

Амплітудно-фазові характеристики радіальних коливань тонкого п'єзокерамічного диска біля резонансів

На прикладі відомої задачі про радіальні коливання тонкої круглої п'єзокерамічної пластини з суцільними електродами досліджуються амплітудно-фазові залежності для радіальних зміщень, суми головних напружень і компонентів повної провідності в околі резонансних і антирезонансних частот. Результати розрахунків добре узгоджуються з експериментальними даними, отриманими за опрацьованою авторами новою методикою.

Колівання п'єзокерамічних елементів конструкцій характеризуються високими коефіцієнтами електромеханічного зв'язку і значними амплітудами механічних напружень та зміщень. Сама природа внутрішніх фізичних процесів у таких тілах призводить до того, що і зміщення, і напруження, і провідність, і імпеданс мають біля резонансних частот як активні, так і реактивні компоненти. Розрахувати будь-яку амплітуду можливо лише тоді, коли беруться до уваги втрати енергії. Донині аналітичні розв'язки задач про електромеханічні коливання таких тіл побудовані лише для простих геометричних форм, таких як стрижні, пластини, диски, циліндричні й сферичні оболонки тощо. Такі розв'язки застосовуються у стандартах для експериментального визначення коефіцієнтів зв'язку та компонентів тензорів пружних, діелектричних і п'єзоелектричних сталей.

Електромеханічні коливання збуджуються за допомогою електричного поля, яке створюється електричною напругою, прикладеною до розміщених на поверхні електродів, невід'ємно зв'язаних з поверхнею. Міжелектродна ємність п'єзокерамічних елементів конструкцій досягає кільканадцяти нанофарад і істотно впливає на внутрішні процеси в них.

У даній роботі на прикладі відомої задачі про радіальні коливання тонкої круглої п'єзокерамічної пластини з суцільними електродами досліджуються амплітудно-фазові залежності в околі резонансних і антирезонансних частот. Розрахунки амплітуд і фаз для радіальних зміщень на ободі диска, суми головних напружень в його центрі і компонентів повної провідності ведуться з використанням одержаних в експерименті за новою методикою даних. Результати розрахунків добре узгоджуються з експериментальними даними.

Фазові зсуви при радіальних коливаннях тонкого диска. В [1–3] наведено вирази для радіальних зміщень U_r , суми головних напружень $\sigma_r + \sigma_\theta$ і повної провідності Y , на основі яких можемо записати такі співвідношення:

$$U_r = \frac{(1 + \nu)d_{31}E_z J_1(\lambda x)}{\Delta(x)}, \quad (1)$$

$$\sigma_r + \sigma_\theta = \frac{d_{31}E_z}{s_{11}^E(1 - \nu)} \left(\frac{(1 + \nu)x J_0(\lambda x)}{\Delta(x)} - 2 \right), \quad (2)$$

$$Y = j\omega C_0 \left[1 - k_p^2 + \frac{(1 + \nu)k_p^2 J_1(x)}{\Delta(x)} \right] = j\omega C_0 \frac{\Delta_a(x)}{\Delta(x)}, \quad (3)$$

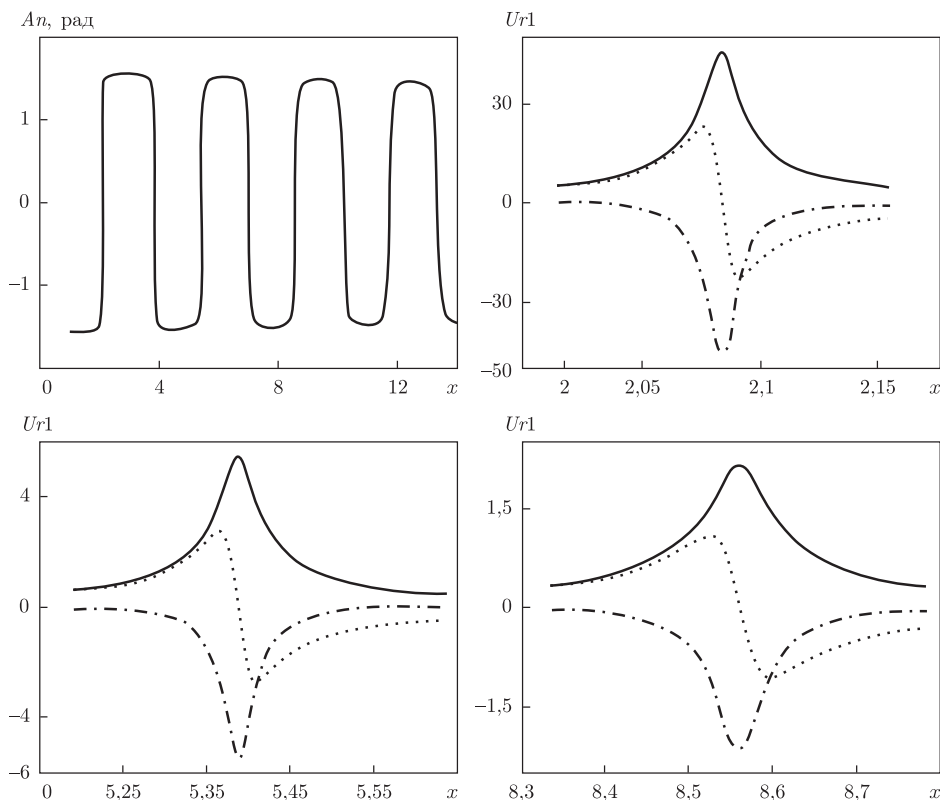


Рис. 1. Фазові зсуви в радіальних зміщеннях біля краю диска на перших чотирьох резонансах і АЧХ компонентів зміщень в околі резонансних частот

де $\Delta(x) = xJ_0(x) - (1 - \nu)J_1(x)$ — резонансний, а $\Delta_a(x) = (1 - k_p^2)\Delta(x) + (1 + \nu)k_p^2J_1(x)$ — антирезонансний визначник; ν — коефіцієнт Пуассона; $\lambda = r/R$ — відношення радіусів точки спостереження до радіуса пластини; d_{31} — п'єзомодуль; E_z — напруженість електричного поля; C_0 — власна статична ємність; x — безрозмірна частота; ω — кругова частота; j — уявна одиниця.

Вирази (1) — (3), резонансний та антирезонансний визначники, а також безрозмірна частота [4] і планарний КЕМЗ [3, 5] є комплексними функціями

$$x = x_0 - jx_2; \quad x_2 = 0,5s_{11M}x_0, \quad (4)$$

$$k_p^2 = k_{po}^2[1 + j(s_{11M} + \varepsilon_{33M} - 2d_{31M})]. \quad (5)$$

На рис. 1 наведено графіки фазочастотних і амплітудно-частотних залежностей, розрахованих за формулою (1) для конкретного п'єзокерамічного диска із ЦТБС-3 з розмірами $66,4 \cdot 3,1$ мм, в якому $C_0 = 18,5$ нФ, тангенс діелектричних втрат $\varepsilon_{33m} = 0,0085$; тангенс механічних втрат $s_{11m} = 0,0069$; коефіцієнт Пуассона $\nu = 0,35$; квадрат планарного КЕМЗ $k_{po}^2 = 0,31$; тангенс п'єзоелектричних втрат $d_{31m} = 0,0076$. По горизонталі відкладена безрозмірна частота x . По вертикалі (на першому графіку) — кут між реактивним і активним компонентами радіальних зміщень біля краю пластини ($\lambda = 0,998$), а на інших трьох — компоненти відношення $U_{r1} = U_r/(d_{31}E_z)$ в тій же точці для перших трьох радіальних резонансів. Активні складові зображені штрихпунктирними кривими, реактивні — пунктирними, а їхня векторна сума, тобто абсолютне значення комплексних чисел, — суцільними лініями.

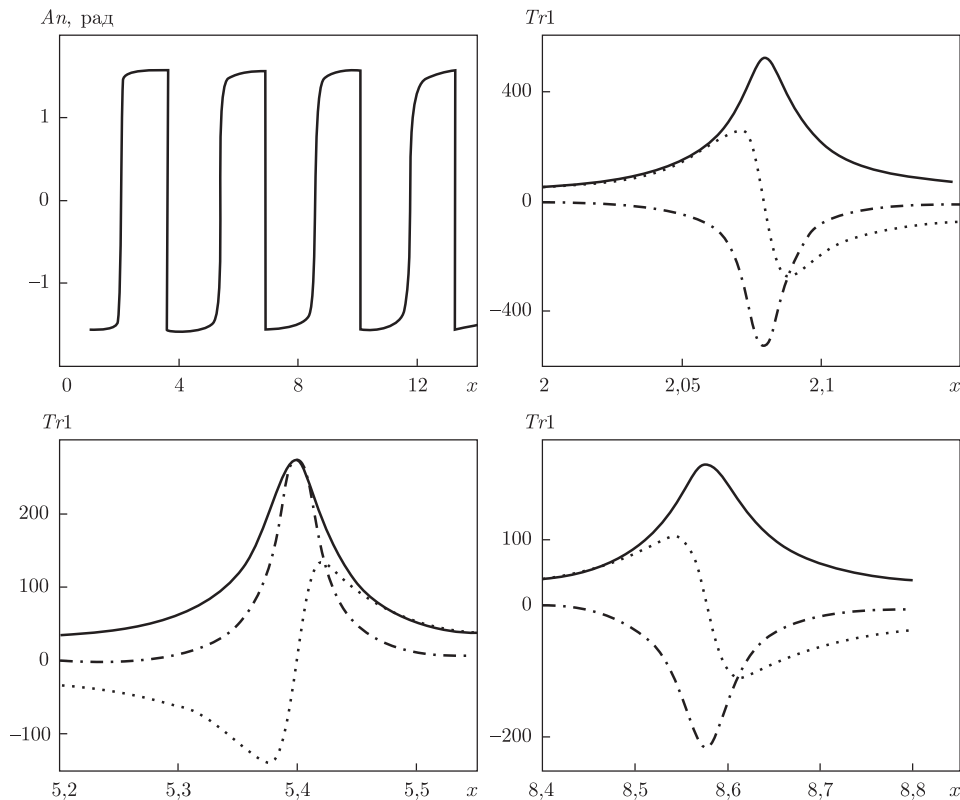


Рис. 2. Фазові зсуви суми головних напружень в центрі диска на перших чотирьох резонансах і АЧХ компонентів цієї суми в околі резонансних частот

Щоб перейти від U_{r1} до U_r (у метрах), треба помножити число, яке є ординатою, на $d_{31}E_z$. В нашому диску, наприклад, $d_{31} = 1,64 \cdot 10^{-10}$ Кл/Н і витримує він на першому резонансі без нагрівання поле до 1000 В/м. Простий розрахунок показує, що максимальні зміщення біля обода становлять 9 мкм. На наступних двох резонансах амплітуда радіальних зміщень знижується майже в десять і двадцять разів.

Аналіз графіків показує, що в околі кожного радіального резонансу кут між реактивною і активною складовими радіальних зміщень змінюється від $-\pi/2$ до $\pi/2$, спадаючи на резонансних частотах до нуля. На всіх трьох амплітудно-частотних залежностях хід відповідних кривих подібний і відрізняються вони лише амплітудами. На кожному з перших трьох радіальних резонансів активна складова досягає свого максимального значення, тоді як реактивна складова спершу зростає, потім спадає до нуля і знову зростає, змінивши знак. При підході до резонансу знак реактивності позитивний, при відході — негативний. Наступна зміна знака реактивної складової спостерігається в проміжках між резонансами, саме в тих точках, де відбувається перехід фази від $\pi/2$ до $-\pi/2$.

На рис. 2 подано аналогічні залежності, розраховані за формулою (2) для суми головних напружень у центрі пластини ($\lambda = 0,01$) в тих же частотних інтервалах. Символом $Tr1$ позначено відношення $(\sigma_r + \sigma_\theta)s_{11}^E(1 - \nu)/d_{31}E_z$. Помноживши безрозмірне число $Tr1$ на $d_{31}E_z/(s_{11}^E(1 - \nu))$, одержимо суму головних напружень в центрі пластини в паскалях. У нашому прикладі $s_{11}^E = 16,2 \cdot 10^{-12}$ м²/Н, тому $Tr = 9,1 \cdot 10^6$ Па на першому радіальному резонансі і знижується на другому та третьому приблизно у півтора і два рази.

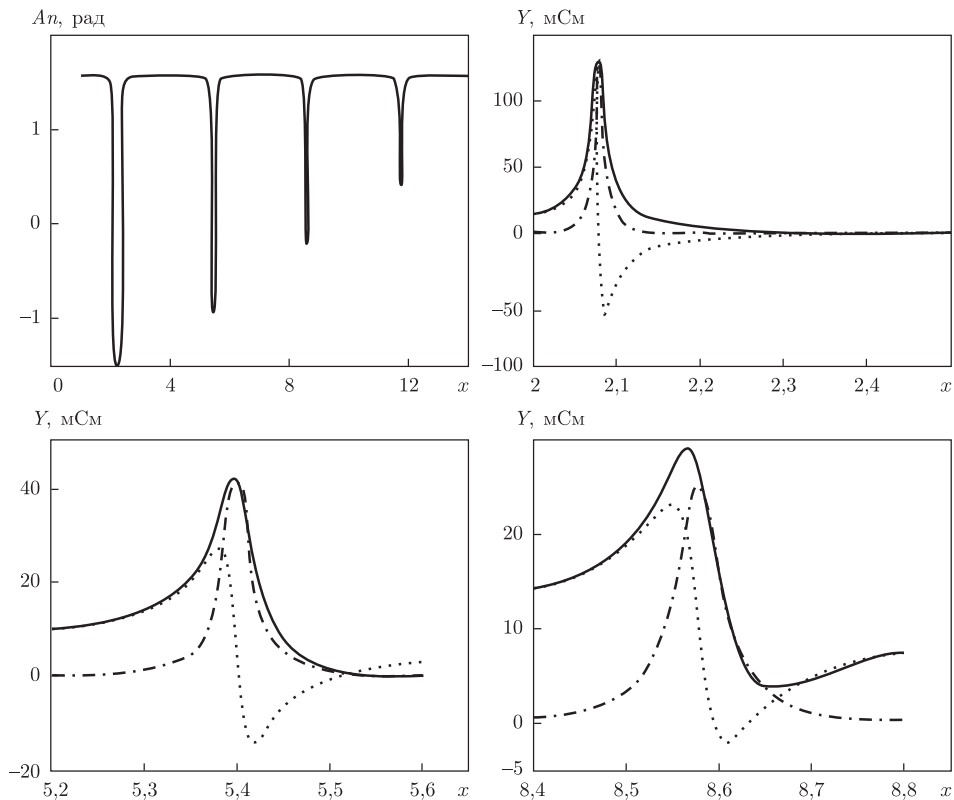


Рис. 3. Фазові зсуви між компонентами повної провідності диска на перших чотирьох резонансах і АЧХ цих компонентів в околі резонанс — антирезонанс

У випадку суми головних напружень також має місце зміна фазового зсуву між реактивним і активним компонентами від $-\pi/2$ до $\pi/2$ при проходженні кожного радіального резонансу та зміна від $\pi/2$ до $-\pi/2$ — у зворотному напрямку між резонансами. Якщо у попередньому випадку між резонансами змінювалася лише полярність реактивної складової, то тепер зміна полярності компонентів відбувається одночасно, так що до кожного наступного резонансу вони наближаються з однаковим співвідношенням полярностей. Цією обставиною й пояснюється подібність фазових залежностей для радіальних зміщень біля краю пластини і головних напружень у її центрі.

На рис. 3 наведено аналогічні залежності, розраховані за формулою (3) для повної провідності пластини. Частотні інтервали розширені в бік високих частот і вміщують як резонанс, так і антирезонанс. Символом Y позначено повну провідність та її активний і реактивний компоненти (у мілісіменсах). Слід відзначити, що діапазон зміни повної провідності від максимального до мінімального значень на першій радіальній моді дуже широкий — від 129 до 0,09 мСм. На другій і третій радіальних модах маємо відповідно 42 і 1,15 та 29 і 4,5 мСм. Усі ці розраховані за графіками числа дуже близькі до експериментальних даних. Полярність активного та реактивного компонентів при підході до кожного наступного резонансу і їх співвідношення зберігаються. Зворотні переходи фази відбуваються не в проміжку між сусідніми резонансами, як було для зміщень і напружень, а на антирезонансних частотах. Фазовий кут між компонентами повної провідності змінюється в межах від $\pi/2$ до $-\pi/2$ і назад тільки на першому радіальному резонансі. На другому резонансі кут змінюється

від $\pi/2$ до $-0,9$ рад і назад, на третьому — від $\pi/2$ до $-0,2$ рад і назад, а на четвертому — лише до $0,4$ рад і назад.

Слід підкреслити, що на рис. 1, 2 наведені лише результати розрахунків для тих місць пластини, де відповідні величини досягають своїх максимальних значень. В інших точках радіуса картина фазових залежностей набагато складніша.

Експериментальне визначення фазових зсувів. Фазові зсуви між струмом, що протікає через п'єзоелемент при радіальних коливаннях, і прикладеною до нього різницею потенціалів визначалися за новою методикою. Досліджуваний п'єзоелемент приєднувався до генератора електричних сигналів ультразвукових частот через узгоджувальний подільник напруги [3, 6], складений із двох послідовно з'єднаних резисторів $R_1 = 68$ і $R_2 = 10$ Ом, з коефіцієнтом ділення $7,8 : 1$. Електрична напруга, яка виділяється на резисторі R_2 , є вхідною різницею потенціалів U_{in} для схеми вимірювання. Щоб визначити електричний струм I , що проходить через п'єзоелемент при його взаємодії з електричним полем збудження, до нього послідовно приєднувався резистор навантаження R і вимірювався спад напруги на ньому U_R . Опір резистора навантаження R вибирався з урахуванням рекомендацій робіт [6–8] і становив $11,2$ Ом або 20 кОм. Водночас цей струм створював на самому п'єзоелементі спад напруги U_{pe} . За означенням, повна провідність Y є відношенням струму I до спаду напруги U_{pe} [1, 3]

$$Y = \frac{I}{U_{pe}} = \frac{U_R}{U_{pe}R}. \quad (6)$$

П'єзоелемент Pe і резистор навантаження R приєднувалися до виходу подільника напруги через двополосний комутатор [9], який давав можливість за допомогою одного й того ж вольтметра на кожній вибраній частоті вимірювати по чергово спади напруг U_R та U_{pe} , а також вхідну напругу U_{in} . Ці три спади напруг утворюють своєрідний трикутник, в якому кути напроти відповідних сторін можна розрахувати за теоремою косинусів

$$\cos \alpha = \frac{U_{pe}^2 + U_R^2 - U_{in}^2}{2U_{pe}U_R}, \quad \cos \beta = \frac{U_{in}^2 + U_R^2 - U_{pe}^2}{2U_{in}U_R}, \quad \cos \gamma = \frac{U_{in}^2 + U_{pe}^2 - U_R^2}{2U_{in}U_{pe}} \quad (7)$$

або виміряти транспортиром після графічної побудови.

Частота генератора ГЗ-56/1 змінювалася від 20 до 200 кГц і вольтметром ВЗ-38 вимірювалися спади напруг U_{in} , U_{pe} та U_R . Одержані в такий спосіб дані заносилися в комп'ютер і будувалися частотні залежності кутів α , β і γ , як відповідних арккосинусів. Одночасно за формулою (2) вираховувалася повна провідність пластини. За графіками АЧХ біля резонансних і антирезонансних частот на рівні -3 дБ визначалися компоненти добротності Q_m [10], які бралися до уваги при розрахунках для рис. 1–3.

На рис. 4 подано амплітудно-фазові характеристики повної провідності на перших двох радіальних резонансах, розраховані за формулою (3), а також визначені експериментально із застосуванням теореми косинусів (7). На верхніх графіках до залежностей типу $v = \text{atan}(w)$ (суцільні лінії, $w = \text{imag}(Y)/\text{real}(Y)$) додано криві $\text{abs}(v)$ (штрихпунктирні лінії). Так зроблено тому, що в експерименті вольтметр не реагує на полярність вимірюваних напруг, а тільки на їх ефективні значення. Через цю обставину побудовані вище графіки відображають не самі фазові зсуви, а їхні абсолютні значення. Модуль фазового зсуву між реактивною і активною складовими повної провідності на частотах резонансів і антирезонансів знижується до нуля, а потім зростає в обидва боки на першому резонансі до $\pi/2$.

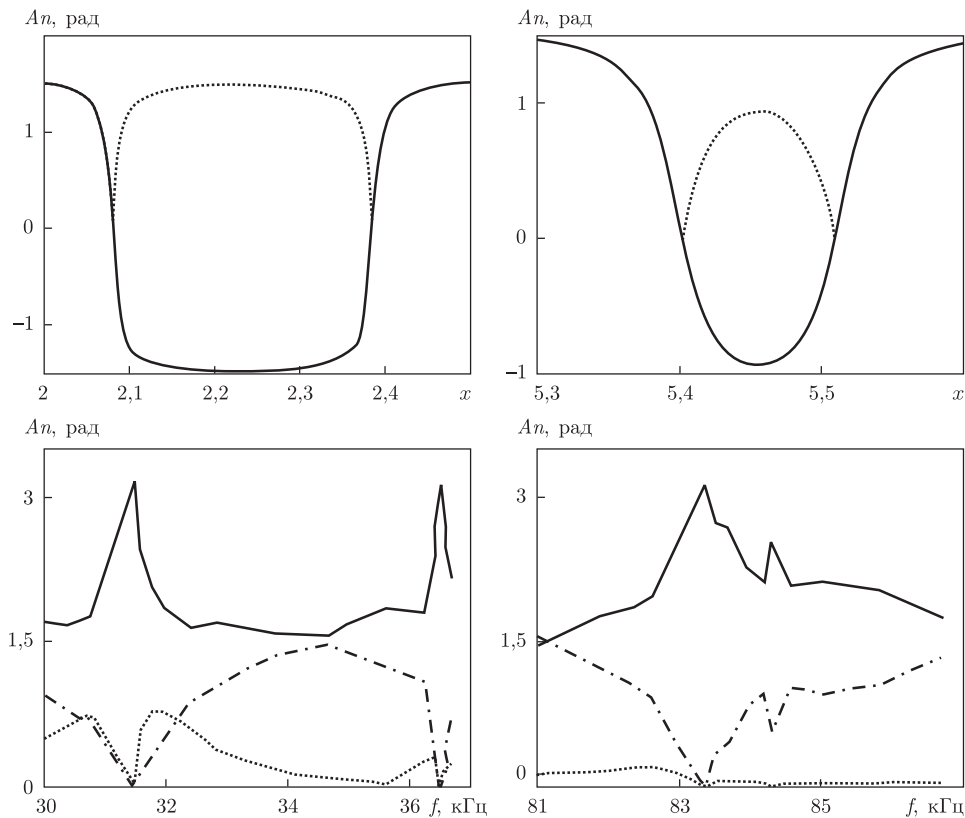


Рис. 4. Фазові зсуви між компонентами повної провідності диска біля перших двох радіальних резонансів

На другому резонансі зростання фазового зсуву до $\pi/2$ має місце лише раніше від резонансу і пізніше за антирезонанс. У проміжку резонанс — антирезонанс фазовий зсув не перевищує 0,9 рад. На нижніх графіках наведено фазово-частотні залежності кутів характеристичного трикутника.

Кут α (суцільні криві) утворений сторонами U_R та U_{pe} і характеризує фазовий зсув між струмом в п'єзоелементі і напругою на його електродах. Кут β (штрихпунктирні криві) утворений сторонами U_{in} та U_R і характеризує фазовий зсув між напругою на виході генератора та споживаним від генератора струмом. Кут γ (пунктирні криві) утворений сторонами U_{in} та U_{pe} , тобто між спадами напруги на виході генератора і на п'єзоелементі. Хід кривих кута β на першому резонансі та антирезонансі, а також на другому резонансі, ідентичний до розрахованих фазових зсувів між компонентами повної провідності. На другому антирезонансі мінімум не досягає нуля, що пояснюється неточностями вимірювань при малих струмах.

На закінчення зробимо такі висновки.

1. Запропонована авторами нова розрахунково-експериментальна методика з вивчення фазових і амплітудних характеристик радіальних коливань тонких п'єзокерамічних дисків показала свою ефективність. Вона застосовувалася також для тіл ускладненої геометричної форми.

2. Фазові зсуви між активним і реактивним компонентами пружних зміщень і головних напружень залежать від місця спостереження, а для повної провідності — від величини планарного КЕМЗ. Перехід від $-\pi/2$ до $\pi/2$ відбувається у всіх випадках в околі резо-

нансних частот. Зворотний перехід для зміщень і напружень має місце в проміжках між резонансами, а для компонентів повної провідності — на антирезонансах.

3. Розрахунок фазово-частотних і амплітудно-частотних характеристик коливань у комплексній формі забезпечує результати, які добре узгоджуються з експериментами.

4. Описану методику можна рекомендувати для дослідження коливань будь-яких елементів конструкцій із п'єзокераміки.

1. Карлаш В. Л. Резонансные электромеханические колебания пьезоэлектрических пластин // Прикл. мех. – 2005. – 41, № 7. – С. 3–46.
2. Шульга Н. А., Болжисев А. М. Колебания пьезоэлектрических тел. – Киев: Наук. думка, 1990. – 228 с.
3. Шульга М. О., Карлаш В. Л. Резонансні електромеханічні коливання п'єзоелектричних пластин. – Київ: Наук. думка, 2008. – 272 с.
4. Катц Г. В. Магнитные и диэлектрические приборы. Ч. I. – Москва-Ленинград: Энергия, 1964. – 416 с.
5. Holland R., Eer Nisse E. P. Design of resonant piezoelectric devices. – Cambridge, London: MIT Press, 1969. – 256 p.
6. Глозман И. А. Пьезокерамика. – Москва: Энергия, 1972. – 288 с.
7. Шарапов В. М., Минаев И. Г., Бондаренко Ю. Ю. и др. Пьезоэлектрические преобразователи: Уч. пос. / Под ред. В. М. Шарапова. – Черкасы: ЧГТУ, 2004. – 435 с.
8. ГОСТ 12370–72. Материалы пьезокерамические, методы испытаний. – Москва: Изд-во стандартов, 1973. – 28 с.
9. Шульга М. О., Карлаш В. Л. Вимірювання повної провідності п'єзокерамічних елементів у схемі чо-тириполюсника Мезона та її варіантах // Тези IV Міжнар. наук.-техн. конф. “Датчики, прилади та системи – 2008”. – Черкаси – Гурзуф, 2008. – С. 54–56.
10. IRE Standards on Piezoelectric Crystals: Measurements of Piezoelectric Ceramics. 1961 // Proc. IRE. – 1961. – 49. – P. 1161–1169.

Інститут механіки ім. С. П. Тимошенка
НАН України, Київ

Надійшло до редакції 04.02.2013

Член-корреспондент НАН України **Н. А. Шульга**, В. Л. Карлаш

Амплитудно-фазовые характеристики радиальных колебаний тонкого пьезокерамического диска возле резонансов

На примере известной задачи о радиальных колебаниях тонкой круглой пьезокерамической пластины со сплошными электродами исследуются амплитудно-фазовые зависимости для радиальных перемещений, суммы главных напряжений и компонент полной проводимости в окрестности резонансных и антирезонансных частот. Результаты расчетов хорошо согласуются с экспериментальными данными, полученными по разработанной авторами новой методике.

Corresponding Member of the NAS of Ukraine **М. О. Shul'ga**, V. L. Karlash

Amplitude-phase characteristics of radial vibrations of a thin piezoceramic disk near resonances

By the example of the known problem of radial vibrations of a thin piezoceramic plate with unbroken electrodes, the amplitude-phase dependences for radial displacements and the sums of principal stresses and admittance components near the resonant and antiresonant frequencies of a disk are studied. The results of calculations are in good agreement with experimental data obtained by authors' new method.