

УДК 539.3

Д. М. Ли́ла

Условия текучести в задаче о неустойчивости быстровращающихся дисков

(Представлено академиком НАН Украины А. А. Мартынюком)

Развит способ исследования методом малого параметра возможной потери устойчивости вращающегося плоского сплошного кругового диска. На основании условия текучести Мизеса получено в первом приближении характеристическое уравнение относительно критического радиуса пластической зоны. Численно найдены значения критической угловой скорости вращения при различных параметрах диска.

Напряженное состояние равномерно вращающихся круговых дисков является осесимметричным. В круговой пластической зоне, появляющейся в диске при достаточно большой скорости вращения, решение задачи о плоском напряженном состоянии имеет замкнутый вид или приводит к интегрированию обыкновенного нелинейного дифференциального уравнения. В первом случае это позволяет с помощью приближенного аналитического метода малого параметра [1] применить решение плоской упруго-пластической задачи в исследовании устойчивости диска. Параметр нагрузки, соответствующий критическим усилиям, определяется при этом из характеристического уравнения [2], существенно более простого, чем основные уравнения теории устойчивости деформируемых тел [3]. Вместе с этим попытка использовать вместо условия текучести Сен-Венана [4] условие текучести из теории постоянства интенсивности напряжений [5] предполагает применение разностной схемы во втором из указанных выше случаев. Как это согласуется с аналитическим методом возмущения формы границы [6] и насколько позволяет уточнить значения критического радиуса пластической зоны и критической угловой скорости — основные вопросы, освещенные в данной работе.

Постановка задачи. Объектом исследования является упругий однородный и изотропный плоский сплошной круговой диск радиусом b (рис. 1). Предел текучести материала диска обозначен σ_s , модуль упругости — E , плотность — γ , коэффициент Пуассона — ν . Постоянная угловая скорость вращения равна ω , текущий радиус пластической зоны невозмущенного диска — r_0 . Предмет исследования составляют характерные критические величины самоуравновешенной формы потери устойчивости диска, когда уравнение внешней его границы с точностью до бесконечно малых первого порядка представлено в виде

$$r = b + d \cos n\theta, \quad d = \text{const},$$

или

$$\rho = 1 + \delta \cos n\theta, \tag{1}$$

где $\rho = r/b$ — безразмерный текущий радиус; δ — малый параметр; $n \in \{2, 3, \dots\}$; θ — полярный угол. Круговая область $0 \leq r < r_{0*}$ диска пластическая, тогда как кольцевая его область $r_{0*} < r \leq b$ в момент потери устойчивости пребывает в упругом состоянии.

© Д. М. Ли́ла, 2013

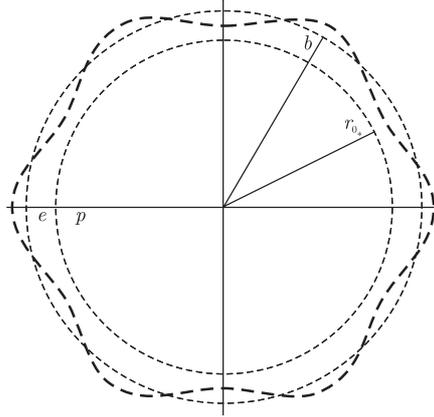


Рис. 1

Требуется получить в первом приближении характеристическое уравнение относительно критического радиуса пластической зоны $r_0 = r_{0*}$ и определить соответствующую величину критической угловой скорости вращения $\omega = \omega_*$. Напомним [1, 6], что для этого нужно установить условие существования нетривиальных решений системы линейных однородных уравнений

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} + \frac{d\sigma_{rr}^0}{dr}u &= 0 \quad \text{при} \quad r = b, \\ \sigma_{r\theta} - \frac{\sigma_{\theta\theta}^0 - \sigma_{rr}^0}{b} \frac{du}{d\theta} &= 0 \quad \text{при} \quad r = b, \\ \sigma_{rr} &= 0 \quad \text{при} \quad r = r_0, \\ \sigma_{r\theta} &= 0 \quad \text{при} \quad r = r_0 \end{aligned}$$

относительно произвольных постоянных, входящих в выражения для компонент напряжений и перемещений σ_{rr} , $\sigma_{r\theta}$ и u , определяющих возмущенное напряженно-деформированное состояние вращающегося диска [7]. Указанные линеаризованные возмущения первого порядка малости удовлетворяют дифференциальному уравнению равновесия плоской задачи и уравнениям связи между напряжениями и перемещениями [6, 8] в частных производных, тогда как невозмущенное напряженное состояние (обозначено верхним индексом 0) определено обыкновенным дифференциальным уравнением квазистатического равновесия [4]

$$\frac{d\sigma_{rr}}{dr} + \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}}{r} = -\frac{\sigma}{b^2}r, \quad \sigma = \gamma b^2 \omega^2, \quad (2)$$

и уравнениями связи в упругой зоне или условием текучести

$$\sigma_{rr}^2 - \sigma_{rr}\sigma_{\theta\theta} + \sigma_{\theta\theta}^2 = \sigma_s^2 \quad (3)$$

в пластической зоне.

Характеристическое уравнение. Перейдем в уравнении (2) к безразмерным напряжениям и радиусу и рассмотрим с учетом (3) распределение напряжений в пластической зоне [4]:

$$\frac{d\sigma_{rr}}{d\rho} + \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}}{\rho} = -\frac{\sigma}{\sigma_s}\rho, \quad (4)$$

$$\left. \begin{array}{l} \sigma_{rr} \\ \sigma_{\theta\theta} \end{array} \right\} = \frac{2}{\sqrt{3}} \cos\left(w \pm \frac{\pi}{6}\right). \quad (5)$$

Здесь переменная w со значениями на $[0, \pi]$ определена соотношением

$$\operatorname{tg} w = \sqrt{3} \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}}{\sigma_{rr} + \sigma_{\theta\theta}}. \quad (6)$$

Учитывая (5), уравнение (4) в переменных $\rho - w$ можно представить в виде

$$\rho \sin\left(w + \frac{\pi}{6}\right) \frac{dw}{d\rho} + \sin w = \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{\sigma}{\sigma_s} \rho^2. \quad (7)$$

Производя в уравнении (7) замену независимой переменной

$$z^2 = \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{\sigma}{\sigma_s} \rho^2, \quad (8)$$

а также принимая во внимание условие в центре диска $\sigma_{rr}(0) = \sigma_{\theta\theta}(0)$ и равенство (6), приходим в переменных $z - w$ к начальной задаче

$$\frac{dw}{dz} = \frac{z^2 - \sin w}{z \sin\left(w + \frac{\pi}{6}\right)} \equiv f(z, w), \quad w(0) = 0. \quad (9)$$

При этом $f(0 + 0, 0 + 0) = -2$.

Предположим далее, что нелинейное дифференциальное уравнение (9) проинтегрировано на отрезке $[0, \bar{z} + \Delta z]$, где Δz — некоторое положительное число, а \bar{z} — правая часть в оценке

$$z = \frac{\sqrt[4]{3}}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{\sigma}{\sigma_s}} \rho < \frac{\omega_*}{q}.$$

Здесь через ω_*/q обозначено относительную критическую угловую скорость, рассчитанную методом малого параметра на основании условия текучести $\sigma_{\theta\theta} = \sigma_s$, а $q = b^{-1} \sqrt{\sigma_s/\gamma}$.

Пусть $\beta_0 := r_0/b$ и $w(\beta_0) = w_0$. Тогда в соответствии с (5)

$$\left. \begin{array}{l} R := \sigma_{rr}(\beta_0) \\ \Theta := \sigma_{\theta\theta}(\beta_0) \end{array} \right\} = \frac{2}{\sqrt{3}} \cos\left(w_0 \pm \frac{\pi}{6}\right). \quad (10)$$

Поскольку распределение напряжений в упругой зоне диска имеет вид

$$\sigma_{rr}^{0e} = C \left(1 - \frac{1}{\rho^2}\right) + \frac{\nu + 3}{8} \frac{\sigma}{\sigma_s} (1 - \rho^2), \quad (11)$$

$$\sigma_{\theta\theta}^{0e} = C \left(1 + \frac{1}{\rho^2}\right) + \frac{1}{8} \frac{\sigma}{\sigma_s} (\nu + 3 - (3\nu + 1)\rho^2), \quad (12)$$

связать постоянные C и ω с радиусом пластической зоны β_0 можно из условия непрерывности радиального усилия и радиального смещения на упруго-пластической границе [8]. Сопряжение решений дает систему уравнений

$$R = \sigma_{rr}^{0e}(\beta_0), \quad \Theta = \sigma_{\theta\theta}^{0e}(\beta_0),$$

из которой с учетом соотношений (10)–(12) находим

$$C = \frac{\beta_0^2 \{ \Theta(\nu + 3)(1 - \beta_0^2) - R(\nu + 3 - (3\nu + 1)\beta_0^2) \}}{2\{\nu + 3 - (2(1 + \nu) + (1 - \nu)\beta_0^2)\beta_0^2\}}, \quad (13)$$

$$\frac{\sigma}{\sigma_s} = \frac{\omega^2}{q^2} = \frac{4(R(1 + \beta_0^2) + \Theta(1 - \beta_0^2))}{(1 - \beta_0^2)(\nu + 3 + (1 - \nu)\beta_0^2)}. \quad (14)$$

Принимая во внимание выражения (13), (14), получаем

$$A_1 := \frac{d\sigma_{rr}^{0e}(1)}{d\rho} = 2C - \frac{\nu + 3}{4} \frac{\sigma}{\sigma_s}, \quad A_2 := \sigma_{\theta\theta}^{0e}(1) - \sigma_{rr}^{0e}(1) = A_1 + \frac{\sigma}{\sigma_s}. \quad (15)$$

Таким образом, в характеристическом уравнении [1, 2, 9, 10]

$$\det A(\beta_0) = 0 \quad (16)$$

все члены определены:

$$\begin{aligned} a_{11} &= n + A_1 \frac{\sigma_s (\nu + 1)n}{E (n - 1)}, & a_{12} &= n - A_1 \frac{\sigma_s (\nu + 1)n}{E (n + 1)}, \\ a_{13} &= n - 2 + A_1 \frac{\sigma_s (n - 2 + \nu(n + 2))}{E (n + 1)}, & a_{14} &= n + 2 - A_1 \frac{\sigma_s (n + 2 + \nu(n - 2))}{E (n - 1)}, \\ a_{21} &= -1 + A_2 \frac{\sigma_s (\nu + 1)n}{E (n - 1)}, & a_{22} &= 1 - A_2 \frac{\sigma_s (\nu + 1)n}{E (n + 1)}, \\ a_{23} &= -1 + A_2 \frac{\sigma_s (n - 2 + \nu(n + 2))}{E (n + 1)}, & a_{24} &= 1 - A_2 \frac{\sigma_s (n + 2 + \nu(n - 2))}{E (n - 1)}, \\ a_{31} &= n\beta_0^{n-2}, & a_{32} &= n\beta_0^{-n-2}, & a_{33} &= (n - 2)\beta_0^n, & a_{34} &= (n + 2)\beta_0^{-n}, \\ a_{41} &= -\beta_0^{n-2}, & a_{42} &= \beta_0^{-n-2}, & a_{43} &= -\beta_0^n, & a_{44} &= \beta_0^{-n}. \end{aligned}$$

Схема метода, пример, обсуждение. Применяя к уравнению (9) разностную схему с некоторым шагом $(\bar{z} + \Delta z)/N$, строим массив значений (z_k, w_k) , $k = 0, 1, \dots, N$. Перебирая элементы этого массива, вычисляем по формуле (10) с $w_0 := w_k$ потенциально возможные значения R и Θ . Далее на основе соотношений (8) и (14) с $z := z_0 := z_k$ получаем биквадратное уравнение относительно β_0 :

$$c_1 \beta_0^4 + c_2 \beta_0^2 + c_3 = 0,$$

где

$$c_1 = R - \Theta + \frac{(1 - \nu)z^2}{2\sqrt{3}}, \quad c_2 = R + \Theta + \frac{(1 + \nu)z^2}{\sqrt{3}}, \quad c_3 = -\frac{(\nu + 3)z^2}{2\sqrt{3}}.$$

Решив это уравнение, вычисляем C , σ/σ_s , A_1 , A_2 (см. (13)–(15)) и проверяем выполнение тождества $\det A(\beta_0) \equiv 0$ (см. (16)). В случае положительного результата полагаем $\beta_{0*} := \beta_0$, $\omega_*/q := \sqrt{\sigma/\sigma_s}$.

В табл. 1 приведены решения задачи о потере устойчивости диска из несжимаемого материала ($\nu = 1/2$) для различных n и $\sigma_s/E = 0,01$. Численное интегрирование задачи

Таблиця 1. Значення критического радіуса и относительной критической скорости в зависимости от n

n	2	3	4	5	6
β_{0*}	0,7073	0,8392	0,8935	0,9225	0,9403
ω_*/q	1,7466	1,7875	1,7975	1,8011	1,8027

Коши (9) осуществлялось по методу Рунге — Кутта четвертого порядка на отрезке $[0, 2]$ с шагом $2 \cdot 10^{-7}$. Сравнение полученных с одинаковой погрешностью “точного” (табл. 1) и “приближенного” [1, 9] решений дает максимальное расхождение относительной критической скорости в 4,4%. Такой результат можно считать удовлетворительным, чтобы использовать приближенные решения для контроля расчетов, упрощенных оценок и обоснования результатов применения численных методов.

Примечательно также, что в случае $\beta_{0*} = 0$ “первая критическая скорость”, при которой диск может потерять устойчивость по эксцентричной форме, вычисляется одинаково как для условия текучести Сен-Венана [1, 2, 11], так и для условия текучести Мизеса (см. (9), (10), (14)):

$$\frac{\omega_*}{q} = \sqrt{\frac{8}{\nu + 3}}$$

1. *Ивлев Д. Д., Ершов Л. В.* Метод возмущений в теории упругопластического тела. – Москва: Наука, 1978. – 208 с.
2. *Ивлев Д. Д.* Механика пластических сред. Т. 2. – Москва: ФИЗМАТЛИТ, 2002. – 448 с.
3. *Гузь А. Н., Бабич И. Ю.* Трехмерная теория устойчивости деформируемых тел. – Киев: Наук. думка, 1985. – 280 с.
4. *Соколовский В. В.* Теория пластичности. – Москва: Высш. шк., 1969. – 608 с.
5. *Надаи А.* Пластичность и разрушение твердых тел. В 2 т. – Москва: Изд-во иностр. лит., 1954. – Т. 1. – 648 с.
6. *Гузь А. Н., Немеш Ю. Н.* Метод возмущения формы границы в механике сплошных сред. – Киев: Выща шк., 1989. – 352 с.
7. *Бицено К. Б., Граммель Р.* Техническая динамика. Т. 1. – Москва; Ленинград: ГИТТЛ, 1950. – 900 с.
8. *Бицено К. Б., Граммель Р.* Техническая динамика. Т. 2. – Москва; Ленинград: ГИТТЛ, 1952. – 640 с.
9. *Лила Д. М., Мартынюк А. А.* О потере устойчивости вращающегося упруго-пластического кругового диска // Доп. НАН України. – 2011. – № 1. – С. 44–51.
10. *Lila D. M., Martynuk A. A.* Stability loss of rotating elastoplastic discs of the specific form // Appl. Math. – 2011. – 2, No 5. – P. 579–585.
11. *Лила Д. М.* Эксцентричная форма потери устойчивости вращающегося упруго-пластического диска // Доп. НАН України. – 2011. – № 2. – С. 49–53.

Институт механики им. С. П. Тимошенко
НАН Украины, Киев

Поступило в редакцию 25.12.2012

Д. М. Лила

Умови текучості в задачі про нестійкість дисків, які швидко обертаються

Розвинуто спосіб дослідження методом малого параметра можливої втрати стійкості плоского суцільного кругового диска, що обертається. На підставі умови текучості Мизеса одержано у першому наближенні характеристичне рівняння відносно критичного радіуса пластичної зони. Чисельно знайдено значення критичної кутової швидкості обертання при різних параметрах диска.

D. M. Lila

The conditions of fluidity in the problem of instability of quickly rotating disks

Possible losses of stability of a rotating plane solid circular disk are studied by means of the small parameter method. Proceeding from the Mises condition of fluidity, the characteristic equation is obtained in the first approximation in respect to the critical radius of the plastic zone. The values of critical angular speed of rotation for different disk parameters are determined numerically.