



УДК 532.529.6

А. Г. Гирин

## Теория дробления капли по механизму градиентной неустойчивости

(Представлено академиком НАН Украины В. Т. Гринченко)

*Получено полное аналитическое решение задачи о дроблении капли в скоростном потоке газа. На основе механизма градиентной неустойчивости течения в погранслое на поверхности капли выведены общие дифференциальные уравнения кинетики дробления. Их интегрирование в приближении сферичности капли позволило найти закон изменения ее массы, условия и время ее полного разрушения. С применением эмпирического закона движения капли найдена нестационарная функция распределения количества диспергированных капелек по размерам. Рассчитаны промежуточные и окончательные распределения и описаны общие особенности диспергирования. Для случая, когда эмпирический закон движения капли неизвестен, получено совместное решение системы дифференциальных уравнений кинетики дробления и движения капли и найдена функция распределения капелек по размерам.*

1. Исследования разрушения капель и струй жидкости в потоке газа актуальны в связи с разработкой форсунок энергетических установок, определением условий взрывобезопасности проведения технологических процессов в промышленности и др. [1–4]. Кинетические параметры дробления — размеры, количество и периодичность отрыва дочерних капелек — контролируют последующие движение и испарение сорванной массы, уносимой потоком в след родительской капли и образующей там горючую смесь. Необходимыми элементами описания подготовительных для формирования и воспламенения горючей смеси процессов являются закон убыли массы капли (закон абляции)  $m(t)$ , размеры срывающихся капелек  $r$  и распределения их количества  $n$  по размерам.

Экспериментальное изучение дробления осложнено быстрым протеканием, большим количеством и малыми размерами капелек, наличием паров, скрывающих процесс от наблюдателя. Поэтому достоверные сведения о законе абляции капли и о распределении капелек по размерам отсутствуют, а поиск закономерностей дробления следует связать с развитием адекватных математических моделей [5].

© А. Г. Гирин, 2013

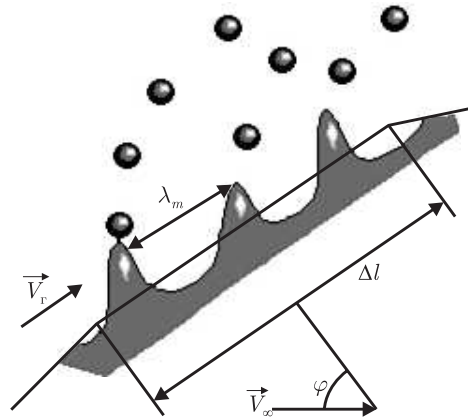


Рис. 1. Диспергирование на произвольной площадке  $\Delta l$  поверхности капли

Исследование устойчивости поверхности капли с учетом непрерывного изменения скорости в сопряженных (газ–жидкость) погранслоях [6, 7] выявило для слабвязких жидкостей новый тип неустойчивости — *градиентную неустойчивость*, которая отлична от классических случаев Кельвина–Гельмгольца и Релея–Тейлора, так как вызвана силами инерции в градиентном ( $10^5 - 10^7 \text{ с}^{-1}$ ) скоростном течении возмущенного погранслоя жидкости. Теория градиентной неустойчивости объясняет разрушение капли по типу “сдир” как квазинепрерывное высокочастотное диспергирование с неустойчивой части ее поверхности [7]. Численная реализация модели градиентной неустойчивости показала ее адекватность явлению при достаточно больших значениях критерия Вебера  $We_\infty = \rho_\infty V_\infty^2 2R_0 / \sigma$  и критерия существования градиентной неустойчивости  $GN = We_\infty Re_\infty^{-0,5}$ , и позволила в замкнутом виде решить основную задачу теории детонации аэрозолей, произведя расчет течения двухфазной пятикомпонентной дробящейся реагирующей смеси в стационарной зоне детонационной волны [8].

Последовательный анализ закономерностей градиентной неустойчивости позволяет развить аналитический подход и получить в настоящей работе дифференциальные уравнения абляции и количества дочерних капелек. Их интегрирование дает возможность найти закон движения дробящейся капли  $w(t)$ , закон изменения ее массы  $m(t)$ , условия и время полного разрушения, а также нестационарную функцию распределения сорванных капелек по размерам  $f_n(r, t)$ .

**2. Уравнение производства дочерних капелек.** Закономерности диспергирования определены изменением вдоль поверхности капли параметров доминантного возмущения — волнового числа  $\Delta_m$  и инкремента нарастания амплитуды  $\text{Im}(z_m)$ , зависящих от “поверхностного” числа Вебера  $We_\Pi = \rho_{\text{ж}} V_\Pi^2 \delta_{\text{ж}} / \sigma$  [7]. В скоростных потоках при  $GN \gg GN_{\text{кр}} \simeq 0,3$  критическая точка  $\varphi_{\text{кр}}(t)$ , которая делит поверхность капли на устойчивую и неустойчивую части, расположена вблизи передней точки торможения:  $\varphi_{\text{кр}} \ll \pi$  ( $\varphi$  — полярный угол произвольной площадки  $\Delta l$  поверхности капли, рис. 1), поэтому значения  $\Delta_m$ ,  $\text{Im}(z_m)$  на большей части поверхности постоянны [7]. Принимая распределение толщины погранслоя в газе вдоль поверхности в форме Рэнджера  $\delta_r(\varphi, t) = 2,2R(t) \text{Re}(t)^{-0,5} \Psi(\varphi)$ ,  $\Psi = ((6\varphi - 4 \sin 2\varphi + 0,5 \sin 4\varphi) / \sin^5 \varphi)^{0,5}$  [9] и полагая обтекание капли потенциальным, для скорости на границе раздела  $V_\Pi$  и толщины погранслоя в жидкости  $\delta_{\text{ж}}$ , имеем:  $V_\Pi(\varphi, t) = 1,5(\alpha\mu)^{1/3} (1 + (\alpha\mu)^{1/3})^{-1} (V_\infty - w(t)) \sin \varphi$ ,  $\delta_{\text{ж}}(\varphi, t) = 2,2\alpha^{1/3} \mu^{-2/3} R(t) \text{Re}^{-0,5}(t) \Psi(\varphi)$ . То-

где условие существования градиентной неустойчивости  $We_{\Pi}(\varphi) > We_{\Pi,кр} = 0,004$  [7] на поверхности капли запишется так:

$$\frac{2,475\alpha}{(1 + (\alpha\mu)^{1/3})^2} \sqrt{\tilde{R}(\tau)(1 - W(\tau))^3} \sin^2 \varphi \Psi(\varphi) GN \geq K, \quad (1)$$

где  $w, V_{\infty}$  — скорости капли и газового потока;  $\rho_{г,ж}, \mu_{г,ж}$  — плотности и вязкости сред;  $\alpha = \rho_{г}/\rho_{ж}, \mu = \mu_{г}/\mu_{ж}, W = w/V_{\infty}, \tilde{R} = R/R_0, R_0$  — начальный радиус капли;  $\tau = t/t_x, t_x = 2R_0/\alpha^{0,5}V_{\infty}$  — характерное время процесса. Равенство в (1) при  $K = We_{\Pi,кр}$  определяет значение  $\varphi_{кр}$ ; при  $GN > GN_{кр}$  имеем  $\varphi_{кр} < \pi/2$  и часть поверхности, прилегающая к ободку капли, неустойчива к периодическим возмущениям, что определяет возможность диспергирования механизмом градиентной неустойчивости. В интенсивных потоках за ударными и детонационными волнами  $GN \gg GN_{кр}$ , поэтому  $\varphi_{кр} \ll \pi/2$  и большая часть поверхности капли подвержена действию механизма неустойчивости.

Положим значения радиусов капелек, срываемых с произвольной площадки  $\Delta l = R(t) \times \Delta \varphi$  (рис. 1), пропорциональными длине волны доминантного возмущения:  $r = k_r \lambda_m$ , а периодов их отрыва — инкременту нарастания амплитуды:  $t_{и} = k_t Im^{-1}(z_m) \delta_{ж}/V_{\Pi}$ . В силу осесимметричности обтекания количество неустойчивых волн на площадке определяет количество торов радиуса  $R(t) \sin \varphi$ , срываемых с соответствующего сферического пояса:  $n_{т} = \Delta l/\lambda_m$ . Полагая, что тор разрушается в потоке на капельки радиуса  $r$  и относя объем всех торов  $\Delta v = n_{т} v_{т} = \pi k_r^2 \lambda_m 2\pi R \sin \varphi \Delta l$ , срываемых за время  $t_{и}$ , к объему капельки, получаем уравнение скорости производства капелек  $\dot{n}'$  на площадке  $\Delta \varphi$ :

$$\Delta n(\varphi, \tau) = \dot{n}'(\varphi, \tau) \Delta \varphi \Delta \tau = B_2 \sqrt{\tilde{R}(\tau)(1 - W(\tau))^5} \frac{\sin^2 \varphi}{\Psi^3(\varphi)} \Delta \varphi \Delta \tau; \quad (2)$$

$$\tilde{r}(\varphi, \tau) = B_1 T(\tau) \Psi(\varphi), \quad T(\tau) = \left( \frac{\tilde{R}(\tau)}{1 - W(\tau)} \right)^{0,5}, \quad (3)$$

где точка означает дифференцирование по  $\tau$ , штрих — по  $\varphi$ ,

$$B_1 = \frac{4,4\pi k_r}{\Delta_m(We_{\Pi})} \frac{\alpha^{1/3}}{\mu^{2/3}(2 Re_{\infty})^{1/2}}, \quad B_2 = \frac{0,21 \Delta_m^2(We_{\Pi}) \operatorname{Im}(z(We_{\Pi})) \mu^{7/3} (2 Re_{\infty}^3)^{1/2}}{\pi k_r k_t (1 + (\alpha\mu)^{1/3}) \alpha^{7/6}}.$$

**3. Уравнение абляции капли.** Отнеся теперь сорванную массу к периоду ее отрыва  $t_{и}$ , получим для скорости уноса массы с рассматриваемой площадки:

$$\frac{\Delta m}{\Delta t}(\varphi, t) = \frac{\rho_{ж} \Delta v(\varphi, t)}{t_{и}(\varphi, t)} = \frac{4\pi^3 k_r^2}{k_t} F(\varphi, t) \rho_{ж} R(t) V_{\Pi}(\varphi, t) \sin \varphi \Delta l. \quad (4)$$

На большей части поверхности величина  $F \equiv \operatorname{Im}(z_m)/\Delta_m$  слабо зависит от  $We_{\Pi}$  [7]. В окрестности критической точки значения  $F$  резко падают, так что скоростью массеуноса можно пренебречь при  $We_{\Pi,кр} < We_{\Pi} < We_{\Pi}(\varphi_{л}) \approx 0,006$ . Кроме того, в диапазоне  $\varphi_{кр} < \varphi < \varphi_{л}$  длина волны доминантного возмущения больше размера капли, а время его срабатывания — больше времени ее полного разрушения  $t_b$ . Возмущения не успевают реализоваться до момента  $t_b$ , и диспергирование обусловлено таким значением  $\varphi_{л}(t)$ , для которого  $t_{и}(\varphi_{л}) < t_b, k_r \lambda_m(\varphi_{л}) < R(t)$ . Выбрав в качестве среднего значения  $F = 0,18$

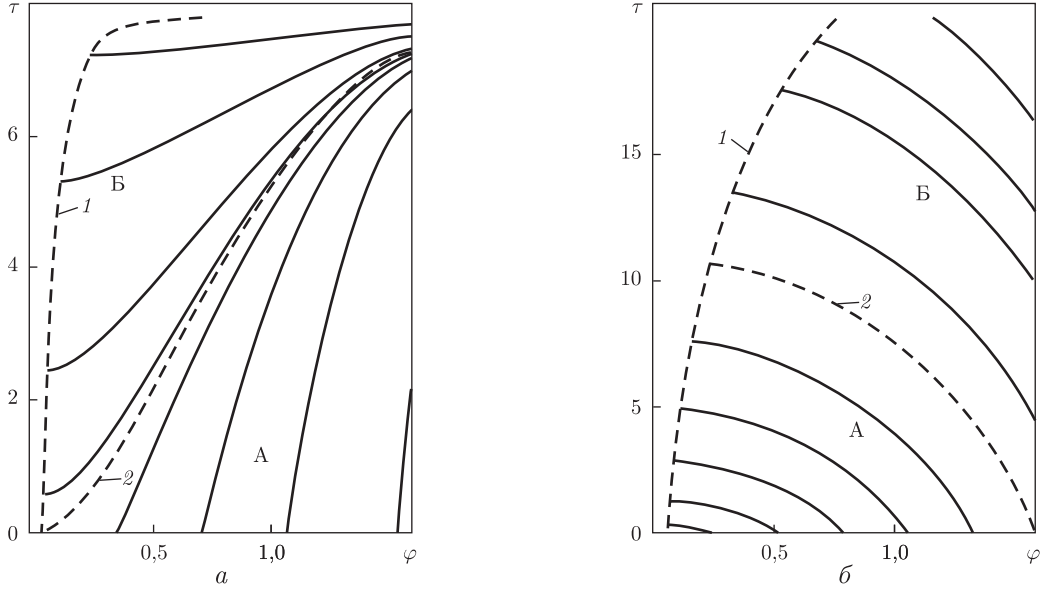


Рис. 2. Семейство кривых  $\tilde{r}(\varphi, \tau) = \text{const}$  (сплошные линии) при  $h = 1,50$  (а) и при  $h = 0,50$  (б); кривая 1 —  $\varphi = \varphi_{\text{л}}(\tau)$ ; кривая 2 —  $\tilde{r}(\varphi, \tau) = \tilde{r}_{0\text{л}}$  в случае (а) и  $\tilde{r}(\varphi, \tau) = \tilde{r}_{0\text{пр}}$  — в случае (б)

и проинтегрировав в интервале  $\varphi_{\text{л}} < \varphi < \pi/2$ , получим *уравнение кинетики уноса массы капли*:

$$\frac{dM}{d\tau} = -1,62 \frac{\pi^2 k_r^2}{k_t (1 + (\alpha\mu)^{1/3})} \alpha^{-1/6} \mu^{1/3} \tilde{R}^2(\tau) (1 - W(\tau)) \left( \frac{\pi}{4} - \frac{\varphi_{\text{л}}(\tau)}{2} + \frac{\sin 2\varphi_{\text{л}}(\tau)}{4} \right), \quad (5)$$

где  $M = m/m_0$ . Уравнение (5) требует одновременного интегрирования уравнения движения центра масс капли для нахождения  $W(\tau)$ , и уравнения (1) при  $K = 0,006$  — для определения  $\varphi_{\text{л}}(t)$ . Положим в (5)  $(\pi/4 - 0,5\varphi + 0,25 \sin 2\varphi) \approx \pi/4$ , поскольку при  $\text{GN} > 3$  вплоть до момента окончания диспергирования выполняется  $\varphi_{\text{л}}(\tau) \ll \pi$ ,  $\sin 2\varphi_{\text{л}} \approx 2\varphi_{\text{л}}$  (кривая 1, рис. 2). Для капли сферической формы  $M(\tau) = \tilde{R}^3(\tau)$  получим:

$$\frac{dM}{d\tau} = -AM^{2/3}(\tau)(1 - W(\tau)), \quad A \equiv 0,405 \frac{\pi^3 k_r^2}{k_t (1 + (\alpha\mu)^{1/3})} \alpha^{-1/6} \mu^{1/3}, \quad (6)$$

где  $A$  — характерная (начальная) скорость уноса массы. Интегрируя при начальном условии  $M(0) = 1$  и учитывая  $W = \alpha^{1/2} dX_{\text{к}}/d\tau$ , где  $X_{\text{к}} = x_{\text{к}}/d_0$ , находим:

$$M(\tau) = \left( 1 - \frac{A}{3}(\tau - \alpha^{1/2} X_{\text{к}}(\tau)) \right)^3, \quad \tilde{R}(\tau) = 1 - \frac{A}{3}(\tau - \alpha^{1/2} X_{\text{к}}(\tau)). \quad (7)$$

Закон изменения массы капли и закон ее ускорения газовым потоком  $X_{\text{к}}(\tau)$  взаимосвязаны. Воспользуемся экспериментальными данными [4], которые можно аппроксимировать в виде  $\alpha^{1/2} X_{\text{к}}(\tau) = \tau - (1 - \exp(-H\tau))/H$ , где  $H = 2\alpha^{1/2}$ ; тогда получим *закон изменения массы и радиуса капли* в процессе диспергирования

$$M(\tau) = \tilde{R}^3(\tau) = (1 - h(1 - \exp(-H\tau)))^3, \quad W = 1 - \exp(-H\tau). \quad (8)$$

Отметим, что аппроксимация  $X_{\text{к}} \sim \tau^2$  [1, 4] также дает возможность получить закон абляции и функцию распределения и приводит к близким результатам [10].

Параметр  $h \equiv A/3H$  является ключевым в описании дробления, поскольку характеризует соотношение темпов двух конкурирующих в этом явлении процессов: уноса массы ( $\sim A$ ) и релаксационного выравнивания скоростей фаз ( $\sim H$ ). При опережающем диспергировании  $h > 1$  капля дробится полностью за время  $\tau_b = \tau_{\text{дис}} = H^{-1} \ln(h/(h-1))$ . При  $h < 1$  диспергирование прекращается до момента полного разрушения  $\tau_{\text{дис}} < \tau_b$ , так как опережающее ускорение капли ведет к быстрому уменьшению главного фактора разрушения — относительной скорости; остаток может дробиться иным механизмом, например, неустойчивостью Релея–Тейлора [7]. Анализ показывает, что значения  $h$ , несколько большие единицы, отвечают условиям за ударными и детонационными волнами,  $h \geq 4$  — дроблению жидких метеороидов, а  $h < 1$  — диспергированию капель вязких жидкостей.

Результаты расчета [10] зависимости (8) для условий, близких к эксперименту [4] ( $d_0 = 2,05$  мм,  $We_0 = 1,18 \cdot 10^3$ ), согласуются с экспериментальными данными.

**4. Уравнение для функции распределения.** Интегрирование уравнения (2) во всей области диспергирования  $\varphi_{\text{л}}(\tau) < \varphi < \pi/2$ ,  $0 < \tau < \tau_{\text{дис}}$  дает общее число сорванных капелек  $N$ . В прикладных задачах необходимо знать распределение капелек по размерам  $\Delta n(\tilde{r}) = f_n(\tilde{r})\Delta\tilde{r}$ . С целью найти функцию распределения  $f_n(\tilde{r})$  исключим  $\Psi(\varphi)$  из уравнения (2) с помощью (3):

$$\Delta n = \dot{n}' \Delta\varphi \Delta\tau = B_1^3 B_2 \frac{\tilde{R}^2(\tau)(1-W(\tau))}{\tilde{r}^3} \sin^2 \varphi \Delta\varphi \Delta\tau \quad (9)$$

и проинтегрируем (9) в полосе шириной  $\Delta\tilde{r}(\varphi, \tau)$ , окружающей линию  $\tilde{r}(\varphi, \tau) = \text{const} = \tilde{r}_c$ . Вид этих линий различен для  $h < 1$ ,  $h > 1$  (рис. 2). При  $h > 1$  все кривые имеют положительный наклон к оси  $\varphi$ . Кривая  $\tilde{r} = \tilde{r}_{0\text{л}}(\varphi, \tau)$  делит всю область диспергирования на две части: в области А (ниже этой линии) пределами интегрирования являются  $\varphi_* = \varphi_0 = \varphi(0)|_{\tilde{r}_c}$ ,  $\varphi^* = \pi/2$ , а значение  $\varphi_0(\tilde{r}_c)$  находится из уравнения кривой  $\tilde{r}(\varphi, \tau) = \tilde{r}_c$  при  $\tau = 0$ . В области Б (выше этой линии) —  $\varphi_* = \varphi_{\text{л}}(\tau_{\text{л}})$ ,  $\varphi^* = \pi/2$ , где  $\tau_{\text{л}}$  — момент пересечения кривых  $\varphi_{\text{л}}(\tau)$  и  $\tilde{r} = \tilde{r}_c$ . Отметим, что при  $h > 1$  в области Б всегда  $\tilde{r} < \tilde{r}_{0\text{л}} = B_1 \Psi(\varphi_{\text{л}0}) \approx \sqrt{3,2} B_1$ , что следует из (2). При  $h < 1$  кривые имеют отрицательный наклон. В области А ниже линии  $\tilde{r} = \tilde{r}_{0\text{пр}}(\varphi, \tau)$  пределами интегрирования являются  $\varphi_* = \varphi_0$ ,  $\varphi^* = \varphi_{\text{л}}(\tau_{\text{л}})$ , а в области Б (выше этой линии) —  $\varphi_* = \pi/2$ ,  $\varphi^* = \varphi_{\text{л}}(\tau_{\text{л}})$ ; эти значения находятся из уравнений (1), (3), причем для области Б всегда  $\tilde{r} > \tilde{r}_{0\text{пр}} = B_1 \Psi(\pi/2) = \sqrt{3\pi} B_1$ .

Выразим из (3)  $\Delta\tilde{r}$  через  $\Delta\tau$  и заменим в (9)  $\Delta\tau$  на  $\Delta\tau = (B_1 \dot{T}(\tau) \Psi(\varphi))^{-1} \Delta\tilde{r}$ , где  $\dot{T}(\tau) = -(h-1)H/2\sqrt{\tilde{R}(\tau)(1-W(\tau))}$ . Проинтегрировав (9) от  $\varphi_*$  до  $\varphi^*$ , получим уравнение для функции распределения  $f_n(\tilde{r})$ :

$$\Delta n = f_n \Delta\tilde{r} = 2 \frac{B_1^3 B_2}{(h-1)H\tilde{r}^4} \int_{\varphi_*}^{\varphi^*} \tilde{R}^3(\tau(\varphi))(1-W(\tau(\varphi))) \sin^2 \varphi d\varphi \Delta\tilde{r}. \quad (10)$$

Вычисление интеграла в (10) в общем случае затруднительно. Рассмотрим случай, когда это можно сделать точно.

**5. Функция распределения при  $h = 1$ .** Случай  $h = 1$  характерен тем, что для закона движения капли вида  $W = 1 - \exp(-H\tau)$  из (8) следует  $\tilde{R}(\tau) = \exp(-H\tau) = 1 - W(\tau)$ , тогда  $T(\tau) \equiv 1$ , поэтому зависимость от  $\tau$  в (3) исчезает, т. е. линии  $\tilde{r} = \text{const}$  параллельны оси  $\tau$ . В случае  $h = 1$  равенства темпов уноса массы и выравнивания скоростей капли и газа,

уменьшение во времени размера срывааемых капелек из-за уменьшения размера родительской капли на каждой фиксированной площадке в точности компенсируется его увеличением за счет уменьшения относительной скорости. Поэтому, несмотря на нестационарность процесса, размер капелек, срывающихся с фиксированной площадки, остается неизменным, и  $\tilde{r}$  является функцией только  $\varphi_0$ , изменяясь в диапазоне  $\tilde{r}_{л0} = \tilde{r}(\varphi_{л0}) \leq \tilde{r} \leq \tilde{r}_{пр0} = \tilde{r}(\pi/2)$ , а  $\tilde{r}(\varphi_0) = B_1\Psi(\varphi_0)$  определяется из (3) при  $\tau = 0$ .

Заменив в (9)  $\Delta\varphi$  на  $\Delta\varphi = \Delta\tilde{r}/B_1\Psi'(\varphi)$  и проинтегрировав по  $\tau$ , получим

$$\Delta n = f_n(\tilde{r})\Delta\tilde{r} = \frac{B_1^2 B_2 \sin^2 \varphi_0(\tilde{r})}{\tilde{r}^3 \Psi'(\varphi_0(\tilde{r}))} \int_0^\tau \tilde{R}^2(\tau)(1 - W(\tau)) d\tau \Delta\tilde{r}. \quad (11)$$

Вычислив  $\Psi' = (8 - 2,5\Psi^2 \cos \varphi)/\Psi \sin \varphi$  и  $\int_0^\tau \tilde{R}^2(1 - W) d\tau = (1 - \exp(-3H\tau))/A$ , найдем распределение количества капелек, сорванных к моменту времени  $\tau$ :

$$\Delta n(\tilde{r}, \tau) = f_n(\tilde{r}, \tau)\Delta\tilde{r} = \frac{1 - \exp(-3H\tau)}{A\tilde{r}^2} \frac{B_1^3 B_2 \sin^3 \varphi_0(\tilde{r})}{(8B_1^2 - 2,5\tilde{r}^2 \cos \varphi_0(\tilde{r}))} \Delta\tilde{r}. \quad (12)$$

Формула (12) применима в базовом диапазоне  $\tilde{r}_{л0} \leq \tilde{r} \leq \tilde{r}_{пр0}$ ; при  $h = 1$  он является полным диапазоном изменения размеров сорванных частичек. Значение модального радиуса  $\tilde{r}_{\text{mod}} \approx 2B_1$ , соответствующего  $\max(\Delta n)$ , при  $GN > 3,0$  близко к  $\tilde{r}_{л0} \approx 1,8B_1$ . Общее количество сорванных капелек  $N \equiv \sum_{\Delta r} \Delta n$  выражается [10] таким образом:

$$N = 0,047 \frac{B_2}{A} (1 - \exp(-A\tau_{\text{дис}}))(1,45 - 0,76\varphi_{л0} + 0,25 \sin(3,05\varphi_{л0})). \quad (13)$$

Формулы (12), (13) работают в интервале значений  $0,85 \lesssim h \lesssim 1,15$ , вне которого на границах базового диапазона сказывается отличие наклона кривых  $\tilde{r} = \text{const}$  от вертикального.

**6. Функция распределения в общем случае.** Вычисление интеграла (10) представляет трудности и может быть выполнено приближенно. Аппроксимируем кривые  $\tilde{r}(\varphi, \tau) = \tilde{r}_c$  прямыми  $\tau - \tau_* = (\varphi - \varphi_*)/a_{\text{эф}}$  с некоторым эффективным значением наклона  $a_{\text{эф}}$  и подставим эту зависимость, а также (8) в (10). Используя табличный интеграл, после преобразований получим [11]:

$$\Delta n(\tilde{r}) = f_n(\tilde{r})\Delta\tilde{r} = \frac{B_1^3 B_2}{(h-1)\tilde{r}^4} \frac{a_{\text{эф}}(\tilde{r})}{H^2} \sum_{i=1}^4 A_i [\Phi_{i*}(\tilde{r}) - \Phi_i^*(\tilde{r})] \Delta\tilde{r}, \quad (14)$$

где  $\Phi_i(\tilde{r}) = C^i(\tilde{r})(\sin^2 \varphi(\tilde{r}) + \sin^2(\varphi(\tilde{r}) + \theta_i(\tilde{r})))$ ,  $C(\tilde{r}) = (h-1)/(h - (\tilde{r}/B_1\Psi(\varphi))^2)$ ,  $\theta_i = \pi - \arcsin((\nu_i H/a_{\text{эф}})^2 + 1)^{-0,5}$  при  $h < 1$  и  $\theta_i = \arcsin((\nu_i H/a_{\text{эф}})^2 + 1)^{-0,5}$  при  $h > 1$ ,  $A_i = 0,25C_4^i h^{i-1} (1-h)^{4-i}$ ,  $\nu_i = 0,5i$ . Анализ поведения кривых  $\tilde{r} = \tilde{r}_c(\varphi, \tau)$  позволил найти выражение для  $a_{\text{эф}}$ , пригодное в широком диапазоне значений  $h$ . Так как количество срывааемых капелек убывает со временем (см. (2)), эффективный наклон учитывает большее влияние начальных значений и меньшее — средних  $a_{\text{ср}} = (\varphi^* - \varphi_*)/(\tau^* - \tau_*)$ . Кроме того, необходимо поставить естественное условие получить при  $h \rightarrow 1$  точное выражение (12),

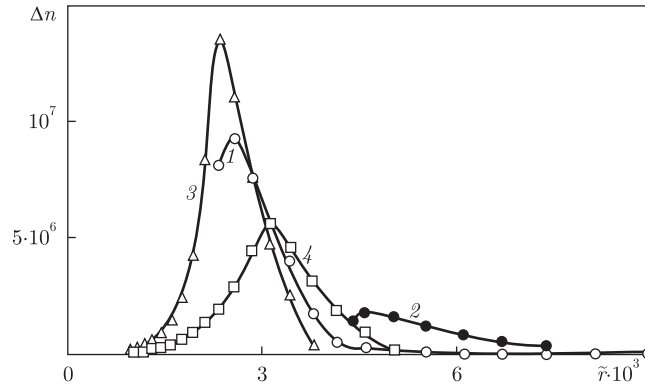


Рис. 3. Распределение  $\Delta n(\tilde{r}; h)$  при различных  $Re_\infty$ : 1 —  $h = 0,70$ ,  $Re_\infty = 1,97 \cdot 10^6$ ,  $B_1 = 1,32 \cdot 10^{-3}$ ,  $R_0 = 5 \cdot 10^{-4} m$ ; 2 —  $h = 1,00$ ,  $Re_\infty = 1,58 \cdot 10^5$ ,  $B_1 = 2,41 \cdot 10^{-3}$ ,  $R_0 = 1 \cdot 10^{-4} m$ ; 3 —  $h = 2,00$ ,  $Re_\infty = 1,12 \cdot 10^5$ ,  $B_1 = 1,26 \cdot 10^{-3}$ ,  $R_0 = 1 \cdot 10^{-4} m$ ; 4 —  $h = 4,03$ ,  $Re_\infty = 3,06 \cdot 10^4$ ,  $B_1 = 1,68 \cdot 10^{-3}$ ,  $R_0 = 1 \cdot 10^{-4} m$

найденное для случая  $h = 1$ . Выполнив эти требования, получим следующие выражения для  $a_{эф}$  в областях А, Б:

$$a_{эф.А} = \frac{(h - 1 + h^{-2} + k(h)|h - 1|^{0,5}h^{-1})a_{ср}a_*}{(h - 1)a_* + h^{-2}a_{ср} + (a_{ср} + a_*)|h - 1|^{0,5}h^{-1}}, \quad (15)$$

$$a_{эф.Б} = \frac{(k_1h + k_2h^{-3})a_{ср}a_*}{ha_* + h^{-3}a_{ср}},$$

где  $k(h) = 0,93(2h - 1)h^{-1}$ ,  $k_1 = 1,13$ ,  $k_2 = 0,87$  для  $h > 1$  и  $k(h) = 1,33h^{-0,5}$ ,  $k_1 = 0,80$ ,  $k_2 = 1,13$  для  $h < 1$ . Распределения  $\Delta n(\tilde{r})$ , вычисленные по формулам (12), (14), (15) для различных  $h$ ,  $Re_\infty$ , приведены на рис. 3.

**7. Особенности распределения капелек по размерам.** Большая часть сорванных капелек образуется в базовом диапазоне  $\tilde{r}_{0л} \leq \tilde{r} \leq \tilde{r}_{0пр}$ , где скорость их производства  $\dot{n}'$  наибольшая. При  $h > 1$ , подобно распределению Нукиямы–Танасавы для распыла в форсунках, функция  $\Delta n(\tilde{r})$  имеет восходящую и нисходящую ветви, образующие характерный максимум вблизи левой границы базового диапазона. Он вызван тем, что слева от линии  $\tilde{r}(\varphi, \tau) = \tilde{r}_{mod}$  малой является скорость производства капелек  $\dot{n}'$ , а справа — промежуток времени существования условий на поверхности капли для их производства (рис. 2). Общий вид  $\Delta n(\tilde{r})$  зависит от значения  $h$  (рис. 3), а размеры всей совокупности капелек определены значением параметра  $B_1 \sim \alpha^{1/3} \mu^{-2/3} Re_\infty^{-1/2}$ , играющего в соответствии с (3) роль характерного масштаба размеров капелек. Аналогично,  $B_2 \sim \alpha^{-7/6} \mu^{7/3} Re_\infty^{3/2}$  задает характерный масштаб количества сорванных капелек.

Диспергирование начинается в базовом диапазоне, который соответствует области А. В области Б формируется дополнительный диапазон: при  $h < 1$  он примыкает к базовому справа,  $\tilde{r}_{0пр} < \tilde{r}$ , и образует грубодисперсную часть распыла, а при  $h > 1$  — слева,  $0 < \tilde{r} < \tilde{r}_{0л}$ , и образует его мелкодисперсную часть. При увеличении  $h$  доля мелкодисперсной части возрастает, и при  $h \simeq 2$  она становится сравнимой с грубодисперсной частью (см. рис. 3).

Формулы (14), (15) позволяют получить не только окончательное распределение всех сорванных к моменту прекращения диспергирования  $\tau_{дис}$  капелек, но и сформированное к произвольному моменту времени  $\tau_c < \tau_{дис}$ . Для этого достаточно определить значения

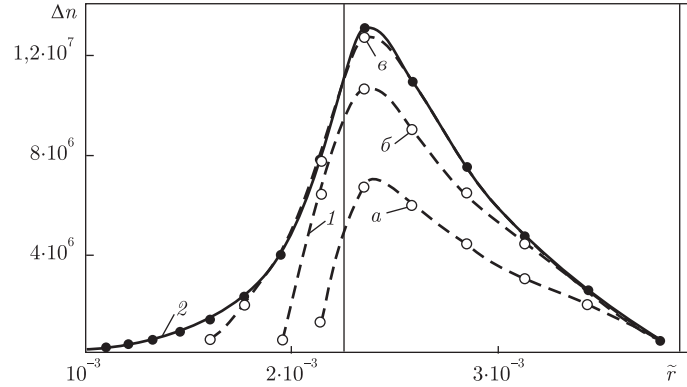


Рис. 4. Распределение количества сорванных капелек  $\Delta n(\tilde{r}, \tau)$  по формулам (14), (15) для моментов времени  $\tau = 1,0; 2,0; 3,5$  (1, а, б, в) и окончательное распределение для  $\tau = \tau_{\text{дис}} = 5,48$  (2); вертикальные линии — границы базового диапазона  $\tilde{r}_{\text{пл}} = 2,26 \cdot 10^{-3}$ ,  $\tilde{r}_{\text{пр}} = 3,87 \cdot 10^{-3}$ ;  $h = 2,00$

$\varphi^*(\tilde{r}, \tau_c)$ ,  $a_{\text{эф}}(\tilde{r}, \tau_c)$ ,  $\theta_i(\tilde{r}, \tau_c)$ ,  $C(\tilde{r}, \tau_c)$  для  $\forall \tilde{r}$ , что осуществляется по той же схеме. Динамика изменения распределения количества сорванных капелек при разрушении капли радиусом  $R_0 = 2 \cdot 10^{-4}$  м в потоке  $V_\infty = 1400$  м/с,  $\rho_\infty = 4,0$  кг/м<sup>3</sup> при  $h = 2,0$ ,  $\text{Re}_\infty = 1,12 \cdot 10^5$ ,  $\text{GN} = 64,2$  иллюстрируется зависимостями  $\Delta n(\tilde{r}; \tau_c)$  для различных моментов времени, приведенными на рис. 4. В отличие от случая  $h = 1$ , когда изменение функции распределения во времени автомодельно, при  $h > 1$  грубодисперсная фракция быстро формируется в начале процесса, а мелкодисперсная фракция набирается на заключительной стадии дробления, когда размер родительской капли и толщина погранслоя  $\delta_{\text{ж}}$  становятся малыми. При  $h < 1$  формирование распределения происходит в обратном порядке, начиная с мелкой фракции.

**8. Функция распределения в общем случае движения капли.** Функция распределения (14) получена на основе эмпирического закона движения капли. С целью исключить произвольное влияние формы этого закона, процедура получения  $f_n(\tilde{r})$  была проделана подобным образом, но теперь она была основана на одновременном интегрировании системы (6), (9) и уравнения движения капли, что для натуральных  $\eta = 3h/(h - 1)$  привело к соотношениям [12]:

$$f_n(\tilde{r}) = -\frac{3hB_1^3 B_2}{A(h-1)\tilde{r}^4} \left[ \frac{1}{b(\eta+1)} P_{\eta+1}(x) + F_\eta(x) \right]_{\varphi_*}^{\varphi^*}, \quad \tilde{R}(\tau) = D^h, \quad W(\tau) = 1 - D, \quad (16)$$

где

$$F_\eta(x) \equiv \frac{\sin 2x}{2} \sum_{k=0}^{E(\eta/2)} (-1)^k \frac{P_\eta^{(2k)}(x)}{2^{2k}} + \frac{\cos 2x}{2} \sum_{k=1}^{E((\eta+1)/2)} (-1)^{k-1} \frac{P_\eta^{(2k-1)}(x)}{2^{2k-1}};$$

$$P_\eta = (a - bx)^\eta;$$

$P_\eta^{(k)}$  —  $k$ -я производная;  $a = 1 - b(\tau_* a_{\text{эф}} - \varphi_*)$ ;  $b = C(h-1)/a_{\text{эф}}$ ;  $D = (1 - (h-1)C\tau)^{1/(h-1)}$ ;  $C = 3/4\sqrt{\alpha}C_d$ ,  $C_d$  — коэффициент сопротивления. Натуральным  $\eta > 3$  отвечает ряд дискретных значений  $h$ :  $1 < h \leq 4$ ; целочисленным  $\eta < 0$  — значения  $h$  из интервала  $0,25 \leq h < 1$  режимов неполного дробления; в этом случае  $f_n(\tilde{r})$  выражается через интегральные синус и косинус. Указанная совокупность значений  $\eta$  покрывает достаточно плотно весь практически важный диапазон значений  $h$ . Случай  $h = 1$  вновь приводит к зависимостям  $\tilde{R}(\tau)$ ,  $f_n(\tilde{r})$ ,  $W(\tau)$ , полученным в п. 5.



Сравнение расчетов, выполненных по формулам (14) и (16), показало [12], что два способа определения закона движения капли, основанные на эмпирическом и теоретическом методах, в результате дают близкие функции распределения. Отсутствие базы экспериментальных данных о зависимости  $x_k(t)$  позволяет отдать предпочтение формулам (16), которые могут быть использованы для всего многообразия сочетаний физико-механических свойств систем газ–капли.

Таким образом, в рамках теории диспергирования, основанной на действии механизма градиентной неустойчивости, получены общие дифференциальные уравнения кинетики дробления капли в скоростных потоках и аналитически найдены основные закономерности этого явления. Полученные соотношения дают возможность провести полный анализ влияния свойств системы газ — капли на кинетические параметры дробления и получить количественную информацию, необходимую при решении практических задач. На основе найденных закономерностей построена математическая модель испарительной баллистики аэрозольной массы сорванных капелек и описаны количественно последующие процессы их ускорения, испарения и формирования паровоздушной смеси в следе дробящейся капли [13].

1. Гельфанд Б. Е. Современное состояние и задачи исследований детонации в системе капли жидкости–газ // Химическая физика процессов горения и взрыва. Детонация. – Черногоровка: ИХФ АН СССР, 1977. – С. 28–39.
2. Arai M. Physics behind diesel sprays // Book of abstracts of the 12<sup>th</sup> ICLASS – 2012. – Heidelberg, Germany, Sept. 2–6. – P. 129.
3. Гурин А. Г. Абляция метеороида диспергированием пленки расплава // Астроном. вестник. – 1992. – **26**, № 5. – С. 85–93.
4. Reinecke W. G., Waldman G. D. Shock layer shattering of cloud drops in reentry flight // AIAA Paper. – 1975. – No 152. – P. 22.
5. Herrmann M. On using detailed simulations to study primary atomization // Book of abstracts of the 12<sup>th</sup> ICLASS – 2012. – Heidelberg, Germany, Sept. 2–6. – P. 67.
6. Асланов С. К., Гурин А. Г. Об основных факторах гидродинамической неустойчивости при моделировании процесса диспергирования в двухфазной детонации // Докл. АН УССР. Сер. А. – 1981. – № 12. – С. 25–28.
7. Гурин А. Г. Гидродинамическая неустойчивость и режимы дробления капель // Инж.-физ. журн. – 1985. – **48**, № 5. – С. 771–776.
8. Асланов С. К., Гурин А. Г. К определению скорости детонации в аэрозолях // Докл. АН СССР. – 1985. – **282**, № 1. – С. 72–75.
9. Ranger A. A. Shock wave propagation through a two-phase medium // Astron. Acta. – 1972. – **17**, No 4–5. – P. 675–683.
10. Гурин А. Г. Уравнения кинетики дробления капли в скоростном потоке газа // Инж.-физ. журн. – 2011. – **84**, № 2. – С. 248–254.
11. Гурин А. Г. Распределение диспергированных капелек при дроблении капли в скоростном потоке газа // Там же. – 2011. – **84**, № 4. – С. 805–812.
12. Гурин А. Г. О закономерностях дробления капли в скоростном потоке газа // Там же. – 2011. – **84**, № 5. – С. 938–943.
13. Girin A. G. Wake of shattering fuel drop // Combustion science and technology. – 2012. – **184**, No 10–11. – P. 1412–1426.

**О. Г. Гірін**

### **Теорія дроблення краплі за механізмом градієнтної нестійкості**

*Отримано повний аналітичний розв'язок задачі про дроблення краплі у швидкісному потоці газу. На основі механізму градієнтної нестійкості течії в прилеглому шарі на поверхні краплі виведені загальні диференціальні рівняння кінетики дроблення. Їх інтегрування у наближенні сферичності краплі дозволило знайти закон зміни її маси, умови та час її повного руйнування. Із застосуванням емпіричного закону руху краплі знайдено нестационарну функцію розподілу кількості диспергованих крапельок за розмірами. Розраховано проміжні та остаточні розподіли і описано загальні особливості диспергування. Для випадку, коли емпіричний закон руху краплі невідомий, отримано спільний розв'язок системи диференціальних рівнянь кінетики дроблення і руху краплі та знайдено функцію розподілу крапельок за розмірами.*

**A. G. Girin**

### **Theory of drop shattering by the gradient instability mechanism**

*The entire analytical solution of the problem of drop shattering in a high-speed gas flow is obtained. The general differential equations of shattering kinetics are derived on a base of the mechanism of gradient instability action in conjugated boundary layers on the drop surface. Their integration in the spherical drop approximation allowed us to find the law of drop mass diminishing and the conditions and the time for the full drop breakup. The transient distribution function for stripped droplets by sizes are obtained with the use of an empirical law of drop motion. Intermediate and final distributions of stripped droplets by sizes are calculated, and some general peculiarities of the dispersion kinetics are described. When the empirical law of drop motion is unknown, the mutual solution of the system of differential equations of shattering kinetics and drop motion is obtained, and the transient distribution function for stripped droplets by sizes is found.*