

ПРИНЯТИЕ РЕШЕНИЙ ПРИ СОГЛАСОВАННЫХ ЭКСПЕРТНЫХ ОЦЕНКАХ ПАРНЫХ СРАВНЕНИЙ

Н.И. НЕДАШКОВСКАЯ

Рассмотрены две группы методов парных сравнений для нахождения относительных весов альтернатив решений на основе экспертных оценок: методы типа «линия» и «треугольник». В методах типа «линия» веса n альтернатив вычислены на основании $n - 1$ экспертных оценок парных сравнений, выполненных в шкале, и предполагается полная согласованность знаний эксперта. Методы типа «треугольник» для вычисления весов требуют избыточное количество $n(n - 1)/2$ экспертных оценок, которые используются для оценивания согласованности знаний эксперта. Проведено сравнение результатов, полученных этими двумя группами методов. Используя моделирование работы эксперта высокой компетентности при оценивании альтернатив решений методами парных сравнений в шкале Саати, получены оценки ошибок весов, вычисленных методами типа «треугольник» и «линия». Показано, что условие полной согласованности экспертных оценок парных сравнений, которые выполнены в шкале, может внести дополнительную ошибку при построении матрицы парных сравнений и, следовательно, в результирующие веса.

ВВЕДЕНИЕ

Методы парных сравнений используются для вычисления относительных весов альтернатив решений по критерию решений на основании экспертных оценок. Суть этих методов состоит в том, что эксперт сравнивает все или некоторые пары альтернатив в предлагаемой ему шкале. В [1, 2] разработан метод, назовем его «треугольник», в соответствии с которым все альтернативы попарно сравниваются в шкале отношений и в результате эксперт дает $n(n - 1)/2$ оценок, где n — количество альтернатив. Эти оценки записываются в матрицу $D_{n \times n} = \{d_{ij} | i, j = 1, \dots, n\}$ парных сравнений (МПС), $d_{ij} > 0$, для которой справедливо свойство обратной симметричности $d_{ji} = 1/d_{ij}$. Непротиворечивость экспертных оценок парных сравнений определяется с помощью показателей несогласованности CR , GCI , HCR , CI^tr МПС. Описание и анализ этих показателей выполнены в [3, 4]. Известен критерий, который определяет уровень допустимой несогласованности МПС [1, 2]. Метод «треугольник» обоснован только для допустимо несогласованных МПС. Для улучшения согласованности МПС применяют обратную связь с экспертом или подходы [5] без участия эксперта, которые корректируют МПС в зависимости от уровня ее согласованности.

Так как количество экспертных оценок, равное $n(n - 1)/2$, избыточно, в [6–8] разработаны методы парных сравнений типа «линия», которые уменьшают нагрузку на эксперта. В этих методах предполагается полная согласованность знаний эксперта и поэтому от эксперта требуется только

$n - 1$ оценок. В методах [6, 7] эксперт сравнивает все альтернативы решений с одним выбранным объектом. В методе [8] выбираются ведущие пары альтернатив, которые сравниваются.

Считается, что полная согласованность (непротиворечивость) оценок — идеальный случай, к которому следует стремиться эксперту, выполняя парные сравнения [6–8, 10]. Однако, если эксперт дал согласованные оценки, то они не обязательно отображают истинные веса сравниваемых альтернатив.

Цель работы — сравнение точности результатов, получаемых методом «линия» на основании полностью согласованных экспертных оценок парных сравнений и методом «треугольник» без наложения требования полной согласованности.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Дано: $A = \{a_i \mid i = 1, \dots, n\}$ — множество альтернатив решений; C — характеристика, по которой сравниваются эти альтернативы, в дальнейшем — критерий решений.

Необходимо определить $w = \{w_i \mid i = 1, \dots, n\}$ — нормированные относительные веса (в дальнейшем — веса) альтернатив по критерию C , $w_i > 0$,

$$\sum_{i=1}^n w_i = 1.$$

Пусть высококомпетентный эксперт проводит оценивание альтернатив решений из A методом парных сравнений в шкале отношений. Одной из таких шкал, которая часто используется, является *шкала Саати 1–9*, в которой 1 соответствует одинаковой важности сравниваемых элементов, 3 — слабому превосходству, 5 — сильному превосходству, 7 — очень сильному превосходству, 9 — абсолютному превосходству и 2, 4, 6, 8 — промежуточным значениям [1, 2]. Если a_i превышает (важнее) a_j , то в соответствии со шкалой Саати, величина этого превосходства d_{ij} принимает значения из дискретного множества $\{2, \dots, 9\}$. В противном случае — с множества $\{1/9, 1/8, \dots, 1/2\}$.

Под определением «*высококомпетентный*» понимается эксперт, который дает оценки альтернатив, наиболее соответствующие реальным весам $w_i^{\text{реал}}$ этих альтернатив. А именно, если эксперт оценивает отношение $w_i^{\text{реал}} / w_j^{\text{реал}}$ реальных весов, то наиболее соответствующая его оценка d_{ij}^* — это ближайшее к $w_i^{\text{реал}} / w_j^{\text{реал}}$ деление шкалы. Ошибки, присутствующие в оценках этого эксперта, обусловлены точностью используемой шкалы. Оценки такого эксперта будут моделироваться в данной работе.

Необходимо исследовать влияние требования полной согласованности (непротиворечивости) экспертных оценок парных сравнений, выполненных в шкале отношений Саати, на точность вычисленных весов w_i , а также оценить неопределенность, которую вносит шкала Саати в оценки эксперта. Точность будет оцениваться значением нормы отклонения вектора вычисленных весов от вектора известных реальных весов.

МЕТОДЫ ПАРНЫХ СРАВНЕНИЙ «ТРЕУГОЛЬНИК» И «ЛИНИЯ»

Метод «треугольник». Эксперт попарно сравнивает все альтернативы в шкале Саати и по результатам строится матрица парных сравнений (МПС):

$$D_{n \times n} = \{d_{ij} \mid i, j = 1, \dots, n\}, \quad d_{ji} = 1/d_{ij}, \quad d_{ij} \in L = \left\{ \frac{1}{9}, \frac{1}{8}, \frac{1}{7}, \dots, \frac{1}{2}, 1, 2, 3, \dots, 8, 9 \right\}.$$

Элементы МПС показывают отношения неизвестных значений весов альтернатив по критерию решений:

$$d_{ij} = \frac{v_i}{v_j} \varepsilon_{ij}, \quad (1)$$

где $\varepsilon_{ij} > 0$ — возмущение.

Вектор ненормированных весов v вычисляется методами EM (eigen-vector method — метод главного собственного вектора), RGMM (row geometric mean method — метод геометрической средней по строкам) и др. [9]. В соответствии с методом EM, вектор весов v — это собственный вектор МПС, соответствующий ее наибольшему собственному значению [1, 2]. Среди оптимизационных наибольшее распространение получил метод логарифмических наименьших квадратов (другое название — метод геометрической средней RGMM). Согласно методу RGMM, вектор весов v — тот, при котором достигается минимальная суммарная ошибка в (1) [9]:

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (\ln \varepsilon_{ij})^2 \rightarrow \min \text{ при ограничениях } \prod_{i=1}^n v_i = 1 \text{ и } v_i > 0, \quad i = 1, \dots, n,$$

$$\text{тогда } v_i = \left(\prod_{j=1}^n d_{ij} \right)^{1/n}.$$

Вычисленные на основании МПС веса v имеют смысл, если возмущение $\delta_{ij} = |\varepsilon_{ij} - 1|$ в (1) мало. Величина возмущения связывается с понятием согласованности МПС.

МПС $D_{n \times n} = \{d_{ij} \mid i, j = 1, \dots, n\}$ называется *полностью согласованной* (далее с целью сокращения — *согласованной*), если $d_{ij} = d_{ik} d_{kj}$ для $\forall i, j, k = 1, \dots, n$.

МПС согласована тогда и только тогда, когда в (1) $\varepsilon_{ij} = 1 \quad \forall i, j = 1, \dots, n$.

МПС согласована тогда и только тогда, когда $CR = 0, \quad GCI = 0, \quad HCR = 0, \quad CI^tr = 0$.

Небольшой уровень несогласованности МПС приемлем на практике: *несогласованность МПС допустима*, если показатель несогласованности CR не превышает установленное для него пороговое значение [1].

МПС D согласована тогда и только тогда, когда ее ранг $\text{rang}(D) = 1$ и $d_{ii} = 1$. Следовательно, согласованная МПС определяется одним своим столбцом (строкой).

В [6] разработан метод «линия», в котором эксперт выполняет парные сравнения альтернатив с одной выбранной альтернативой и имеет место полная согласованность знаний эксперта.

Метод «линия». Рассмотрим метод «линия» с выбором эталонной альтернативы [6], когда экспертные оценки выполнены в шкале отношений. Эксперт выбирает a_e — эталонную альтернативу и, используя шкалу, сравнивает все остальные альтернативы $a_i \in A, i \neq e$ с эталонной a_e . По результатам формируется вектор $D_e = \{d_{ie} \mid i = 1, \dots, n\}$ степеней преобладания a_i над a_e . Ненормированные веса альтернатив выражаются через вес эталона: $v_i = v_e \varphi_{mult}(d_{ie}) \quad \forall i \neq e, \varphi_{mult}(1) = 1$, где φ_{mult} — монотонная функция. Часто используется функция $v_i = v_e d_{ie}$. Выполняется нормирование всех весов и вычисляются относительные веса альтернатив $w_i = v_i / \sum_{i=1}^n v_i$.

Веса, вычисленные описанным выше методом «линия» на основании вектора D_e при $v_i = v_e d_{ie}$, очевидно, совпадают с весами по методу «треугольник» на основании согласованной МПС, которая построена по вектору D_e .

СРАВНЕНИЕ ТОЧНОСТИ РЕЗУЛЬТАТОВ, ПОЛУЧАЕМЫХ МЕТОДАМИ «ТРЕУГОЛЬНИК» И «ЛИНИЯ»

Пример. Пусть известен вектор весов $w^{\text{реал}} = (0,45; 0,25; 0,10; 0,20)$ четырех альтернатив, $n = 4$. Не сообщая этих значений, высококомпетентного эксперта попросили попарно сравнить альтернативы в шкале Саати. По оценкам этого эксперта построена МПС D^* , такая что d_{ij}^* — ближайшее к матрице

$\left(\frac{w_i^{\text{реал}}}{w_j^{\text{реал}}} \right)$ деление шкалы:

$$D^* = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 & 2 \\ \frac{1}{2} & 1 & 3 & 1 \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{3} & 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}. \quad (2)$$

Показатель несогласованности $CR(D^*) = 0,006 \neq 0$, поэтому D^* не является согласованной. Вектор весов по методу главного собственного вектора ЕМ, на основе МПС D^* (2):

$$w^* = w^{EM}(D^*) = (0,455; 0,238; 0,092; 0,215), \quad (3)$$

Cheb (чебышевская) и *E* (эвклидова) нормы отклонения $w^{EM}(D^*)$ от $w^{\text{реал}}$ равны

$$Cheb(w^*, w^{\text{реал}}) = 0,015 \text{ и } E(w^*, w^{\text{реал}}) = 0,021. \quad (4)$$

Теперь оценим влияние требования согласованности экспертных оценок на точность результирующих весов. Пусть эксперт выбрал в качестве эталона a_e альтернативу a_4 . Вектор оценок парных сравнений в шкале Саати, ближайших к отношениям истинных весов

$$d^4 = \begin{pmatrix} \frac{w_1^{\text{реал}}}{w_4^{\text{реал}}} \\ \frac{w_2^{\text{реал}}}{w_4^{\text{реал}}} \\ \frac{w_3^{\text{реал}}}{w_4^{\text{реал}}} \\ 1 \end{pmatrix}^T \quad (5)$$

совпадает с четвертым столбцом МПС D^* (2). Вектор весов по методу «линия» на основе d^4 :

$$w^4 = (0,444 \quad 0,222 \quad 0,111 \quad 0,222). \quad (6)$$

Вектор w^4 , очевидно, равен вектору весов по методу главного собственного вектора, если на основании d^4 (5) построить согласованную МПС D^4 :

$$D^4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 2 \\ \frac{1}{2} & 1 & 2 & 1 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad w^4 = w^{EM}(D^4). \quad (7)$$

Значения чебышевской и евклидовой норм отклонения w^4 (6) от $w^{\text{реал}}$

$$Cheb(w^4, w^{\text{реал}}) = 0,075, \quad E(w^4, w^{\text{реал}}) = 0,094$$

значительно превышают соответствующие значения норм (4).

Таким образом, отказ от требования согласованности (полной согласованности) экспертных оценок (матрица (2)) привел к результатам (3) практически в 5 раз более точным, чем результаты (6) из согласованных оценок (5) и (7). МПС D^* (2) есть небольшое возмущение (так как $CR(D^*) = 0,006 \approx 0$) некоторой согласованной МПС X , недостижимой в шкале Саати.

МОДЕЛИРОВАНИЕ ВЕСОВ ПО МЕТОДАМ «ТРЕУГОЛЬНИК» И «ЛИНИЯ»

Для оценивания точности результирующих весов, получаемых методами типа «треугольник» и «линия», проведем компьютерное моделирование.

Генерация ненормированных весов $v_i^{\text{реал}} \in R, i=1, \dots, n$ случайным образом

Если для $v_i^{\text{реал}}$ использовать равномерный закон распределения в интервале

$[1, 9]$, то отношение $\frac{v_i^{\text{реал}}}{v_j^{\text{реал}}}$ двух равномерно распределенных величин будет

иметь более сложное распределение со значениями, сконцентрированными около середины интервала $[1/9, 9]$.

Для получения МПС с более равномерно распределенными элементами в данной работе предлагается метод генерирования весов, в соответствии с которым значения $v_i^{\text{реал}}$ выбираются случайным образом из подинтервалов интервала $[1, b]$: $v_i^{\text{реал}} \in \text{random} [1 + (i - 1) dx; 1 + i dx]$, $dx = \frac{b - 1}{n}$, $i = 1, \dots, n$, где величина b подобрана эмпирически и зависит от n (рисунок). При таком генерировании, без потери общности, предполагается, что альтернативы перенумерованы в порядке убывания важности.

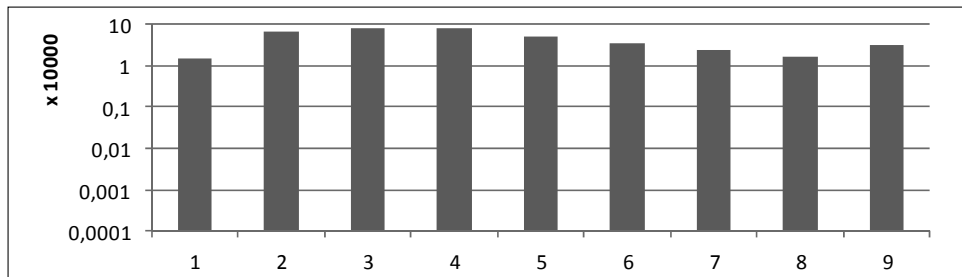


Рисунок. Гистограмма распределения количества элементов моделируемых МПС по делениям шкалы Саати (значения по горизонтальной оси), интервал $[1, 15]$, выборка 10^5 МПС, $n = 5$

После нормировки $w_i^{\text{реал}} = v_i^{\text{реал}} / \sum_k v_k^{\text{реал}}$ вектор $w^{\text{реал}}$ будем называть

вектором реальных весов. Далее, на основании $w^{\text{реал}}$, вычисляется входная информация для исследуемых методов.

Моделирование весов по методу «треугольник»

Вычисляется МПС D^* , которая наиболее близка к реальным отношениям весов $\frac{v_i^{\text{реал}}}{v_j^{\text{реал}}}$ в том понимании, что элемент d_{ij}^* этой МПС — округленное

к ближайшему делению шкалы значение отношения $\frac{v_i^{\text{реал}}}{v_j^{\text{реал}}}$. Например, для

$n = 7$, сгенерированный вектор ненормированных весов $v^{\text{реал}}$ и соответствующая ему МПС D^* равны:

$$v^{\text{реал}} = \begin{pmatrix} 2,125 \\ 3,260 \\ 7,009 \\ 9,024 \\ 10,099 \\ 12,867 \\ 15,924 \end{pmatrix}, \quad D^* = \begin{pmatrix} 1 & & & & & & \\ 2 & 1 & & & & & \\ 3 & 2 & 1 & & & & \\ 4 & 3 & 1 & 1 & & & \\ 5 & 3 & 1 & 1 & 1 & & \\ 6 & 4 & 2 & 1 & 1 & 1 & \\ 7 & 5 & 2 & 2 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Методами главного собственного вектора EM и геометрической средней RGMM на основании МПС D^* вычисляются векторы весов v^{EM} и v^{RGMM} , затем — нормированные векторы w^{EM} и w^{RGMM} . Вычисляются показатели несогласованности CR и GCI МПС D^* , эвклидова и чебышевская нормы отклонений найденных векторов w^{EM} и w^{RGMM} от вектора реальных весов $w^{реал}$:

$$\|w^{EM} - w^{реал}\|_2, \|w^{RGMM} - w^{реал}\|_2, \|w^{EM} - w^{реал}\|_\infty$$

и

$$\|w^{RGMM} - w^{реал}\|_\infty. \tag{8}$$

Генерируется $M = 10^5$ векторов $w^{реал}$, исследуется уровень несогласованности МПС D^* и точность вычисленных весов. Результаты (табл. 1) показывают, что все моделируемые МПС D^* допустимо несогласованны. Более того, показатели несогласованности CR и GCI этих МПС, в основном, меньше своих пороговых значений на порядок (для $n \geq 5$ пороговое значение показателя CR равно 0,1), что говорит о малом уровне несогласованности моделируемых МПС.

Таблица 1. Распределение значений CR МПС D^*

а						
n = 3	Значения CR					
	0	(0; 0,01]	(0,01; 0,02]	(0,02; 0,03]	(0,03; 0,06]	>0,06
Количество МПС D^*	29198	44176	21557	2696	2373	0

б					
n = 5	Значения CR				
	0	(0; 0,01]	(0,01; 0,02]	(0,02; 0,03]	>0,03
Количество МПС D^*	100	50704	48624	572	0

в				
n = 7	Значения CR			
	CR = 0	CR ∈ (0; 0,01]	CR ∈ (0,01; 0,02]	CR > 0,02
Количество МПС D^*	0	71514	28486	0

г				
n = 9	Значения CR			
	CR = 0	CR ∈ (0; 0,01]	CR ∈ (0,01; 0,02]	CR > 0,02
Количество МПС D^*	0	70383	29617	0

Вычисляются средние значения \overline{CR} , \overline{GCI} показателей несогласованности и средние значения $\overline{E}(w^{EM})$, $\overline{E}(w^{RGMM})$, $\overline{Cheb}(w^{EM})$, $\overline{Cheb}(w^{RGMM})$ норм отклонений (8) по всем $M = 10^5$ экспериментам (табл. 2).

Таблица 2. Средние значения показателей несогласованности и норм отклонений вычисленных весов от реальных весов в зависимости от размерности n МПС

n	3	4	5	6	7	8	9
\overline{CR}	0,008	0,009	0,009	0,009	0,009	0,009	0,009
\overline{GCI}	0,026	0,034	0,036	0,036	0,036	0,035	0,035
$\frac{\overline{E}(w^{EM})}{(\overline{E}(w^{RGMM}))}$	0,045	0,037	0,029	0,025	0,022	0,019 (0,018)	0,017 (0,016)
$\frac{\overline{Cheb}(w^{EM})}{(\overline{Cheb}(w^{RGMM}))}$	0,034	0,028	0,022	0,019	0,016	0,013	0,012 (0,011)
$\overline{E}(w^{линия})$	0,057	0,066	0,067	0,065	0,062	0,059	0,057
$\overline{Cheb}(w^{линия})$	0,056	0,060	0,063	0,061	0,060	0,058	0,052

Моделирование весов по методу «линия»

Для каждой эталонной альтернативы a_e , $e = 1, \dots, n$ вычисляется вектор $D_e = \{(d_{ie}) \mid i = 1, \dots, n\}$, где d_{ie} — округленное к ближайшему делению шкалы значение отношения $\frac{v_i^{реал}}{v_e^{реал}}$. Методом «линия» находятся векторы весов

v^e , затем нормированные векторы w^e , $e = 1, \dots, n$.

Вычисляются евклидова и чебышевская нормы отклонений векторов w^e , $e = 1, \dots, n$ от вектора реальных весов $w^{реал}$:

$$\|w^e - w^{реал}\|_2 \text{ и } \|w^e - w^{реал}\|_\infty, \quad e = 1, \dots, n. \quad (9)$$

Точность результатов оценивается по средним значениям $\overline{E}(w^{линия})$ и $\overline{Cheb}(w^{линия})$ норм отклонений (9) по всем $M = 10^5$ экспериментам и по всем эталонам $e = 1, \dots, n$ (табл. 2):

$$\overline{E}(w^{линия}) = \frac{1}{nM} \sum_{i=1}^M \sum_{e=1}^n \|w^e(i) - w^{реал}(i)\|_2,$$

$$\overline{Cheb}(w^{линия}) = \frac{1}{nM} \sum_{i=1}^M \sum_{e=1}^n \|w^e(i) - w^{реал}(i)\|_\infty.$$

В табл. 2 совмещены результаты по методам EM и RGMM, так как они в основном одинаковы. Это следствие относительно хорошей согласованности моделируемых МПС, а именно, средние значения \overline{CR} , \overline{GCI} показателей несогласованности, в основном, на порядок меньше своих пороговых значений ($\overline{CR}=0,01 \ll CR^{\text{порог}}=0,1$; $\overline{GCI}=0,04 \ll GCI^{\text{порог}}=0,37$ для $n \geq 5$). Поэтому первый вывод состоит в том, что уровень несогласованности МПС, обусловленный шкалой Саати, относительно мал. Шкала Саати вносит относительно малую ошибку в вычисленные векторы весов w^{EM} и w^{RGMM} , так как нормы отклонений w^{EM} и w^{RGMM} от вектора реальных весов $w^{\text{реал}}$ принимают значения порядка 10^{-2} .

Сравнивая средние значения норм отклонений $\overline{E}(w^{EM})$, $\overline{E}(w^{RGMM})$, $\overline{Cheb}(w^{EM})$, $\overline{Cheb}(w^{RGMM})$ для весов по методу «треугольник» с соответствующими значениями норм $\overline{E}(w^{\text{линия}})$ и $\overline{Cheb}(w^{\text{линия}})$ для весов по методу «линия» (табл. 2), приходим к выводу, что требование полной согласованности МПС в методе «линия» вносит дополнительную ошибку в вычисляемые веса. А именно, нормы $\overline{E}(w^{\text{линия}})$ и $\overline{Cheb}(w^{\text{линия}})$ принимают в несколько раз большие значения по сравнению с нормами $\overline{E}(w^{EM})$, $\overline{E}(w^{RGMM})$ и $\overline{Cheb}(w^{EM})$, $\overline{Cheb}(w^{RGMM})$ в методе «треугольник» без наложения требования полной согласованности. Различие в значениях соответствующих норм возрастает с увеличением количества сравниваемых альтернатив.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В статье сделана попытка моделирования работы эксперта высокой компетентности при оценивании альтернатив решений методами парных сравнений в шкале Саати. Основным определяющим критерием работы эксперта при выполнении парных сравнений являются показатели согласованности оценок эксперта.

В результате моделирования получены оценки уровня несогласованности экспертных парных сравнений, которая вносится шкалой Саати. Также получены оценки ошибок весов, вычисленных методами типа «треугольник» и «линия». Установлено, что когда эксперт выполняет оценивание в шкале Саати, относительно малый уровень несогласованности ($CR=10^{-2}$) его оценок не только приемлем, но и желателен, поскольку требование полной согласованности экспертных оценок парных сравнений ($CR=0$) может внести дополнительную ошибку при построении матрицы парных сравнений и, следовательно, в результирующие веса.

ЛИТЕРАТУРА

1. Саати Т.Л. Принятие решений при зависимостях и обратных связях: Аналитические сети. Изд. 2-е. — М.: Книжный дом «ЛИБРОКОМ», 2009. — 360 с.

2. Saaty T.L. Decision-making with the AHP: Why is the principal eigenvector necessary // *European Journal of Operational Research*. — 2003. — **145**, № 1. — P. 85–91.
3. Панкратова Н.Д., Недашківська Н.І. Моделі і методи аналізу ієрархій: Теорія. Застосування: навч. посіб. — К.: Політехніка, 2010. — 371 с.
4. Pankratova N., Nedashkovskaya N. The Method of Estimating the Consistency of Paired Comparisons // *International Journal «Information Technologies and Knowledge»*. — 2013. — **7**, № 4. — P. 347–361.
5. Недашківська Н.І. Метод узгоджених парних порівнянь при оцінюванні альтернатив рішень за якісним критерієм // *Системні дослідження та інформаційні технології*. — 2013. — № 4. — С. 67–79.
6. Тоценко В.Г. Методы и системы поддержки принятия решений. Алгоритмический аспект. — К.: Наук. думка, 2002. — 381 с.
7. Веунон М.Ј. Understanding local ignorance and non-specificity within the DS/AHP method of multi-criteria decision making // *European Journal of Operational Research*. — 2005. — **163**, № 2. — P. 403–417.
8. Ногин В.Д. Упрощенный вариант метода анализа иерархий на основе нелинейной свертки критериев // *Журнал вычислительной математики и математической физики*. — 2004. — **44**, № 7. — С. 1261–1270.
9. Srdjevic B. Combining different prioritization methods in the analytic hierarchy process synthesis // *Computers & Operations Research*. — 2005. — **32**. — P. 897–1919.

Поступила 15.07.2013