

Член-корреспондент НАН Украины Ю. Г. Стоян, А. Н. Панкратов,
Т. Е. Романова, П. И. Стецюк

Методы решения задач кластеризации $2D$ -объектов в круге минимального радиуса

Рассматривается задача оптимальной кластеризации произвольных неориентированных $2D$ -объектов, ограниченных дугами окружностей и отрезками прямых, с учетом минимально допустимых расстояний в круговом контейнере. Строится математическая модель на основе метода ϕ -функций. Предлагаются методы решения с использованием эффективного алгоритма построения стартовых точек и r -алгоритма Шора. Приводятся результаты вычислительных экспериментов.

Задачи размещения относятся к классу NP -трудных задач оптимизации. Для решения обозначенного класса задач в основном предлагаются эвристические подходы, которые базируются на построении No-Fit полигонов, сумм Минковского, или D -функций [1, 2]. Лишь в нескольких публикациях (например, [3]) рассматриваются вопросы моделирования отношений объектов с учетом их непрерывного вращения.

Задача кластеризации $2D$ -объектов. Разместить ограниченные ϕ -объекты A и B в круге Ω минимального радиуса \hat{r} с учетом минимально допустимых расстояний: ρ' — между объектами A и B ; ρ — между каждым из объектов и $fr\Omega$.

ϕ -объекты A и B (рис. 1, а), граница которых формируется дугами окружностей и отрезками прямых, всегда могут быть представлены в виде объединения базовых объектов из семейства $\mathfrak{R} = \{K, D, H, V\}$ (рис. 1, б), т. е. $A = \bigcup_{i=1}^{n_A} A_i$, $B = \bigcup_{j=1}^{n_B} B_j$, $A_i, B_j \in \mathfrak{R}$.

Доказательство этого факта, подробное описание базовых объектов и алгоритм декомпозиции произвольных ϕ -объектов на базовые приведены в [5].

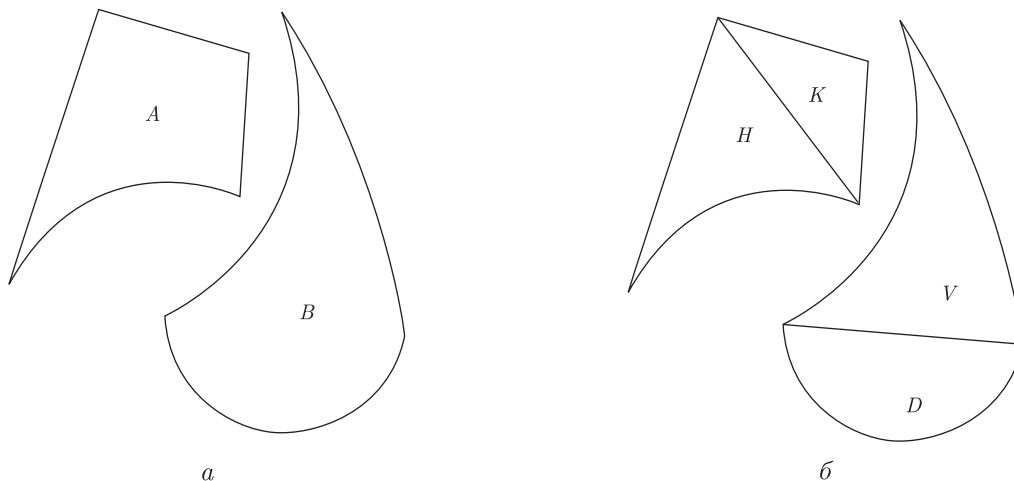


Рис. 1. Объекты A и B (а), декомпозиция объектов A и B на базовые (б)

Пусть $u = (r, x_A, y_A, \theta_A, x_B, y_B, \theta_B) \in R^7$ — вектор переменных, где $r = \hat{r} - \rho > 0$; θ и (x, y) — угол поворота и вектор трансляции объекта; R^7 — арифметическое евклидово пространство.

Математическая модель задачи кластеризации [4] имеет вид

$$\min_{u \in W} F(u), \quad (1)$$

где $F(u) = \hat{r}$, $\hat{r} = r + \rho$, $W = \{u \in R^7: \widehat{\Phi}^{AB} \geq 0, \Phi^{\Omega^*A} \geq 0, \Phi^{\Omega^*B} \geq 0, r \geq 0\}$, $\widehat{\Phi}^{AB}$ — псевдонормализованная phi-функция для A и B [4, 5]; Φ^{Ω^*A} , Φ^{Ω^*B} — phi-функции для $\Omega^* = R^2 \setminus \text{int } \Omega$ и объектов A и B соответственно; $\text{int } \Omega$ — внутренность Ω . При этом

$$\begin{aligned} \Phi^{\Omega^*A} &= \min\{\Phi^{\Omega^*A_i}, i = 1, \dots, n_A\}, & \Phi^{\Omega^*B} &= \min\{\Phi^{\Omega^*B_j}, j = 1, \dots, n_B\}, \\ \widehat{\Phi}^{AB} &= \widehat{\Phi}^{\widehat{A}B} = \min\{\widehat{\Phi}_{ij}^{\widehat{A}B}, i = 1, \dots, n_{\widehat{A}}, j = 1, \dots, n_B\}, \end{aligned}$$

где $\widehat{A} = A \oplus C(\rho')$; $C(\rho')$ — круг радиусом ρ' ; \oplus — символ суммы Минковского; $\widehat{\Phi}_{ij}^{\widehat{A}B}$ — phi-функция $A_i, B_j \in \mathfrak{R}$. Таким образом, для построения W в задаче (1) используется полный класс базовых phi-функций, определенных для всех пар базовых объектов [5]. В общем случае каждая из базовых phi-функций является композицией минимумов и максимумов гладких функций [4, 5], поэтому задача (1) является задачей негладкой оптимизации.

Поскольку [4]

$$W = W_1 \cup \dots \cup W_k \cup \dots \cup W_\eta, \quad (2)$$

то задача (1) может быть сведена к задаче

$$F(u^*) = \min\{F(u^{k*}), k = 1, 2, \dots, \eta\}, \quad (3)$$

$$F(u^{k*}) = \min_{u \in W_k \subset R^7} F(u). \quad (4)$$

Оценим число η . Пусть $\Lambda'(u) = \widehat{\Phi}^{\widehat{A}B}$, $\Lambda''(u) = \min\{\Phi^{\Omega^*A}, \Phi^{\Omega^*B}\}$, $\Lambda(u) = \min\{\Lambda'(u), \Lambda''(u)\}$, тогда $W = \{u \in R^7: \Lambda(u) \geq 0\}$. Сопоставим неравенству $\Lambda(u) \geq 0$ дерево решений \mathfrak{N} , концевым вершинам v_k , $k = 1, 2, \dots, \eta$, которого соответствуют системы неравенств $\{g_{kl}(u) \geq 0, l \in L\}$, описывающие W_k в (4), где $g_{kl}(u)$ — гладкие функции. Мощность индексного множества L зависит от вида phi-функций, формирующих функции $\Lambda'(u)$, $\Lambda''(u)$.

Пусть η' , η'' — число концевых вершин деревьев для $\Lambda'(u) \geq 0$, $\Lambda''(u) \geq 0$, $\eta' = \eta'_1 \cdots \eta'_{n'}$, $\eta'' = \eta''_1 \cdots \eta''_{n''}$, $n' = n_{\widehat{A}} n_B$, $n'' = n_A + n_B$, тогда $\eta = \eta' \eta''$.

Верхние оценки для η' , η'' определяются так:

$$\eta'^* = (\max\{\eta'_k, k = 1, 2, \dots, n'\})^{n'}, \quad \eta''^* = (\max\{\eta''_k, k = 1, 2, \dots, n''\})^{n''}. \quad (5)$$

Поскольку полный класс базовых phi-функций состоит из phi-функций $\{\Phi_t, t = 1, 2, \dots, \dots, 10\}$, формирующих условия непересечения базовых объектов, и phi-функций $\{\Phi_p, p = 1, 2, \dots, 4\}$, описывающих условие принадлежности базовых объектов контейнеру Ω , то оценки (5) примут вид

$$\eta'^* = (\max\{\eta'_t, t = 1, 2, \dots, 10\})^{n'}, \quad \eta''^* = (\max\{\eta''_p, p = 1, 2, \dots, 4\})^{n''}. \quad (6)$$

Согласно формулам базовых ρ -функций [5] и с учетом (6) определим верхнюю оценку числа концевых вершин дерева решений \aleph :

$$\eta^* = 3^{n''} \sigma, \quad (7)$$

где $\sigma = (\max\{385, 2(2m_A^2 + 6m_A + 7), (m_A + m_B)\})^{n'}$ ($m_A \geq m_B$ — число сторон выпуклых многоугольников K_A и K_B).

Для решения задачи (1) предлагается применить следующие методы.

Метод 1. Последовательно генерируются системы неравенств с гладкими функциями, используя дерево \aleph , построенное следующим образом: 0-й уровень соответствует пространству R^7 , на s -уровне добавляется одна из систем неравенств с гладкими функциями, выделенной из неравенства $\Phi_s \geq 0$, $\Phi_s \in \{\Phi_{ij}^{AB}, \Phi_i^{\Omega^*A}, \Phi_j^{\Omega^*B}\}$, $s = 1, \dots, n' + n'' = n$. Число вершин s -уровня дерева \aleph равно $\tau_s = \eta_1 \cdot \eta_2 \cdot \dots \cdot \eta_s$, где η_s — число концевых вершин ρ -дерева $\Phi_s \geq 0$. Заметим, что $\tau_n = \eta$, где η — число концевых вершин дерева \aleph задачи (3), (4).

Метод 1 реализует ускоренный перебор систем неравенств, соответствующих вершинам v_{sl} дерева \aleph , $l = 1, \dots, \tau_k$, $s = 1, \dots, n$. Для отсека неперспективных вершин дерева \aleph используется набор правил, основанных на учете верхней оценки значения функции цели, симметрии W и несовместности систем при решении задач нелинейной оптимизации $\min F(u)$ s.t. $u \in V_{sl}$, $V_{sl} = \{u \in R^7: g_{sl} \geq 0, r \geq 0\}$, где $g_{sl} \geq 0$ — система неравенств, соответствующая вершине v_{sl} дерева \aleph . Метод 1 реализуем только для “простых” объектов, так как, согласно формуле (7), число концевых вершин дерева решений стремительно растет с увеличением числа базовых объектов, формирующих A и B .

Метод 2. Формируется N стартовых точек из области W , полученных эвристическим методом (например, [5]). Подставляя каждую стартовую точку в систему ρ -неравенств, описывающих W , выделяется N задач вида (4). Находится локальный минимум для каждой из N задач вида (4). Лучший из N локальных минимумов выбирается как приближенное решение задачи (1). Известная модификация метода 2, изложенная, например, в [4], использует каждый полученный локальный минимум задачи вида (4) в качестве стартовой точки для выделения новой подобласти W_k из (2) и дальнейшей оптимизации до тех пор, пока не будет найден локальный минимум задачи (1).

Метод 3. Строится стартовая точка $u^0 \in W$ с использованием быстрого и эффективного эвристического алгоритма, основанного на поиске решений для дискретных значений параметров размещения объектов A и B . Формируется система неравенств с гладкими функциями, выделенная из $\Lambda(u^0) \geq 0$ и описывающая некоторую область $W^0 \subset W$. Производится процесс поиска локального минимума на W^0 с использованием u^0 в качестве стартовой точки. Для получения локального минимума задачи (1) применяется модификация метода 2.

Метод 4. С помощью негладких штрафов задача (1) сводится к задаче минимизации почти-дифференцируемой негладкой функции вида

$$f(u) = r + P_1 \max\{0, -\Phi^{AB}\} + P_2 \max\{0, -\Phi^{\Omega^*A}\} + P_3 \max\{0, -\Phi^{\Omega^*B}\}, \quad (8)$$

где P_1 , P_2 и P_3 — штрафные коэффициенты. Суть метода состоит в поиске локальных минимумов функции $f(u)$ для заданного набора стартовых точек. Для решения задачи $\min f(u)$ можно использовать алгоритмы минимизации негладких непрерывных функций, в частности, эффективные варианты $r(\alpha)$ -алгоритма Шора для почти-дифференцируемых функций [8]. Наилучший из локальных минимумов функции (8), для которого штрафная

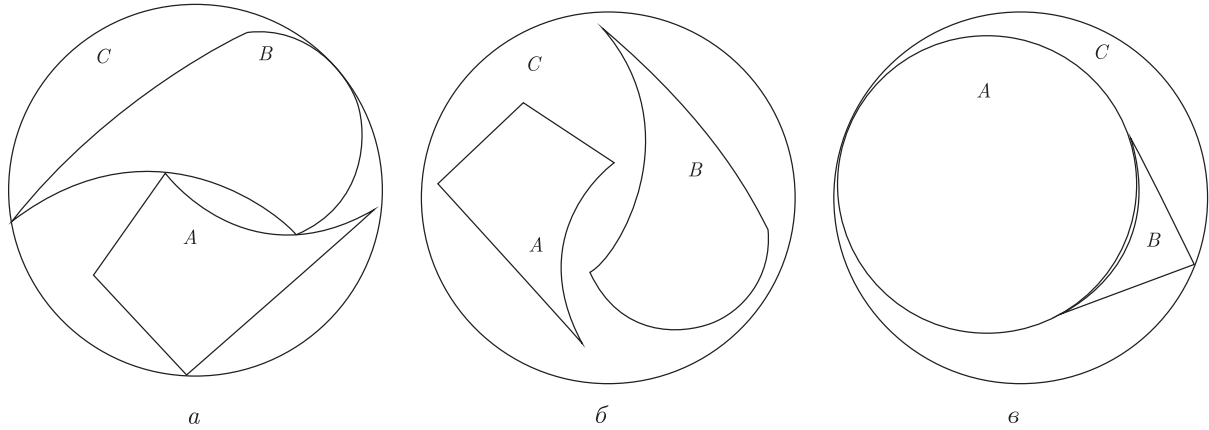


Рис. 2. Кластеризация объектов A и B : a — для примера 1 при $\rho' = 0$, $\rho = 0$; $б$ — для примера 1 при $\rho' = 0,6$, $\rho = 0,3$; $в$ — для примера 2

часть в функции $f(u)$ равна нулю, принимается за решение задачи (1). Формально, метод 4 не требует, чтобы стартовые точки удовлетворяли каким-либо условиям, однако, если $u^0 \in W$, то штрафная часть функции равна нулю уже в точке u^0 .

Для поиска локальных минимумов подзадач (4) в методах 1, 2, 3 применяется программа IPOPT [7]. Для решения задачи минимизации негладкой функции $f(u)$ вида (8) используется r -алгоритм Шора, где предусматривается два способа регулировки шага. Для первого — шаг выбирается из условия минимума функции по направлению [8], для второго — величина шага адаптивно настраивается с помощью ряда параметров [9].

Результаты численных экспериментов рассмотрим на двух тестовых примерах.

Полагаем, что граница объекта задана последовательностью элементов границы l_i , $i \in I_n$ (в порядке обхода против часовой стрелки) кортежем информации $(x_1, y_1, r_1, x_2, y_2, r_2, \dots, \dots, x_n, y_n, r_n)$. При этом x_i, y_i — координаты начала элемента l_i , x_{i+1}, y_{i+1} — координаты его конца. Элемент l_i является отрезком, если $r_i = 0$, “выпуклой” дугой, если $r_i > 0$, и “вогнутой” дугой, если $r_i < 0$ (полагаем, что $(x_{i+1}, y_{i+1}) = (x_1, y_1)$ для $i = n$).

Пример 1. Геометрическая информация об объектах A и B задана следующими кортежами геометрической информации:

$$l_A = (-1,605, -2,125, -2,693, 1,892, -0,804, 0, 2,039, 1,369, 0, -1,605, -2,125, 0);$$

$$l_B = (2,022, -1,281, 1,843, 0,708, 2,133, 12,743, 62,022, -1,281, -3,632).$$

Решение получено методом 3 с использованием программы IPOPT для локальной оптимизации на компьютере с процессором AMD Athlon DualCore 5200:

при $\rho' = 0$, $\rho = 0$ локальный минимум получен за 0,14 с в точке

$$u^* = (3,25985, 0,66871, -1,35562, -2,60781, -0,1071, 0,71267, -6,16301) \quad (\text{рис. 2, } a);$$

при $\rho' = 0,6$, $\rho = 0,3$ локальный минимум получен за 0,485 с в точке

$$u^* = (3,74242, -1,51921, 0,55596, -1,05402, 1,14489, 0,34474, -4,60201) \quad (\text{рис. 2, } б).$$

Пример 2. Метод 4 апробирован на тестовом примере при $\rho' = 0$, $\rho = 0$ с известным решением $r^* = 6,497$ задачи (1) для ρ -объектов A и B , заданных следующими кортежами геометрической информации: $l_A = (0, 0, 5, 3)$ и $l_B = (3,555235, 3,428285, 0, -0,15657, 7,540972, 0, -3,868375, 3,428285, -5)$.

Минимизируемая негладкая функция $f(u)$ зависит от вектора переменных $u = (r, x_A, y_A, x_B, y_B, \theta_B) \in R^6$ (поскольку A — круг). Почти-градиент функции $f(u)$ вычислялся по конечным разностям.

$N = 20$ стартовых точек выбирались следующими: $u_0^i = (i, \dots, i) \in R^6$, $i = 0, 1, \dots, 19$. Старт из точки u_0^{15} привел к глобальному минимуму задачи (1) в точке $u^* = (6,497, -0,502928, 1,196538, -0,509748, 0,808694, -3,539492)$. На рис. 2, в приведено оптимальное размещение объектов A и B , соответствующее точке u^* .

Методы 1, 2 и 4 можно распараллелить для многопроцессорных ЭВМ. Так, например, методы 2 и 4 легко распараллелить на N процессорах, если на каждом из процессоров решать отдельные локальные подзадачи вида (4) (нахождение локального экстремума из одной начальной точки).

Работа выполнена при поддержке Научно-технологического центра в Украине (проект № 5710).

1. *Bennell J. A., Oliveira J. F.* The geometry of nesting problems: A tutorial // *European J. Operational Research*. – 2008. – **184**. – P. 397–415.
2. *Burke E. K., Hellier R., Kendall G., Whitwell G.* Irregular packing using the line and arc no-fit polygon // *Operations Research*. – 2010. – **58**, No 4. – P. 948–970.
3. *Milenkovic V. J., Sacks E.* Two approximate Minkowski sum algorithms // *Internat. J. Comput. Geometry Appl.* – 2010. – **20**, No 4. – P. 485–509.
4. *Chernov N., Stoyan Y., Romanova T.* Mathematical model and efficient algorithms for object packing problem // *Comput. Geometry: Theory Appl.* – 2010. – **43**, No 5. – P. 535–553.
5. *Chernov N., Stoyan Y., Romanova T., Pankratov A.* Phi-functions for 2D Objects formed by line segments and circular arcs // *Adv. Operat. Res.* – 2012. – Article ID 346358. – 26 p.
6. *Pankratov A. V., Stoyan Yu. G.* Placement of non-convex polygons with rotations into a non-convex polygon // *Proc. of the Workshop on Cutting Stock Problems-Sapientia University of Miercurea-Ciuc.* – Romania, 2006. – P. 29–36.
7. *Wachter A., Biegler L. T.* On the implementation of a primal-dual interior point filter line search algorithm for large-scale nonlinear programming // *Math. Programming.* – 2006. – **106**. – P. 25–57.
8. *Шор Н. З.* О классе почти-дифференцируемых функций и одном методе минимизации функций этого класса // *Кибернетика.* – 1972. – **4**. – С. 65–70.
9. *Шор Н. З., Стецюк П. И.* Использование модификации r -алгоритма для нахождения глобального минимума полиномиальных функций // *Кибернетика и системный анализ.* – 1997. – **4**. – С. 28–49.

*Институт проблем машиностроения
им. А. Н. Подгорного НАН Украины, Харьков*

Поступило в редакцию 14.12.2012

Член-корреспондент НАН України **Ю. Г. Стоян, О. В. Панкратов,
Т. Є. Романова, П. І. Стецюк**

Методи розв'язання задач кластеризації 2D-об'єктів у крузі мінімального радіуса

Розглядається задача оптимальної кластеризації довільних неорієнтованих 2D-об'єктів, обмежених дугами кіл та відрізками прямих, з урахуванням мінімально допустимих відстаней у круговому контейнері. Будується математична модель на основі методу phi-функцій. Пропонуються методи розв'язання з використанням ефективного алгоритму побудови стартових точок та r-алгоритму Шора. Наводяться результати обчислювальних експериментів.

Corresponding Member of the NAS of Ukraine **Yu. G. Stoyan, A. N. Pankratov,**
T. E. Romanova, P. I. Stetsyuk

Solution methods of clustering 2D-objects into a circle of the minimal radius

The article considers the problem of the optimal clustering of arbitrary non-oriented 2D-objects, bounded by circular arcs and line segments, into a circular container with regard for minimal allowable distances. We provide a mathematical model of the problem based on the phi-function technique and offer a number of solution methods. The methods employ a fast algorithm of generating starting points and Shor's r -algorithm. Computational examples are given.