УДК 519.21,519.217,519.718

І. В. Малик

Збіжність у схемі усереднення диференціально-функціональних рівнянь нейтрального типу

(Представлено академіком НАН України В. С. Королюком)

Розглянуто достатні умови збіжності за ймовірністю випадкових процесів, що описуються диференціально-функціональними рівняннями нейтрального типу з випадковими операторами. Достатні умови сформульовано в термінах коефіцієнтів вихідного рівняння.

Вивченню стохастичних диференціальних рівнянь, в тому числі і стохастичних диференціально-функціональних рівнянь, присвячена велика кількість робіт, наприклад [1, 2, 7–10]. Особлива увага приділяється збіжності випадкових процесів у різних схемах [2–4, 7] та асимптотичній поведінці випадкових процесів. Серед даних робіт варто відзначити роботу [2], де розглянуто умови слабкої збіжності для марковських, напівмарковських процесів, напівмарковських випадкових еволюцій у схемі усереднення та дифузійної апроксимації в евклідвому просторі R^d.

На ймовірнісному базисі $(\Omega, F, \Im, P)$ [5], де $\Im := \{F_t, t \geqslant 0\}$ — потік σ-алгебр, задано сім'ю випадкових процесів $x^\varepsilon(t) := x(t, \varepsilon, \omega)$, $t \geqslant 0$, $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$, де $x^\varepsilon(t)$ — сильний розв'язок диференціально-функціонального рівняння (ДФР) в R^1 з випадковими операторами [7]

$$dD^\varepsilon x_t^\varepsilon = L^\varepsilon x_t^\varepsilon dt \tag{1}$$

та задовольняє невипадкову початкову умову

$$x_0 = \varphi, \tag{2}$$

де для $\psi \in C([-h, \infty))$ визначені випадкові оператори:

$$D^\varepsilon \psi_t := \psi(t) - \int_{-h}^{0} D(t, \psi(t-s), \varepsilon^{-1}s, \omega)\, ds,$$

$$L^\varepsilon \psi_t := \int_{-h}^{0} L(t, \psi(t-s), \varepsilon^{-1}s, \omega)\, ds,$$

$\psi_t := \{\psi(t+s), s \in [-h, 0]\}$, $0 < h < \infty$. Тут D, $L\colon R_+ \times R^1 \times R_+ \times \Omega \to R^1$ — вимірні відображення, що задовольняють глобальну умову Ліпшица за другим аргументом м. н. з деякою константою l:

$$|D(t, \psi_1, s) - D(t, \psi_2, s)| + |L(t, \psi_1, s) - L(t, \psi_2, s)| \leqslant l\|\psi_1 - \psi_2\|, \tag{3}$$

де $\|\cdot\|$ — рівномірна норма на $[-h, 0]$.

Для відображення D будемо також вимагати таку умову [10]:

$$\sup_{\varepsilon\in(0,\varepsilon_0),t\in R_+,\|\varphi\|=1}\int\limits_{-h}^{0}|D(t,\varphi(s),\varepsilon^{-1}s,\omega)|\,ds<1, \tag{4}$$

яка є необхідною умовою існування розв'язку задачі (1), (2). При умовах (3) та (4) для $\forall\,\varepsilon\in(0,\varepsilon_0)$ м. н. існує єдиний розв'язок задачі (1), (2) [7, 10].

Припустимо, що при фіксованих $t\in R_+$ та $x\in R^1$ випадкові процеси D, L є стаціонарними за третім аргументом:

$$\overline{D}(t,x):=ED(t,x,s,\omega);\overline{L}(t,x):=EL(t,x,s,\omega).$$

Зауважимо, що при виконанні умов (3) та (4) існує єдиний розв'язок рівняння

$$d\overline{D}x_t^0=\overline{L}x_t^0dt \tag{5}$$

за початковою умовою (2), де

$$\overline{D}\psi_t:=\psi(t)+\int\limits_{-h}^{0}\overline{D}(t,\psi(s))\,ds,\qquad \overline{L}\psi_t:=\int\limits_{-h}^{0}\overline{L}(t,\psi(s))\,ds.$$

Сформулюємо достатні умови збіжності за ймовірністю сім'ї випадкових процесів $x^{\varepsilon}(t)$, $t\geqslant 0$, визначені ДФР (1).

Теорема 1. *Нехай:*

1) $\varphi\in C([-h,0])$ та виконується умова склеювання в точці 0: $\lim\limits_{t\to 0+}x^{\varepsilon}(t)=\varphi(0)$;

2) $D(t,\psi,s,\omega)$, $L(t,\psi,s,\omega)$ — вимірні за всіма змінними, ергодичні стаціонарні процеси за s при фіксованих t та ψ;

3) D, L задовольняють умову Ліпшиця (3);

4) $E|D(t,x,s,\omega)|+E|D(t,x,s,\omega)|<\infty$; $E|D(t,x,s,\omega)|$, $|D(t,x,s,\omega)|$, $E|L(t,x,s,\omega)|$, $|L(t,x,s,\omega)|$ — рівномірно інтегровні за t при фіксованих s, x.
Тоді для $\forall\,T>0$ та $\forall\,\delta>0$ має місце співвідношення

$$\lim_{\varepsilon\to 0}P\Big\{\sup_{t\in[0,T]}|x^{\varepsilon}(t)-x^0(t)|>\delta\Big\}=0, \tag{6}$$

де $x^0(t)$, $t\geqslant 0$ — розв'язок задачі Коші (5), (2).

Доведення. Розглянемо різницю $|x^{\varepsilon}(t)-x^0(t)|$, скориставшишись інтегральним поданням розв'язків $x^{\varepsilon}(t)$, $t\in[0,T]$, $\varepsilon\in[0,\varepsilon_0)$ та означенням D^{ε}, $\overline{D}$:

$$|x^{\varepsilon}(t)-x^0(t)|=\Bigg|\int\limits_{-h}^{0}(D(t,x^{\varepsilon}(t+s),\varepsilon^{-1}s,\omega)-\overline{D}(t,x^0(t+s)))\,ds+$$

$$+\int\limits_{0}^{t}\int\limits_{-h}^{0}(L(s,x^{\varepsilon}(s+s_1),\varepsilon^{-1}s_1,\omega)-\overline{L}(s,x^0(s+s_1)))\,ds_1ds\Bigg|\leqslant$$

$$\leqslant \int\limits_{-h}^{0} |D(t, x^{\varepsilon}(t+s), \varepsilon^{-1}s, \omega) - \overline{D}(t, x^0(t+s))|\, ds +$$

$$+ \int\limits_{0}^{t}\int\limits_{-h}^{0} |L(s, x^{\varepsilon}(s+s_1), \varepsilon^{-1}s_1, \omega) - \overline{L}(s, x^0(s+s_1))|\, ds_1 ds \leqslant$$

$$\leqslant \int\limits_{-h}^{0} |D(t, x^{\varepsilon}(t+s), \varepsilon^{-1}s, \omega) - D(t, x^0(t+s), \varepsilon^{-1}s, \omega)|\, ds +$$

$$+ \int\limits_{-h}^{0} |D(t, x^0(t+s), \varepsilon^{-1}s, \omega) - \overline{D}(t, x^0(t+s))|\, ds +$$

$$+ \int\limits_{0}^{t}\int\limits_{-h}^{0} |L(s, x^{\varepsilon}(s+s_1), \varepsilon^{-1}s, \omega) - L(s, x^0(s+s_1), \varepsilon^{-1}s_1, \omega)|\, ds_1 ds +$$

$$+ \int\limits_{0}^{t}\int\limits_{-h}^{0} |L(s, x^0(s+s_1), \varepsilon^{-1}s_1, \omega) - \overline{L}(s, x^0(s+s_1))|\, ds_1 ds \leqslant$$

$$\leqslant l(T,h) \sup_{t\in[0,T]} |x^{\varepsilon}(t) - x^0(t)| + \Psi_{\varepsilon}(t,\omega),$$

де $l(T,h) < \infty$,

$$\Psi_{\varepsilon}(t,\omega) := \int\limits_{-h}^{0} |D(t, x^0(t+s), \varepsilon^{-1}s, \omega) - \overline{D}(t, x^0(t+s))|\, ds +$$

$$+ \int\limits_{0}^{t}\int\limits_{-h}^{0} |L(s, x^0(s+s_1), \varepsilon^{-1}s, \omega) - \overline{L}(s, x^0(s+s_1))|\, ds_1 ds. \qquad (7)$$

Згідно з нерівністю Гронуолу–Белмана, отримаємо

$$\sup_{t\in[0,T]} |x^{\varepsilon}(t) - x^0(t)| \leqslant \sup_{t\in[0,T]} \Psi_{\varepsilon}(t,\omega)e^{lT} = \Psi_{\varepsilon}(T,\omega)e^{lT}.$$

Отже, для доведення твердження теореми (6) достатньо показати, що за ймовірністю виконується співвідношення

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \Psi_{\varepsilon}(T,\omega) = 0. \qquad (8)$$

Для доведення (8) розглянемо випадкові процеси

$$D_m(t,x,s,\omega) := \begin{cases} D(t,x,s,\omega), & \text{якщо} \quad |D(t,x,s,\omega)| < m; \\ m \times \operatorname{sign}(D(t,x,s,\omega)), & \text{якщо} \quad |D(t,x,s,\omega)| \geqslant m. \end{cases}$$

$$L_m(t,x,s,\omega) := \begin{cases} L(t,x,s,\omega), & \text{якщо} \quad |L(t,x,s,\omega)| < m; \\ m \times \operatorname{sign}(L(t,x,s,\omega)), & \text{якщо} \quad |L(t,x,s,\omega)| \geqslant m. \end{cases}$$

$$\overline{D}_m := ED_m, \qquad \overline{L}_m := EL_m.$$

Згідно з означенням $\Psi_\varepsilon(t,\omega)$ (див. (7)), отримаємо

$$\Psi_\varepsilon(t,\omega) \leqslant \Psi_\varepsilon^1(t,\omega) + \Psi_\varepsilon^2(t,\omega) + \Psi_\varepsilon^3(t,\omega),$$

де

$$\Psi_\varepsilon^1(t,\omega) := \int\limits_{-h}^{0} |D(t, x^0(t+s), \varepsilon^{-1}s, \omega) - D_m(t, x^0(t+s), \varepsilon^{-1}s, \omega)| \, ds +$$

$$+ \int\limits_{0}^{t}\int\limits_{-h}^{0} |L(s, x^0(s+s_1), \varepsilon^{-1}s_1, \omega) - L_m(s, x^0(s+s_1), \varepsilon^{-1}s_1, \omega)| \, ds_1 ds,$$

$$\Psi_\varepsilon^2(t,\omega) := \int\limits_{-h}^{0} |D_m(t, x^0(t+s), \varepsilon^{-1}s, \omega) - \overline{D}_m(t, x^0(t+s))| \, ds +$$

$$+ \int\limits_{0}^{t}\int\limits_{-h}^{0} |L_m(s, x^0(s+s_1), \varepsilon^{-1}s_1, \omega) - \overline{L}_m(s, x^0(s+s_1))| \, ds_1 ds,$$

$$\Psi_\varepsilon^3(t,\omega) := \int\limits_{-h}^{0} |\overline{D}(t, x^0(t+s)) - \overline{D}_m(t, x^0(t+s))| \, ds +$$

$$+ \int\limits_{0}^{t}\int\limits_{-h}^{0} |\overline{L}(s, x^0(s+s_1)) - \overline{L}_m(s, x^0(s+s_1))| \, ds_1 ds.$$

Доведемо, що за ймовірністю виконуються співвідношення

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \Psi_\varepsilon^i(T,\omega) = 0, \qquad i = 1,2,3.$$

Згідно з умовою 4 теореми 1 та теоремою Лебега про граничний перехід під знаком інтеграла [6],

$$\lim_{m\to\infty} \Psi_\varepsilon^3(t,\omega) = 0. \tag{9}$$

Розглянемо $\Psi_\varepsilon^1(T,\omega)$. Зауважимо, що згідно з умовою 4 теореми 1, справедлива нерівність

$$\sup_{\varepsilon\in(0,\varepsilon_0), m\in R_+} E\Psi_\varepsilon^1(T,\omega) < \infty.$$

Тому

$$\lim_{m\to\infty} E\Psi_\varepsilon^1(T,\omega) = 0.$$

Враховуючи, що $\Psi_\varepsilon^1(T,\omega) \geqslant 0$ м. н, отримаємо

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \Psi_\varepsilon^1(T,\omega) = 0 \tag{10}$$

за ймовірністю.

Розглянемо доданок $\Psi_\varepsilon^2(T,\omega)$. Згідно з умовою 1 теореми 1, можна стверджувати, що випадкові процеси $x^\varepsilon(t)$, $\varepsilon \geqslant 0$ є неперервними м. н. на $[0,T]$. Тому можна вибрати константу c:

$$c := 1 + \max\Big\{T, \sup_{t\in[-h,T]} |x^0(t)|\Big\} < \infty.$$

Для $|x(t)| \leqslant c$, $t \in [0,T]$, використовуючи умову ергодичності 2 теореми 1 [2, 4, 5, 8], отримаємо співвідношення для процесів $D_m(t,x,s,\omega)$ та $L_m(t,x,s,\omega)$:

$$\lim_{\varepsilon\to 0} E\int_{-h}^{0} D_m(t, x^0(t+s), \varepsilon^{-1}s, \omega)\, ds = \int_{-h}^{0} \overline{D}_m(t, x^0(t+s))\, ds,$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0} E\int_0^t\int_{-h}^{0} L_m(s, x^0(s+s_1), \varepsilon^{-1}s_1, \omega)\, ds_1 ds = \int_0^t\int_{-h}^{0} \overline{L}_m(s, x^0(s+s_1))\, ds_1 ds.$$

Скориставшись даними співвідношеннями, отримаємо

$$\lim_{\varepsilon\to 0} E\Psi_\varepsilon^2(T,\omega) = \lim_{\varepsilon\to 0}\Bigg(\int_{-h}^{0} E|D_m(t, x^0(t+s), \varepsilon^{-1}s, \omega) - \overline{D}_m(t, x^0(t+s))|\, ds +$$

$$+ \int_0^t\int_{-h}^{0} E|L_m(s, x^0(s+s_1), \varepsilon^{-1}s_1, \omega) - \overline{L}_m(s, x^0(s+s_1))|\, ds_1 ds\Bigg) = 0.$$

Тоді, використовуючи невід'ємність $\Psi_\varepsilon^2(T,\omega)$, одержуємо

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \Psi_\varepsilon^2(T,\omega) = 0. \tag{11}$$

З умов (9)–(11) одержуємо співвідношення (8), а отже, і твердження теореми 1 (6).

Теорема 1 доведена.

Зауваження 1. Випадкові процеси $D(t,x,s)$, $L(t,x,s)$ за s при фіксованих $t \in R_+$ та $x \in R^1$ можуть бути стаціонарними як в широкому, так і у вузькому розумінні [7].

У даній роботі розглянуто достатні умови збіжності зі ймовірністю сім'ї випадкових процесів, що описуються ДФР (1) за умов, що накладаються на випадкові оператори відповідних ДФР. Результати даної роботи можна узагальнити на випадок нескінченної післядії з відповідними викладками. Теорема 1 дозволяє також моделювати розв'язок ДФР (5) за початковою умовою (2), використовуючи за наближення розв'язок задачі (1), (2) при достатньо малих ε.

Автор висловлює щиру вдячність за увагу до даної роботи та цінні поради проф. В. К. Ясинському та акад. НАН України В. С. Королюку.

1. *Kolmanovskia V., Koroleva N., Maizenberg T. et al.* Neutral stochastic differential delay equations with markovian switching // Stoch. Analysis and Applications. – 2003. – **21**, iss. 4. – P. 819–847.
2. *Koroliuk V. S., Limnios N.* Stochastic systems in merging phase space. – Singapore: World Scientific, 2005.
3. *Биллинсгли П.* Сходимость вероятностных мер. – Москва: Наука, 1977. – 352 с.
4. *Дынкин Е. Б.* Марковские процессы. – Москва: Физматгиз, 1967. – 860 с.
5. *Жакод Ж., Ширяев А. Н.* Предельные теоремы для случайных процессов. В 2-х т. Т. 2. – Москва: Физматиздат, 1994. – 473 с.
6. *Колмогоров А. Н., Фомин С. В.* Элементы теории функций и функционального анализа. – Москва: Наука, 1989. – 624 с.
7. *Королюк В. С., Царков Є. Ф., Ясинський В. К.* Ймовірність, статистика та випадкові процеси. Теорія та комп'ютерна практика. В 3-х т. Т. 3. Випадкові процеси. Теорія та комп'ютерна практика. – Чернівці: Золоті литаври, 2009. – 798 с.
8. *Портенко Н. И., Скороход А. В., Шуренков В. М.* Марковские процессы. – Киев: ВИНИТИ, 1989. – 248 с.
9. *Хасминський Р. З.* Устойчивость систем дифференциальных уравнений при случайном возмущении их параметров. – Москва: Наука, 1969. – 367 с.
10. *Хейл Дж.* Теория функционально-дифференциальных уравнений – Москва: Мир, 1984. – 421 с.

Чернівецький національний університет
ім. Юрія Федьковича

Надійшло до редакції 09.01.2013

И. В. Малык

Сходимость в схеме усреднения дифференциально-функциональных уравнений нейтрального типа

Рассмотрены достаточные условия сходимости по вероятности случайных процессов, описываемых дифференциально-функциональными уравнениями нейтрального типа со случайными операторами. Достаточные условия сформулированы в терминах коэффициентов исходного уравнения.

I. V. Malyk

Convergence in the averaging scheme for differential-functional equations of neutral type

We consider sufficient conditions for the convergence in probability of stochastic processes described by differential-functional equations of neutral type with random operators. The sufficient conditions are formulated in terms of the coefficients of the original equation.