УДК 517.957

Е. В. Степанова, А. Е. Шишков

Сильная и ослабленная локализация решений квазилинейных параболических уравнений

(Представлено членом-корреспондентом НАН Украины В. Я. Гутлянским)

Изучена задача Коши–Дирихле для широкого класса квазилинейных параболических уравнений: $u_t - \triangle u + g(t)|u|^{q-1}u = 0$, $0 < q < 1$, где $g(t)$ — непрерывный положительный при $t > 0$ абсорбционный потенциал, который вырождается при $t = 0$: $g(0) = 0$. Найдены точные достаточные условия для сильной локализации решений (т. е. непрерывность распространения носителя вблизи $t = 0$). Эти условия сформулированы в виде подчиненности граничного режима абсорбционному потенциалу. Для произвольного граничного режима (без каких-либо условий подчиненности) установлена ослабленная локализация решений. Доказано, что при некоторых ограничениях на характер вырождения потенциалов эффект строгой локализации имеет место при произвольных граничных режимах (в том числе и не удовлетворяющих никаким условиям подчиненности).

1. Постановка задачи. Пусть $Q_T = (0,T) \times \Omega$, $0 < T < \infty$, $\Omega \subset \{x \in \mathbb{R}^n : |x| > 1\}$ — ограниченная область в $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 1$ с C^1-границей $\partial\Omega = \partial_0\Omega \bigcup \partial_1\Omega$, где

$$\partial_0\Omega = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| = 1\}, \qquad \partial_1\Omega \subset \{x \in \mathbb{R}^n : |x| > l\}, \qquad l = \text{const} > 1. \tag{1}$$

Основной целью этого сообщения является изучение поведения произвольного слабого (энергетического) решения следующей начально-граничной задачи:

$$u_t - \sum_{i=1}^{n} (a_i(t,x,u,\nabla_x u))_{x_i} + g(t,x)|u|^{q-1}u = 0 \qquad \text{в} \qquad Q_T, \qquad 0 < q < 1; \tag{2}$$

$$u(t,x) = f(t,x) \qquad \text{на} \qquad (0,T) \times \partial_0\Omega, \qquad u(t,x) = 0 \qquad \text{на} \qquad (0,T) \times \partial_1\Omega; \tag{3}$$

$$u(0,x) = 0 \qquad \forall\, x \in \Omega. \tag{4}$$

Здесь непрерывные по совокупности аргументов функции $a_i(t,x,s,\xi)$ $(i = 1,\ldots,n)$ при всех $(t,x,s,\xi) \in (0,T) \times \Omega \times \mathbb{R}^1 \times \mathbb{R}^n$ удовлетворяют следующим условиям:

$$|a_i(t,x,s,\xi)| \leqslant d_1|\xi|, \qquad d_1 = \text{const} < \infty, \tag{5}$$

также условию монотонности:

$$\sum_{i=1}^{n} (a_i(t,x,s,\xi) - a_i(t,x,s,\eta))(\xi_i - \eta_i) \geqslant d_0|\xi - \eta|^2, \qquad d_0 = \text{const} > 0, \tag{6}$$

а непрерывная неотрицательная функция $g(t,x)$ вырождается при $t = 0$, т. е.

$$g(t,x) > 0 \qquad \forall\,(t,x) \in (0,T] \times \overline{\Omega}; \qquad g(0,x) = 0 \qquad \forall\, x \in \overline{\Omega}. \tag{7}$$

Для произвольного множества $\Gamma \subset \partial\Omega$ через $H^1(\Omega,\Gamma) := W_2^1(\Omega,\Gamma)$ обозначаем, как обычно, замыкание в норме соболевского пространства $W_2^1(\Omega)$ множества функций из $C^\infty(\Omega)$, обращающихся в нуль в окрестности Γ, а через $\langle\cdot,\cdot\rangle$ — операцию спаривания элементов пространств $H^1(\Omega,\Gamma)$ и $(H^1(\Omega,\Gamma))^*$. Без ограничения общности будем полагать, что функция $f(t,x)$ из граничного условия (3) определена на всей цилиндрической области $(0,T)\times\Omega$, причем

$$f(t,\cdot) \in L_2(0,T;H^1(\Omega,\partial_1\Omega)) \bigcap H^1(0,T;L_2(\Omega)). \tag{8}$$

Определение 1. Следуя [1], энергетическим (слабым) решением задачи (1)–(4) называем функцию

$$u(t,\cdot) \in f(t,\cdot) + L_2(0,T;H^1(\Omega,\partial\Omega)) \tag{9}$$

такую, что

$$u_t(t,\cdot) \in L_2(0,T;(H^1(\Omega,\partial\Omega))^*), \tag{10}$$

справедливо интегральное тождество

$$\int\limits_{(0,T)} \langle u_t,\xi\rangle\,dt + \int\limits_{(0,T)\times\Omega} \sum_{i=1}^n a_i(t,x,u,\nabla_x u)\xi_{x_i}dxdt + \int\limits_{(0,T)\times\Omega} g(t,x)|u|^{q-1}u\xi dxdt = 0 \tag{11}$$

$\forall\,\xi \in L_2(0,T;H^1(\Omega,\partial\Omega))$ и выполняется начальное условие (4).

Существование энергетического (слабого) решения задачи (1)–(7) при естественных предположениях на режим $f(t)$ следует из результатов [1].

2. Исторические сведения и метод исследования задачи. Хорошо известно, что любое энергетическое решение задачи (1)–(4) в случае невырождения абсорбционного потенциала $g(t,x)$, т. е. при условии

$$g(t,x) \geqslant c_0 > 0 \qquad \forall\,(t,x) \in (0,T]\times\overline{\Omega}, \tag{12}$$

обладает свойством конечности скорости распространения носителя:

$$\zeta(t) := \sup\{|x|\colon x \in \operatorname{supp} u(t,\cdot)\} < 1 + c(t), \qquad \text{где} \qquad c(t) \longrightarrow 0 \quad \text{при} \quad t \longrightarrow 0. \tag{13}$$

Отсюда, в частности, следует локализованность носителя решения (см., например, [2, 3] и приведенную там библиогр.):

$$\zeta(t) := \sup\{|x|\colon x \in \operatorname{supp} u(t,\cdot)\} < c_1 = c_1(T_1) < l \qquad \forall\,t\colon 0 \leqslant t < T_1 = T_1(l) \leqslant T. \tag{14}$$

Эффект локализации носителей решений различных классов квазилинейных и полулинейных параболических уравнений изучался во многих работах (см., например, [2, 4], где можно найти дальнейшие ссылки). А. С. Калашников [5] был первым, кто изучил локализационные свойства решения первой начально-граничной задачи в случае одномерного полулинейного уравнения теплопроводности. А именно, он рассмотрел задачу (1)–(7) в области $(1,+\infty)\times[1,+\infty)$ при $n = 1$, $a_i(t,x,s,\xi) = \xi$, $\xi \in \mathbb{R}^1$, с вырождающимся абсорбционным потенциалом $g(t,x) = g_0(t) \in C^1([1,+\infty)) \bigcap L_\infty([1,+\infty))$, $g_0(0) = 0$, $g_0(t) > 0\ \forall\, t > 0$ и граничным режимом $u(t,1) = f(t) \in C^1([1,+\infty)) \bigcap L_\infty([1,+\infty))$. При выполнении следующего условия подчиненности граничного режима абсорбционному потенциалу:

$$g_0(t)^{-1} \cdot f(t) \to 0, \qquad \text{когда} \qquad t \to 0, \tag{15}$$

А. С. Калашников доказал, что решение обладает свойством ослабленной локализации для значений t, отделенных от нуля, а именно

$$\sup\{\zeta(t)\colon 0 < \delta \leqslant t < T\} < c_1 = c_1(\delta) < \infty \qquad \forall\, \delta > 0. \tag{16}$$

С другой стороны, следуя гипотезе Г. И. Баренблатта о возможности начального скачка свободной границы $\zeta(t)$ в нестационарных краевых задачах, А. С. Калашников доказал свойство

$$\inf\{\zeta(t)\colon 0 < t < t_*\} \geqslant c_2 = c_2(t_*) > 0 \tag{17}$$

для класса достаточно быстро убывающих при $t \to 0$ потенциалов $g_0(t)$. В частности, скачок (17) имеет место в случае следующего потенциала и граничного режима:

$$g_0(t) = t^{1/2} \exp\left(-\frac{1}{t^2}\right), \qquad f_0(t) = t \exp\left(-\frac{1}{t^2}\right). \tag{18}$$

Подчеркнем, что анализ А. С. Калашникова в его работе [5] касается только случая сильно вырождающихся граничных режимов $f(t)$ (см. условие (15)). Наш метод исследования позволяет изучать эволюцию носителей решений задачи (1)–(4) с произвольными граничными режимами $f(t,x)$ (как сильно или слабо, так и вообще невырождающимися при $t \to 0$) и вырождающимся при $t = 0$ потенциалом $g(t,x)$. Отметим также, что имеющиеся в [5] результаты получены барьерной техникой, которая в принципе не применима к уравнениям, не допускающим соответствующих теорем сравнения. Авторами этой работы предлагается новый, не опирающийся на барьерную технику, подход к изучению качественных свойств энергетических решений широкого класса квазилинейных параболических уравнений с вырождающимся абсорбционным потенциалом. Метод исследования основан на получении подходящих локальных интегральных априорных оценок решений в окрестности начальной плоскости $t = 0$ и связан с комбинацией идей и построений из метода локальных энергетических оценок (см. [3, 6]), априорных оценок типа принципа Сен-Венана (см. [7]). Подходящие версии этого метода при изучении различных других качественных свойств обобщенных решений квазилинейных и полулинейных параболических уравнений с вырождающимся абсорбционным потенциалом использовались ранее в [8–12].

3. Формулировка результатов. Введем функцию $F(t)$, которая будет моделировать граничный режим $f(t,x)$ из (3) и фигурировать во всех наших дальнейших формулировках:

$$F(t) := \sup_{0\leqslant s\leqslant t} \int\limits_{\Omega} f(s,x)^2 dx + \int\limits_0^t \int\limits_{\Omega} (|\nabla_x f|^2 + g(t,x)|f(t,x)|^{q+1})\, dxdt + \\ + \int\limits_0^t \int\limits_{\Omega} |f_t(t,x)|^2 dxdt. \tag{19}$$

Через $\zeta(t)$ будем, как и выше, обозначать определяемый в (14) радиус компактификации носителя рассматриваемого энергетического (слабого) решения задачи (1)–(4).

Замечание 1. В этой работе через D_1, c и c_i $(i = 1, 2, \ldots)$ мы обозначаем различные положительные постоянные, которые зависят лишь от известных параметров задачи (1)–(4) n, q, d_0, d_1, l.

Теорема 1 (о сильной локализации). *Пусть абсорбционный потенциал $g(t,x)$ из (2) обладает неотрицательной монотонной минорантой:*

$$g(t,x) \geqslant g_0(t) > 0 \qquad \forall\, t > 0, \qquad g_0(0) = 0. \tag{20}$$

Пусть функция $F(\cdot)$ из (19), моделирующая граничный режим, удовлетворяет следующему условию подчиненности миноранте g_0: для произвольного $t: 0 < t \leqslant T$ существует $S = S(t) > 0$ такая, что

$$F(t)^{\frac{(1-\psi)(1-q)}{2}} < S^2 \left(\int\limits_{\tau}^{t} g_0(t)^{1-\theta} dt \right)^2 + D_1 \int\limits_{0}^{\tau} g_0(t)^{2(1-\theta)} dt \qquad \forall\, \tau \in (0, t), \tag{21}$$

причем

$$tS(t) \longrightarrow 0 \qquad \text{при} \qquad t \longrightarrow 0, \tag{22}$$

где l из (1) и

$$0 < \theta := \frac{(q+1) + n(1-q)}{2(q+1) + n(1-q)} < 1, \qquad 0 < \psi := \frac{n(1-q)}{2(q+1) + n(1-q)} < \theta < 1. \tag{23}$$

Тогда рассматриваемое энергетическое решение $u(t,x)$ задачи (1)–(4) обладает свойством сильной локализации и справедлива следующая оценка сверху:

$$\zeta(t) \leqslant 1 + ctS(t) \qquad \forall\, t\colon 0 < t \leqslant T. \tag{24}$$

Приведем теперь несколько простых достаточных условий выполнения (21), (22).

Следствие 1. *Пусть абсорбционный потенциал g из (2) удовлетворяет условию (20), а функция $F(\cdot)$ из (19) удовлетворяет соотношению*

$$F(t)^{\frac{(1-\psi)(1-q)}{2}} < \frac{D_1}{2t} \left(\int\limits_{0}^{t} g_0(\tau)^{1-\theta} d\tau \right)^2 \qquad \forall\, t\colon 0 < t \leqslant T_1 = \frac{l-1}{cS(T_1)}, \tag{25}$$

где D_1, l, S и ψ из теоремы 1. Тогда имеет место сильная локализация и справедлива следующая оценка сверху:

$$\zeta(t) \leqslant 1 + c\sqrt{D_1 t} \qquad \forall\, t\colon t \leqslant T_1. \tag{26}$$

Следствие 2 (случай "умеренно" вырождающихся потенциалов). *Пусть миноранта g_0 из (20) обладает дополнительным свойством:*

$$\begin{gathered} g_0(t) \geqslant g_{0,\beta}(t) := \exp\left(-\frac{\omega_0}{t^\beta}\right) \qquad \forall\, t\colon 0 < t \leqslant T_1 = \frac{l-1}{cS(T_1)}, \\ \omega_0 = \mathrm{const} > 0, \qquad \beta \in (0,1), \end{gathered} \tag{27}$$

а функция $F(\cdot)$ из (19) *удовлетворяет соотношению*

$$F(t)^{\frac{(1-\psi)(1-q)}{2}} < \frac{D_2}{2t^{1+\beta}} \left(\int\limits_0^t g_{0,\beta}^{1-\theta}(\tau) d\tau \right)^2 \qquad \forall\, t\colon 0 < t \leqslant T_1, \tag{28}$$

где l, S, ψ, θ из теоремы 1 и $0 < D_2 = D_2(n, q, d_0, d_1, l, \beta, \omega_0) = \mathrm{const} < \infty$. Тогда имеет место сильная локализация и справедлива следующая оценка сверху:

$$\zeta(t) \leqslant 1 + c\sqrt{D_2 t^{1-\beta}} \qquad \forall\, t\colon t \leqslant T_1. \tag{29}$$

Следствие 3 (случай "сильно" вырождающихся потенциалов). *Пусть миноранта g_0 из* (20) *обладает дополнительным свойством:*

$$g_0(t) \geqslant g_{0,\beta}(t) := \exp\left(-\frac{\omega_0}{t^\beta}\right) \qquad \forall\, t\colon 0 < t \leqslant T_1 = \frac{l-1}{cS(T_1)},$$
$$\omega_0 = \mathrm{const} > 0, \qquad \beta \geqslant 1. \tag{30}$$

Функция $F(\cdot)$ из (19) *удовлетворяет неравенству*

$$F(t)^{\frac{(1-\psi)(1-q)}{2}} < \frac{\mu^2(t)}{t^2} \left(\int\limits_0^t g_{0,\beta}^{1-\theta}(\tau) d\tau \right)^2 \qquad \forall\, t\colon 0 < t \leqslant T_1, \tag{31}$$

где l, S, ψ, θ из теоремы 1 и $\mu(\tau) > 0\colon \mu(\tau) \to 0$ при $\tau \to 0$. Тогда имеет место сильная локализация и справедлива следующая оценка сверху:

$$\zeta(t) \leqslant 1 + c\mu(t) \qquad \forall\, t\colon t \leqslant T_1. \tag{32}$$

Теорема 2 (об ослабленной локализации при произвольном граничном режиме). *Пусть абсорбционный потенциал g удовлетворяет условию* (7)*. Тогда для произвольного энергетического решения $u(t,x)$ задачи* (1)–(4) *имеет место свойство ослабленной локализации, т. е. существует функция $\zeta_1(t) \in C(0,\infty)$ такая, что имеет место*

$$\zeta(t) \leqslant \min(\zeta_1(t), cL_1) \qquad \forall\, t > 0, \tag{33}$$

где $\zeta(\cdot)$ из (14) *$c = \mathrm{const} > 0$, $L_1 = \mathrm{const} = \operatorname{diam}\Omega$.*

Замечание 2. Функция $\zeta_1(t)$ может стремиться к бесконечности при $t \to 0$. Т. е. не исключается возможность бесконечного скачка, потому и речь в данной теореме идет лишь об ослабленной локализации.

Теорема 3 (о сильной локализации при произвольном граничном режиме). *Пусть функция $F(\cdot)$ из* (19)*, абсорбционный потенциал g из* (2) *имеет неотрицательную монотонную миноранту:*

$$g(t,x) \geqslant g_\omega(t) := \exp\left(-\frac{\omega(t)}{t}\right) \qquad \forall\, t > 0, \tag{34}$$

где $\omega(t)$ — неотрицательная неубывающая функция: $\omega(t) \to 0$ при $t \to 0$. Тогда произвольное энергетическое решение u задачи (1)–(4) *обладает свойством сильной локализации и справедлива следующая оценка сверху:*

$$\zeta(t) \leqslant 1 + \frac{t}{2} + C\left\{ t\ln(C_1 F(t)) + c_1 t \ln t^{-1} + c_2 \omega\left(\frac{t}{2}\right)\right\}^{1/2} \qquad \forall\, t < T. \tag{35}$$

Замечание 3. Подчеркнем, что в теоремах 2 и 3 нет никаких условий на граничный режим, т. е. на функцию $F(\cdot)$ из (19).

1. *Alt H. W., Luckhaus S.* Quasilinear elliptic-parabolic differential equations // Math. Z. – 1983. – **183**, No 3. – P. 311–341.
2. *Antontsev S. N., Diaz J. I., Shmarev S. I.* The support shrinking properties for solutions of quasilinear parabolic equations with strong absorption terms // Ann. Fac. Sci. Univ. Toulouse. Math. – 1995. – **6**, No 4. – P. 5–30.
3. *Diaz J. I., Veron L.* Local vanishing properties of solutions of elliptic and parabolic quasilinear equations // Trans. Amer. Math. Soc. – 1985. – **290**, No 2. – P. 787–814.
4. *Калашников А. С.* Некоторые вопросы качественной теории нелинейных вырождающихся параболических уравнений второго порядка // Успехи мат. наук. – 1987. – **42**, № 2(254). – P. 135–176.
5. *Калашников А. С.* О начальном скачке свободной границы в краевой задаче для полулинейного уравнения теплопроводности с поглощением // Там же. – 1997. – **52**, № 6(318). – P. 163–164.
6. *Антонцев С. Н.* О локализации решений нелинейных вырождающихся эллиптических и параболических уравнений // Докл. АН СССР. – 1981. – **260**, № 6. – P. 1289–1293.
7. *Олейник О. А., Иосифьян Г. А.* Аналог принципа Сен-Венана для эллиптического уравнения второго порядка и единственность решений краевых задач в неограниченных областях // Успехи мат. наук. – 1976. – **31**, № 4(190). – P. 261–262.
8. *Shishkov A., Veron L.* The balance between diffusion and absorption in semilinear parabolic equations // Atti Accad. Naz. Lincei. Rend. Cl. Sci. Fis., Mat. e Natur. – 2007. – **18**, No 1. – P. 59–96.
9. *Belaud Y., Shishkov A.* Long-time extinction of solutions of some semilinear parabolic equations // J. Different. Equat. – 2007. – **238**. – P. 64–86.
10. *Лионс Ж.-Л.* Некоторые методы решения нелинейных краевых задач. – Москва: Мир, 1972. – 588 с.
11. *Shishkov A., Kersner R.* Instantaneous shrinking of the support of energy solutions // J. Math. Anal. Appl. – 1996. – **198**, No 3. – P. 729–750.
12. *Шишков А. Е.* Мертвые зоны и мгновенная компактификация носителей энергетических решений квазилинейных параболических уравнений произвольного порядка // Мат. сб. – 1999. – **190**, № 12. – С. 129–156.

Институт прикладной математики
и механики НАН Украины, Донецк

Поступило в редакцию 19.11.2012

Е. В. Степанова, А. Е. Шишков

Сильна та послаблена локалізація розв'язків квазілінійних параболічних рівнянь

Досліджено задачу Коші–Діріхле для широкого класу квазілінійних параболічних рівнянь: $u_t - \triangle u + g(t)|u|^{q-1}u = 0$, $0 < q < 1$, де $g(t)$ — неперервний додатний для $t > 0$ абсорбційний потенціал, що вироджується при $t = 0$: $g(0) = 0$. Знайдено точні достатні умови для сильної локалізації розв'язків (тобто неперервність розповсюдження носія в околі $t = 0$). Ці умови сформульовано у вигляді підпорядкованості крайового режиму абсорбційному потенціалу. Для довільного крайового режиму (без будь-яких умов підпорядкованості) встановлено послаблену локалізацію розв'язків. Доведено, що при деяких обмеженнях на характер виродження потенціалів ефект сильної локалізації має місце при довільних крайових режимах (навіть для тих, що не задовольняють ніякі умови підпорядкованості).

K. V. Stiepanova, A. E. Shishkov

Strong and weakened localizations of solutions of quasilinear parabolic equations

We investigate the Cauchy–Dirichlet problem for a wide class of quasilinear parabolic equations $u_t - \triangle u + g(t)|u|^{q-1}u = 0$, $0 < q < 1$, *where the continuous absorption potential* $g(t)$ *is positive for* $t > 0$ *and degenerates at* $t = 0$*:* $g(0) = 0$*. We find sufficient conditions for the strong localization of solutions (i. e., continuous propagation of a support near* $t = 0$*). These conditions are formulated as a subordination of the boundary regime to the absorption potential. For an arbitrary boundary regime (without any subordination conditions), a certain type of weakened localization is obtained. Under some restriction from below on the degeneration of the potential, the strong localization holds for an arbitrary boundary regime (including regimes that do not satisfy any conditions of subordination).*