегралу от маргинального вклада по всем возможным исходам, отсюда

$$\left(\mathrm{Sh}(k)=\int\limits_{\omega\in\Omega}\mathrm{Add}(k,S)\right)\le\left(\mathrm{Sh}(k^{'})=\int\limits_{\omega\in\Omega}\mathrm{Add}(k,S^{'})\right).$$

Рассмотрим пример, который показывает, как ввиду разных распределений моментов присоединения игроков лидер и аутсайдер игры могут меняться местами.

Пусть в кооперативной игре принимают участие три игрока под порядковыми номерами 1, 2, 3 и этим игрокам присвоены индексы 5, 6 и 7 соответственно. Пусть характеристическая функция определяется как квадрат суммы индексов игроков, входящих в коалицию. Такая характеристическая функция супераддитивна (поскольку для любых двух положительных чисел квадрат суммы больше, чем сумма квадратов).

Найдем все возможные маргинальные вклады игроков и занесем их в таблицу 1 (например, $\mathrm{Add}(1,\{2,3\})=(5+6+7)^2-(6+7)^2=155$).

Таблица 1.

Возможные маргинальные вклады игроков

Игроки	Коалиции						
	ϕ	**1**	**2**	**3**	**{1,2}**	**{1,3}**	**{2,3}**
1	25	–	85	95	–	–	155
2	36	96	–	120	–	180	–
3	49	119	133	–	203	–	–

В классическом случае, когда все перестановки игроков равновероятны, компонента вектора Шепли для первого игрока может быть выражена через маргинальные вклады следующим образом:

$$\mathrm{Sh}(1) = \frac{1}{6}\left(2 \cdot \mathrm{Add}(1,\phi) + \mathrm{Add}(1,\{2\}) + \mathrm{Add}(1,\{3\}) + 2 \cdot \mathrm{Add}(1,\{2,3\})\right). \tag{5}$$

Формулы для вычисления компонент вектора Шепли для двух других игроков получаются из (5) циклической перестановкой номеров.

Вектор Шепли, вычисленный по формуле (5) и данным таблицы 1, имеет вид: $\mathrm{Sh} = (90,108,126)$.

Пусть теперь моменты прихода игроков имеют разное распределение, например: $G_1(t) = t^2, G_2(t) = t, G_3(t) = 2t - t^2$. Заметим, что на интервале $[0,1]$ справедливо неравенство $G_1(t) \le G_2(t) \le G_3(t)$, это означает, что для соответствующих случайных величин справедливо двойное неравенство с обратным знаком: $\tau_1 \overset{\mathrm{st}}{\ge} \tau_2 \overset{\mathrm{st}}{\ge} \tau_3$.

В общем случае вычисление вероятностей реализации перестановок приводит к громоздким формулам вычислений кратных интегралов. Однако, для случая трех игроков можно использовать формулу, содержащую лишь простой интеграл. Вероятность реализации перестановки (i_1, i_2, i_3) равна

$$p(i_1,i_2,i_3) = \int_0^1 G_{i1}(t)\left(1 - G_{i3}(t)\right) dG_{i2}(t). \tag{6}$$

Вероятности реализации перестановок, вычисленные по формуле (6), приведены в таблице 2.

Обобщение (5) на случай неравновероятных перестановок имеет вид:

$$\begin{aligned} \mathrm{Sh}(1) = \frac{1}{6}\Big(&\left(p(1,2,3) + p(1,3,2)\right) \cdot \mathrm{Add}(1,\phi) + \\ &+ p(2,1,3)\mathrm{Add}(1,\{2\}) + p(3,1,2)\mathrm{Add}(1,\{3\}))\Big) + \\ &+ \left(p(2,3,1) + p(3,2,1)\right)\mathrm{Add}(1,\{2,3\})), \end{aligned} \tag{7}$$

а обобщенный вектор Шепли, вычисленный на основании (7), равен $\mathrm{Sh} = \left(\frac{370}{3}, 112, \frac{266}{3}\right)$. Таким образом, лидер и аутсайдер поменялись местами.

Таблица 2.

Вероятности реализации вычисленных перестановок

Перестановка	(1,2,3)	(1,3,2)	(2,1,3)	(2,3,1)	(3,1,2)	(3,2,1)
Вероятность	1/30	2/30	2/30	7/30	7/30	11/30

Целью данной статьи является построение иллюстративных примеров, демонстрирующих эффективность метода коммуникативного расширения. Данный метод применяется для двух моделей — координации усилий и задачи оптимального выбора. Основным математическим аппаратом является классическая теория кооперативных игр, с которой можно ознакомиться в [6].

Коммуникативное расширение игры «координация усилий»

Классическая игра «координация усилий» является простым примером, приводимым в ряде учебников по теории игр как иллюстрация того, что биматричная игра может иметь несколько равновесий по Нэшу с различными выплатами игрокам. Пусть каждый из двух игроков имеет две стратегии — не работать (1) или работать (2). В случае выбора стратегии «работать» затраты труда оцениваются в 1. Если другой игрок также выбирает стратегию «работать», то их совместные усилия приносят каждому по 2 единицы, и таким образом, прибыль каждого составляет 1 единицу. Если же один из игроков выбирает стратегию «работать», а второй — «не работать», то первый проигрывает 1. Тот, кто выбирает стратегию «не работать» ничего не выигрывает и не проигрывает. Таким образом, данная биматричная игра имеет матрицу выигрышей

$$A = \begin{pmatrix} (0,0) & (0,-1) \\ (-1,0) & (1,1) \end{pmatrix}.$$

Очевидно, данная игра имеет две точки равновесия (1,1) и (2,2), причем ситуация (2,2) является более выгодной обоим игрокам.

Предположим теперь, что игроки оказываются работоспособными с вероятностями p_1, p_2, соответственно, и неработоспособными с дополнительными вероятностями. Работоспособный игрок может выбирать любую из двух стратегий, а неработоспособный — только «не работать».

В данной игре у каждого из игроков по прежнему существует две стратегии — работать или не работать, находясь в работоспособном состоянии. Тогда данная игра имеет платежную матрицу

$$B = \begin{pmatrix} (0,0) & (0,-p_2) \\ (-p_1,0) & (p_1(2p_2-1),\, p_2(2p_1-1)) \end{pmatrix}.$$

При $p_1 > \frac{1}{2}, p_2 > \frac{1}{2}$ ситуация («работать» — «работать») является точкой равновесия по Нэшу, которая доминирует по Парето ситуацию («не работать» — «не работать»).

Предположим теперь, что у каждого из игроков появилась возможность узнавать о состоянии партнера. Тогда, очевидно, оптимальной стратегией каждого из игроков является «работать», если партнер работоспособен, и «не работать» — в противном случае. При этом ожидаемая величина выигрыша каждого составляет $p_1 p_2$.

Пусть двусторонняя связь между партнерами обеспечивается третьим лицом (связистом), который до принятия решения игроками может с вероятностью p_3 обеспечить им двустороннюю связь и они, таким образом, узнают о состоянии друг друга. Однако, связист желает получить некоторую плату за дополнительную выгоду, возникающую вследствие предоставленных им услуг.

Тогда характеристическая функция такой игры имеет вид:

$$V(1) = p_1(2p_2 - 1), \quad V(2) = p_2(2p_1 - 1), \quad V(c) = 0,$$

$$V(1,2) = V(1) + V(2) = 4p_1 p_2 - p_1 - p_2,$$

$$V(1,c) = V(1) = p_1(2p_2 - 1), \quad V(2,c) = V(2) = p_2(2p_1 - 1),$$

$$V(1,2,c) = 2p_1 p_2 p_3 + (4p_1 p_2 - p_1 - p_2)(1 - p_3).$$

Перейдем к приведенной игре с характеристической функцией $W(S) = V(S) - \sum_{i \in S} V(i)$, тогда $W(1,2,c) = p_3(p_1 + p_2 - 2p_1 p_2)$, а для всех остальных коалиций значение W равно нулю. В этом случае вектор Шепли равен

$$\big(V(1) + W(1,2,c)/3, V(2) + V(1,2,c)/3, V(1,2,c)/3\big) =$$

$$= \big(p_1(2p_2 - 1) + p_3(p_1 + p_2 - 2p_1 p_2)/3, p_2(2p_1 - 1) +$$

$$+ p_3(p_1 + p_2 - 2p_1 p_2)/3, p_3(p_1 + p_2 - 2p_1 p_2)/3\big).$$

При $p_1 \le \frac{1}{2}$ либо $p_2 \le \frac{1}{2}$ ситуация «не работать» — «не работать» в условиях неинформированности является единственным равновесием по Нэшу, значение характеристической функции от гранд-коалиции составляет $V(1,2,c) = 2p_1 p_2 p_3$, для всех остальных коалиций она равна нулю, и следовательно, вектор Шепли равен $\left(\frac{2}{3}p_1 p_2 p_3, \frac{2}{3}p_1 p_2 p_3, \frac{2}{3}p_1 p_2 p_3\right)$.

Коммуникативная игра в задаче оптимального выбора

Рассмотрим кооперативную коммуникативную игру в задаче оптимального выбора, в которой принимают участие два игрока и третье лицо, обеспечивающее обмен информацией между ними (связист).

Вначале приведем основные результаты по классической задаче оптимального выбора с одним участником (или задаче секретаря). Пусть некто в случайном порядке знакомится с n объектами и хочет выбрать среди них наилучший. При этом после ознакомления с очередным объектом нужно либо остановить на нем свой выбор, либо отвергнуть его; возвращаться к ранее просмотренным объектам нельзя. Объекты являются упорядоченными определенным образом по качеству, т. е. качества любых двух объектов сравнимы между собой. «Ознакомление в случайном порядке» означает, что изначально все $n!$ перестановок, задающих порядок просмотра объектов, равновероятны.

Объект, наилучший среди всех n, в дальнейшем будем называть *наилучшим,* а объект, лучший среди k просмотренных, — *максимальным.* Очевидно, что в ходе просмотра следует анализировать целесообразность остановки выбора на некотором объекте, только если он является максимальным. При этом оказывается, что первый объект является максимальным и индексы максимальных объектов образуют цепь Маркова с переходными вероятностями $p(k,j)=\dfrac{k}{j(j-1)},\ j>k$. Более того, независимо от того, был ли k-й элемент максимальным или нет, вероятность того, что среди элементов с индексами $k+1,...,n$ минимальный индекс максимального элемента будет j, равна $\dfrac{k}{j(j-1)},\ j>k$ и с вероятностью $\dfrac{k}{n}$ в последовательности $k+1,...,n$ не встретится ни одного максимального элемента.

Доказано, что для того, чтобы выбрать наилучший объект из n, нужно придерживаться такой стратегии: вначале пропустить все элементы с индексами $1,...,k^*-1$ и затем остановить свой выбор на первом максимальном элементе, индекс которого не меньший k^*, где k^* определяется из двойного неравенства

$$\frac{1}{k^*}+...+\frac{1}{n-1}\le 1<\frac{1}{k^*-1}+...+\frac{1}{n-1}. \tag{8}$$

Оказывается, что при $n\to\infty$ $\dfrac{k}{n}\to\dfrac{1}{e}$, а вероятность выбора наилучшего объекта при соблюдении описанной стратегии стремится к 1/e. Множество индексов, на которых возможна остановка, будем обозначать $\Gamma^*=\{k^*,...,n\}$ и называть опорным множеством.

Перейдем непосредственно к постановке игровой задачи. Пусть в игре принимают участие два игрока, и каждый осуществляет выбор наилучшего элемента из одного множества, и пусть второму игроку разрешено осуществлять свой поиск лишь после того, как первый игрок уже закончил просмотр и остановился на некотором максимальном элементе, в противном случае выигрыш второго игрока полагается равным нулю.

Пусть n — количество объектов, из которых игроки производят выбор. Предположим, что n — достаточно большое число и возникающие в последующих рассуждениях суммы можно заменять их предельными значениями.

Предположим, что первый и второй игроки придерживаются таких пороговых стратегий — пропустить k_1 и k_2 элементов соответственно и остановиться на первом максимальном элементе. Обозначим $\frac{k_1}{n} = x, \frac{k_2}{n} = y$.

Тогда выигрыш первого игрока равен

$$\sum_{j=k1+1}^{n} \frac{k}{j(j-1)} \frac{j}{n} = \frac{k_1}{n} \sum_{j=k1+1}^{n} \frac{1}{j-1} \sim x\int_{x}^{1} \frac{1}{t} dt = -x\ln(x).$$

Чтобы найти выигрыш второго игрока, нужно, согласно формуле полной вероятности, просуммировать по j от k_2+1 до n произведение трех вероятностей — вероятности того, что в последовательности $k_2+1,...,n$ j-й элемент окажется первым из максимальных (эта вероятность равна $\frac{k_2}{j(j-1)}$); вероятности того, что j-й элемент окажется наилучшим и является максимальным (эта вероятность равна $\frac{j}{n}$) и вероятности того, что первый игрок, начав свой просмотр с элемента k_1+1, остановился на некотором максимальном элементе с индексом меньшим, чем j (эта вероятность равна $\sum_{i=k1+1}^{j-1} \frac{k_1}{i(i-1)}$).

Таким образом, искомая величина равна

$$\sum_{j=k2+1}^{n} \frac{k_2}{j(j-1)} \frac{j}{n} \cdot \sum_{i=k1+1}^{j-1} \frac{k_1}{i(i-1)} = \frac{k_2}{n} \sum_{j=k2+1}^{n} \frac{1}{j-1}\left[k_1\left(\frac{1}{k_1} - \frac{1}{j-1}\right)\right] =$$

$$= \frac{k_2}{n} \sum_{j=k2+1}^{n} \frac{1}{j-1}\left(1 - \frac{k_1}{j-1}\right) =$$

$$= \frac{k_2}{n} \sum_{j=k2+1}^{n} \frac{1}{j-1} - \frac{k_1 k_2}{n} \sum_{j=k2+1}^{n} \frac{1}{(j-1)^2} \sim -y\ln(y) - xy\int_{y}^{1} \frac{1}{t^2} dt = -y\ln(y) - x(1-y).$$

Переходя к непрерывным функциям выигрыша, имеем:

$$F_1(x,y) = -x\ln(x); \quad F_2(x,y) = -y\ln(y) - x(1-y).$$

Предположим, что игроки действуют независимо друг от друга, каждый в собственных интересах и нет информированности о действиях друг друга (в данном случае это означает, что второй игрок не знает момента остановки первого). При данном сценарии первый игрок минимизирует функцию $F_1(x,y)$ по x, поскольку она не зависит от y:

$$\frac{\partial F_1}{\partial x} = -\ln(x) - 1 = 0 \quad \Rightarrow x_0 = \frac{1}{e} \approx 0.368.$$

Подставляя полученное значение $x = x_0$ в $F_2(x, y)$ и дифференцируя полученное выражение по y, имеем:

$$\frac{\partial F_2(x_0, y)}{\partial y} = -\ln(y) - 1 + \frac{1}{e} = 0 \Rightarrow y_0 = e^{-1+1/e} \approx 0.531 .$$

Тогда, выигрыш игроков, действующих изолированно и в условиях отсутствия информации о моменте остановки, составляет

$$V(1) = F_1(x_0) = 1/e \approx 0.368, \quad V(2) = F_2(x_0, y_0) = e^{-1+1/e} - e^{-1} \approx 0.164 .$$

Рассмотрим теперь ситуацию, когда игроки объединяются в коалицию с целью максимизации суммарного выигрыша, но по прежнему отсутствует информация о моменте остановки первого игрока. Обозначим суммарный выигрыш первого и второго игроков через $F_{12}(x, y)$, тогда

$$F_{12}(x, y) = F_1(x, y) + F_2(x, y) = -x\ln(x) - y\ln(y) - x(1 - y) .$$

Для того, чтобы найти точку максимума функции $F_1(x, y)$, найдем частные производные $F_{12}(x, y)$ по x и по y и приравняем их нулю:

$$\frac{\partial F_{12}(x, y)}{\partial x} = -\ln(x) - 1 - y = 0, \quad \frac{\partial F_{12}(x, y)}{\partial y} = -\ln(y) - 1 + x = 0 ,$$

что приводит к системе уравнений

$$\begin{cases} x = \ln(y) + 1 \\ x = e^{-2+y} \end{cases} .$$

Численное решение данной системы имеет вид:

$$x_1 \approx 0.213, \quad y_1 \approx 0.455, \quad F_{12}(x_1, y_1) \approx 0.572.$$

Простая проверка показывает, что найденная стационарная точка функции $F_2(x, y)$ удовлетворяет достаточным условиям существования экстремума и при этом является точкой максимума.

Заметим, что найденные значения x_1 и y_1 меньше, чем x_0 и y_0, соответственно. Качественно это означает, что первый игрок сдвигает свое пороговое значение влево для того, чтобы уступить пространство второму игроку и повысить его возможности для просмотра. Второй игрок использует предоставленную ему возможность и также сдвигает свое пороговое значение влево.

Для сравнения, $F_1(x_0) + F_2(x_0, y_0) \approx 0.368 + 0.164 \approx 0.532$ и, таким образом, цена анархии данной игры составляет $0.572 / 0.532 \approx 1.075$.

Предположим, что в игру включается третий игрок, называемый связистом, который может сообщить второму игроку о моменте остановки первого игрока. Это не повлияет на выигрыш первого игрока. Найдем выигрыш второго игрока при такой дополнительной информации.

Если $x \geq 1/e$, то второй игрок начинает просмотр непосредственно после окончания просмотра первым, и, таким образом, выигрыш второго игрока составляет

$$F_{2*}(x) = \sum_{k=k1}^{n} \frac{k_1}{i(i-1)} \cdot \sum_{j=i+1}^{n} \frac{i}{j(j-1)} \frac{j}{n} =$$

$$= \frac{k_1}{n} \sum_{i=k1}^{n} \frac{1}{i-1} \sum_{j=i+1}^{n} \frac{1}{j-1} \sim x \int_{t=x}^{1} \frac{1}{t} \int_{u=t}^{1} \frac{1}{u} du\, dt = \frac{x \ln^2(x)}{2}.$$

Если $x \leq 1/e$, то второй игрок начнет свой просмотр, начиная с элемента *n*/*e*. Если первый игрок закончит просмотр раньше, чем на элементе *n*/*e* (вероятность такого события составляет (1-*ex*)), и его выигрыш составит 1/*e*. Если же первый игрок закончит просмотр на элементе *n*/*e* или позже (вероятность такого события составляет *ex*), то второй игрок начнет просмотр на элементе, непосредственно следующем за тем, на котором остановил просмотр 1-й игрок, и условное математическое ожидание выигрыша в этом случае составит $F_{2*}\left(\frac{1}{e}\right) = \frac{1}{2e}$, тогда, согласно формуле полной вероятности,

$$F_{2*}(x) = (1 - ex)\frac{1}{e} + ex\frac{1}{2e} = \frac{1}{e} - \frac{x}{2}.$$

Таким образом,

$$F_{2*}(x) = \begin{cases} \frac{1}{e} - \frac{x}{2}, x \leq \frac{1}{e} \\ \frac{x \ln^2(x)}{2}, x \geq \frac{1}{e} \end{cases}.$$

При $x \leq 1/e$ совместный выигрыш первого и второго игроков составляет

$$F_{12*}(x) = F_1(x) + F_{2*}(x) = -x \ln(x) - \frac{x}{2} + \frac{1}{e}.$$

Найдем точку максимума $F_{12*}(x)$. Из условия $\frac{dF_{12*}(x)}{dx} = 0$ имеем: $\ln(x) = -3/2$, отсюда $x_2 = e^{-3/2}$, что соответствует условию $x \leq 1/e$,

$$F_{12*}(e^{-3/2}) = e^{-1} + e^{-3/2} \approx 0.591.$$

При $x \geq 1/e$ совместный выигрыш первого и второго игроков составляет

$$F_{12*}(x) = F_1(x) + F_{2*}(x) = -x \ln(x) + \frac{x \ln^2(x)}{2}.$$

В этом выражении оба слагаемых являются монотонно убывающими функциями на интервале $[1/e; 1]$, $F_{12*}(1/e) = 1.5e^{-1} \approx 0.552 < F_{12*}(e^{-3/2})$.

Таким образом, функция $F_{12*}(x)$ достигает максимума при $x = e^{-3/2}$ и равна $e^{-1} + e^{-3/2} \approx 0.591$.

Если же игроки действуют каждый в своих интересах, но второй игрок информирован о моменте остановки первого игрока, то их выигрыши составят $V(1) = F_1(1/e) = 1/e$, $V(2) = 0.164$ и, таким образом, цена анархии составит $\frac{0.591}{0.368 + 0.164} = 1.071$.

Вычисление вектора Шепли для данной кооперативной игры представлено в таблице 3.

Таблица 3.

Вычисленные вектора Шепли для рассмотренной кооперативной игры

Перестановки	**Игроки**		
	1	**2**	**C**
1,2,c	0.368	0.204	0.019
2,1,c	0.408	0.164	0.019
1,c,2	0.368	0.223	0
2,c,1	0.407	0.164	0.020
c,1,2	0.368	0.223	0
c,2,1	0.407	0.184	0
Shapley	0.388	0.194	0.010

Таким образом, характеристическая функция кооперативной игры с двумя игроками и связистом при наличии трансферабельной полезности имеет вид:

$$V(1) = 1/e \approx 0.368, \quad V(2) \approx 0.164, \quad V(c) = 0,$$

$$V(1,2) \approx 0.572, \quad V(1,c) = V(1) \approx 0.368, \quad V(2,c) = \frac{1}{2e} \approx 0.184,$$

$$V(1,2,c) = e^{-1} + e^{-3/2} \approx 0.591.$$

Рассмотренный во введении метод построения линейного расширения кооперативной игры позволяет вычислять вектор Шепли для задач большей размерности и более сложной структуры, чем приведенные в статье примеры.

Выводы

Рассмотренные примеры наглядно демонстрирует эффект повышения выигрышей игроков за счет введения дополнительного агента, обеспечивающего взаимодействие между ними и называемого связистом. Компонента вектора Шепли связиста характеризует его вознаграждение за обеспечение связи между игроками (в рассмотренных примерах она незначительна).

1. Tijs S. Introduction to game theory / S. Tijs // Hindustan book agency. — 2003.
2. Owen G. Multilinear Extensions of Games / G. Owen // Management Science. — 1972. — P. 64–79.
3. Owen G. Values of Graph-Restricted Games / G. Owen // SIAM J Alg. Disc. Math. —1986. — P. 210–220.
4. Myerson R. Graphs and Cooperation in Games / R. Myerson // Math. Op. Res. — 1977. — P. 225–229.

5. Shapley L. A value for n-person games / L. Shapley // Contributions to the Theory of Games. — Princeton University Press. — 1953.— P. 307–317.
6. Мазалов В.В. Математическая теория игр и приложения / В.В. Мазалов // Спб.: Изд-во «Лань», 2010. — 446 с.

UDC 681.5

ON GAME-THEORETICAL APPROACH IN ACTION COORDINATION PROBLEMS WITH INFORMATION EXCHANGE

S.I. Dotsenko

Taras Shevchenko National University of Kyiv

Introduction. Cooperative game theory is integral part of modern economics. The founder of this theory is Lloyd Shapley, who became Nobel prize winner in economics in 2012. In classical cooperative game theory the characteristic function of the game is rigidly defined and remains unchanged. The futher research are aimed at so-called extended games, when the extra players may be induced into the game. The extra players don't participate in the game immediately, but they provide the connection between the origin players and so, may change the characteristic function of the game. For the extended game the Shapley values are calculated for origin and extra players equally well.

Results. The Shapley values for extended communication games, based on both forces, coordination game and secretary problem are obtained in explicit form. As accessory result, the theorem on stochastic inequality for Shapley values in the case of player's non-uniform joining times to coalition is proved and then illustrated by vivid example.

Conclusions. The considered examples vividly illustrate winnings increment effect, stipulated by extra agent induction. This agent is aimed to provide the connection between the other players and is called a connector. Connector's Shapley value characterizes his fair salary for connection provision. A linear extension function's method provides the analysis of Shapley value calculation for problems of more sophisticated structure, than delivered above.

Keywords: cooperative game, communicative extension, Shapley value, stochastic inequality, optimal choice problem.

1. Tijs S. *Introduction to game theory*. Hindustan book agency. 2003.
2. Owen G. *Multilinear Extensions of Games*. Management Science. 1972, pp. 64–79.
3. Owen G. Values of Graph-Restricted Games. *SIAM J Alg. Disc. Math*. 1986, pp. 210–220.
4. Myerson R. *Graphs and Cooperation in Games*. Math. Op. Res. 1977, pp. 225–229.
5. Shapley L. *A value for n-person games. Contributions to the Theory of Games*. Princeton University Press. 1953, pp. 307–317.
6. Mazalov V.V. *Mathematical game theory and it's applications.* Saint Petersburg, «Lan» 2010, 446 p. (in Russian).

Получено 30.09.2014