УДК 512.544

О. Ю. Дашкова

Модули над групповыми кольцами обобщенно разрешимых групп

(Представлено членом-корреспондентом НАН Украины В. П. Моторным)

Пусть A — $\mathbf{R}G$-модуль такой, что $\mathbf{R}$ — коммутативное кольцо, $A/C_A(G)$ не является нетеровым $\mathbf{R}$-модулем (соответственно $A/C_A(G)$ не является артиновым $\mathbf{R}$-модулем, $A/C_A(G)$ не является минимаксным $\mathbf{R}$-модулем), $C_G(A) = 1$, G — гипер(локально разрешимая) группа. Описаны свойства гипер(локально разрешимой) группы G такой, что любая собственная подгруппа H группы G, для которой $A/C_A(H)$ не является нетеровым $\mathbf{R}$-модулем (соответственно $A/C_A(H)$ не является артиновым $\mathbf{R}$-модулем, $A/C_A(H)$ не является минимаксным $\mathbf{R}$-модулем), конечно порождена.

Пусть F — поле, A — векторное пространство над полем F, $GL(F, A)$ — группа всех F–автоморфизмов векторного пространства А. Группа $GL(F, A)$ и ее подгруппы называются линейными группами. Линейные группы являются одним из старейших объектов исследования алгебры. Конечномерные линейные группы изучены достаточно хорошо. В случае, когда размерность $\dim_F A$ векторного пространства A над полем F бесконечна, ситуация кардинально другая. Бесконечномерные линейные группы исследовались мало. Это направление исследования является достаточно новым и требует решения ряда важных вопросов. Вместе с тем бесконечномерные линейные группы играют важную роль в различных областях математики и ее приложениях. Исследование бесконечномерных линейных групп возможно лишь при наложении дополнительных ограничений на рассматриваемые группы. Примером таких ограничений являются различные условия конечности. Одним из важных условий конечности является финитарность линейной группы. Напомним, что группа G называется финитарной, если для любого элемента g группы G фактор-пространство $A/C_A(g)$ конечномерно. Начало исследованию финитарных линейных групп было положено Ж. Дьедонне [1]. Им были впервые рассмотрены финитарные преобразования бесконечномерного векторного пространства. Следует отметить, что в данном направлении исследования получено много важных результатов [2, 3].

Условие финитарности является лишь одним из условий конечности, налагаемым на бесконечномерные линейные группы. В [4] были введены в рассмотрение антифинитарные линейные группы. Пусть $G \leqslant GL(F, A)$, $A(wFG)$ — фундаментальный идеал группового кольца FG, $\mathrm{augdim}_F(G) = \dim_F(A(wFG))$. Линейная группа G называется антифинитарной, если каждая собственная подгруппа H группы G, для которой размерность $\mathrm{augdim}_F(H)$ бесконечна, конечно порождена. В [4] исследовались антифинитарные локально разрешимые линейные группы.

Если G — подгруппа группы $GL(F, A)$, то A можно рассматривать как модуль над групповым кольцом FG. В теории модулей существует ряд обобщений понятия конечномерного векторного пространства. Это модули, обладающие конечным композиционным рядом, конечно порожденные модули, нетеровы модули, артиновы модули. Естественным обобщением классов артиновых и нетеровых модулей является класс минимаксных модулей ([5, гл. 7]).

Определение 1. *Пусть A — модуль над кольцом $\mathbf{R}$. Модуль A называется минимаксным, если он обладает конечным рядом подмодулей, каждый фактор которого является либо нетеровым $\mathbf{R}$-модулем, либо артиновым $\mathbf{R}$-модулем.*

Б. А. Ф. Верфриц ввел в рассмотрение артиново-финитарные группы автоморфизмов модуля M над кольцом $\mathbf{R}$ и нетерово-финитарные группы автоморфизмов модуля M над кольцом $\mathbf{R}$, являющиеся аналогами финитарных линейных групп [6–8]. Группа автоморфизмов $F_1 \operatorname{Aut}_{\mathbf{R}} M$ модуля M над кольцом $\mathbf{R}$ называется артиново-финитарной, если $A(g-1)$ является артиновым $\mathbf{R}$-модулем для любого элемента $g \in F_1 \operatorname{Aut}_{\mathbf{R}} M$. Группа автоморфизмов $F \operatorname{Aut}_{\mathbf{R}} M$ модуля M над кольцом $\mathbf{R}$ называется нетерово-финитарной, если $A(g-1)$ является нетеровым $\mathbf{R}$-модулем для любого элемента $g \in F \operatorname{Aut}_{\mathbf{R}} M$. Б. А. Ф. Верфриц исследовал связь между группами $F_1 \operatorname{Aut}_{\mathbf{R}} M$ и $F \operatorname{Aut}_{\mathbf{R}} M$ [8]. Эти группы имеют достаточно подобную структуру, особенно в случае коммутативных колец. В связи с этим естественно возник вопрос о том, не является ли один из этих классов групп подклассом другого. Данный вопрос был решен отрицательно Б. А. Ф. Верфрицем на примере кольца целых чисел [9].

При изучении модулей над групповыми кольцами с различными условиями конечности важную роль играет понятие коцентрализатора подгруппы в модуле A, введенное в [10].

Определение 2 [10]. Пусть A — $\mathbf{R}G$-модуль, где $\mathbf{R}$ — кольцо, G — группа. Если $H \leqslant G$, то фактор-модуль $A/C_A(H)$, рассматриваемый как $\mathbf{R}$-модуль, называется коцентрализатором подгруппы H в модуле A.

Автором рассматривается аналог антифинитарных линейных групп в теории модулей над групповыми кольцами. Далее всюду изучается $\mathbf{R}G$-модуль A такой, что $C_G(A) = 1$.

Определение 3. *Пусть A — $\mathbf{R}G$-модуль, где $\mathbf{R}$ — кольцо, G — группа. Будем говорить, что группа G является* AFN-*группой, если любая собственная подгруппа H группы G, коцентрализатор которой в модуле A не является нетеровым $\mathbf{R}$-модулем, конечно порождена. Группа G является* AFA-*группой, если любая собственная подгруппа H группы G, коцентрализатор которой в модуле A не является артиновым $\mathbf{R}$-модулем, конечно порождена. Группа G является* AFM-*группой, если любая собственная подгруппа H группы G, коцентрализатор которой в модуле A не является минимаксным $\mathbf{R}$-модулем, конечно порождена.*

В работе изучаются модули над групповыми кольцами с коммутативным кольцом скаляров. В частности, рассматривается случай дедекиндова кольца скаляров. Напомним, что кольцо $\mathbf{R}$ называется дедекиндовым кольцом, если выполняются следующие условия: 1) $\mathbf{R}$ — область целостности; 2) $\mathbf{R}$ — нетерово кольцо; 3) каждый ненулевой простой идеал кольца $\mathbf{R}$ является максимальным идеалом; 4) кольцо $\mathbf{R}$ целозамкнуто.

В [11–13] исследовались локально разрешимые AFN-, AFA-, AFM-группы. Структура этих групп описывается в теореме 1.

Теорема 1 [13]. *Пусть A — $\mathbf{R}G$-модуль, G — локально разрешимая группа. Справедливы следующие утверждения:*

1) если G — AFM-*группа, $\mathbf{R} = \mathbb{Z}$ — кольцо целых чисел, то группа G гиперабелева;*

2) если G — AFN-*группа, $\mathbf{R}$ — коммутативное нетерово кольцо с единицей, то группа G гиперабелева;*

3) если G — AFA-*группа, $\mathbf{R}$ — дедекиндово кольцо, то группа G гиперабелева.*

Назовем рядом вида (1) возрастающий ряд нормальных подгрупп группы G

$$\langle 1 \rangle = L_0 \leqslant L_1 \leqslant L_2 \leqslant \cdots \leqslant L_\gamma \leqslant \cdots \leqslant L_\delta = G$$

такой, что каждый фактор $L_{\gamma+1}/L_\gamma$, $\gamma < \delta$, гиперабелев.

В случае, когда $\mathbf{R}$ является произвольным коммутативным кольцом, имеет место следующая теорема.

Теорема 2 [12]. *Пусть A — $\mathbf{R}G$-модуль, $\mathbf{R}$ — коммутативное кольцо, G — локально разрешимая* AFN*-группа. Тогда группа G обладает рядом вида* (1).

Естественным обобщением локально разрешимых групп являются гипер(локально разрешимые) группы. Напомним, что группа G называется гипер(локально разрешимой), если G обладает возрастающим рядом нормальных подгрупп

$$\langle 1\rangle = L_0 \leqslant L_1 \leqslant L_2 \leqslant \cdots \leqslant L_\gamma \leqslant \cdots \leqslant L_\delta = G$$

таким, что каждый фактор $L_{\gamma+1}/L_\gamma$, $\gamma < \delta$, локально разрешим.

При изучении гипер(локально разрешимых) AFA-, AFN- и AFM-групп важную роль играют леммы 1 и 2.

Лемма 1. *Пусть A — $\mathbf{R}G$-модуль, G — гипер(локально разрешимая) группа. Имеют место следующие утверждения:*

1) если G — AFM*-группа, $\mathbf{R} = \mathbb{Z}$ — кольцо целых чисел и коцентрализатор группы G в модуле A является минимаксным $\mathbf{R}$-модулем, то группа G гиперабелева;*

2) если G — AFN*-группа, $\mathbf{R}$ — коммутативное нетерово кольцо с единицей и коцентрализатор группы G в модуле A является нетеровым $\mathbf{R}$-модулем, то группа G гиперабелева;*

3) если G — AFA*-группа, $\mathbf{R}$ — дедекиндово кольцо и коцентрализатор группы G в модуле A является артиновым $\mathbf{R}$-модулем, то группа G гиперабелева.*

Лемма 2. *Пусть A — $\mathbf{R}G$-модуль, G — гипер(локально разрешимая)* AFN*-группа, $\mathbf{R}$ — коммутативное кольцо. Если коцентрализатор группы G в модуле A является нетеровым $\mathbf{R}$-модулем, то группа G обладает рядом вида* (1).

Свойства гипер(локально разрешимых) AFA-, AFN- и AFM-групп описываются теоремами 3 и 4.

Теорема 3. *Пусть A — $\mathbf{R}G$-модуль, G — гипер(локально разрешимая) группа. Справедливы следующие утверждения:*

(1) если G — AFM*-группа, $\mathbf{R} = \mathbb{Z}$ — кольцо целых чисел, то группа G обладает рядом вида* (1)*;*

(2) если G — AFN*-группа, $\mathbf{R}$ — коммутативное нетерово кольцо с единицей, то группа G обладает рядом вида* (1)*;*

(3) если G — AFA*-группа, $\mathbf{R}$ — дедекиндово кольцо, то группа G обладает рядом вида* (1).

Теорема 4. *Пусть A — $\mathbf{R}G$-модуль, $\mathbf{R}$ — коммутативное кольцо, G — гипер(локально разрешимая)* AFN*-группа. Тогда группа G обладает рядом нормальных подгрупп*

$$\langle 1\rangle = L_0 \leqslant L_1 \leqslant L_2 \leqslant \cdots \leqslant L_\gamma \leqslant \cdots \leqslant L_\delta = G$$

таким, что каждый фактор $L_{\gamma+1}/L_\gamma$, $\gamma < \delta$, имеет ряд вида (1).

Следует отметить, что как в случае локально разрешимых AFN-групп, так и в случае гипер(локально разрешимых) AFN-групп, структура рассматриваемых групп существенно зависит от структуры кольца $\mathbf{R}$. Это связано с тем, что структура группы автоморфизмов конечно порожденного модуля над произвольным коммутативным кольцом значительно сложнее, чем структура группы автоморфизмов конечно порожденного модуля над коммутативным нетеровым кольцом ([14, гл. 13]).

1. *Dieudonne J.* Les determinants sur un corps non commutative // Bull. Math. Soc. France. – 1943. – **71**. – P. 27–45.

2. *Phillips R. E.* The structure of groups of finitary transformations // J. Algebra. – 1988. – **119**, No 2. – P. 400–448.
3. *Phillips R. E.* Finitary linear groups: a survey // Finite and locally finite groups / NATO ASI ser. C. Math. Phys. Sci. – Dordrecht: Kluwer, 1995. – Vol. 471. – P. 111–146.
4. *Kurdachenko L. A., Muñoz-Escolano J. M., Otal J.* Antifinitary linear groups // Forum Math. – 2008. – **20**, No 1. – P. 27–44.
5. *Kurdachenko L. A., Subbotin I. Ya., Semko N. N.* Insight into modules over Dedekind domains. – Kyiv: Institute of Mathematics of the NAS of Ukraine, 2008. – 119 p.
6. *Wehrfritz B. A. F.* Artinian-finitary groups over commutative rings // Ill. J. Math. – 2003. – **47**, No 1–2. – P. 551–565.
7. *Wehrfritz B. A. F.* Artinian-finitary groups over commutative rings and non-commutative rings // J. Lond. Math. Soc. (2). – 2004. – **70**, No 2. – P. 325–340.
8. *Wehrfritz B. A. F.* Artinian-finitary groups are locally normal-finitary // J. Algebra. – 2005. – **287**, No 2. – P. 417–431.
9. *Wehrfritz B. A. F.* Finitary and artinian-finitary groups over the integers $\mathbb{Z}$ // Ukr. Math. J. – 2002. – **54**, No 6. – P. 753–763.
10. *Курдаченко Л. А.* О группах с минимаксными классами сопряженных элементов // Бесконечные группы и примыкающие алгебраические структуры. – Киев, 1993. – С. 160–177.
11. *Дашкова О. Ю.* Локально разрешимые AFN-группы // Проблемы физики, математики и техники. – 2012. – № 3(12). – С. 58–64.
12. *Dashkova O. Yu.* On locally soluble AFN-groups // Algebra Discrete Math. – 2012. – **14**, No 1. – P. 37–48.
13. *Дашкова О. Ю.* О модульных аналогах антифинитарных линейных групп // Итоги науки. Юг России. Сер. Мат. форум. Т. 6. Группы и графы. – Владикавказ, 2012. – С. 18–24.
14. *Wehrfritz B. A. F.* Infinite linear groups. – Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete. – New York; Heidelberg; Berlin: Springer, 1973. – 229 p.

Днепропетровский национальный университет им. Олеся Гончара

Поступило в редакцию 11.02.2013

О. Ю. Дашкова

Модулі над груповими кільцями узагальнено розв'язних груп

Нехай A — $\mathbf{R}G$-модуль такий, що $\mathbf{R}$ — комутативне кільце, $A/C_A(G)$ не є нетеровим $\mathbf{R}$-модулем (відповідно $A/C_A(G)$ не є артиновим $\mathbf{R}$-модулем, $A/C_A(G)$ не є мінімаксним $\mathbf{R}$-модулем), $C_G(A) = 1$, G — гіпер(локально розв'язна) група. Описано властивості гіпер(локально розв'язної) групи G такої, що кожна власна підгрупа H групи G, для якої $A/C_A(H)$ не є нетеровим $\mathbf{R}$-модулем (відповідно $A/C_A(H)$ не є артиновим $\mathbf{R}$-модулем, $A/C_A(H)$ не є мінімаксним $\mathbf{R}$-модулем), скінченно породжена.

O. Yu. Dashkova

Modules over group rings of generalized soluble groups

Let A be an $\mathbf{R}G$-module, where $\mathbf{R}$ is a commutative ring, $A/C_A(G)$ is not a Noetherian $\mathbf{R}$-module (respectively, $A/C_A(G)$ is not an Artinian $\mathbf{R}$-module, and $A/C_A(G)$ is not a minimax $\mathbf{R}$-module), $C_G(A) = 1$, G is a hyper(locally soluble) group. We describe the properties of a hyper(locally soluble) group G such that each proper subgroup H of G, for which $A/C_A(H)$ is not a Noetherian $\mathbf{R}$–module (respectively, $A/C_A(H)$ is not an Artinian $\mathbf{R}$-module, and $A/C_A(H)$ is not a minimax $\mathbf{R}$-module) is finitely generated.