

Б. Є. Гринюк, І. В. Сименог

Вузлова структура хвильових функцій основного стану трикластерних ядер

(Представлено академіком НАН України А. Г. Загороднім)

Показано, що для узагальнених потенціалів взаємодії з локальною і нелокальною частиною, що використовуються в теорії трикластерних легких ядер як систем з α -кластера і двох нуклонів, хвильові функції в основному стані мають вузол.

Відомим є твердження про безвузловий характер хвильової функції основного стану квантово-механічної системи двох або більше бозонів, що доведено для традиційних потенціалів взаємодії між частинками. В даній роботі ми звертаємо увагу на приклади потенціалів взаємодії, для яких дві, три та більша кількість частинок в основному стані із повним кутовим моментом нуль можуть мати знакозмінну хвильову функцію з вузловою структурою.

Розглянемо легке ядро ${}^6\text{He}$, яке у кластерному підході [1–4] вважається тричастинковим і складеним з α -кластера та двох нейтронів. Для дослідження ядра в такому підході необхідно задати оператори потенціальної взаємодії між кластерами та нейтронами, які б правильно передавали одночасно як дані розсіяння кожної пари частинок при низьких енергіях, так і енергію та розміри досліджуваного ядра.

Одним з найпростіших варіантів міжкластерних потенціалів можуть бути оператори узагальненого вигляду з локальною і нелокальною компонентами [3, 5, 6]. Такі потенціали дозволяють узагальнити відомий підхід Неудачина [7, 8], в якому міжкластерна взаємодія трактується на основі так званих потенціалів “із забороненими станами” для послідовного врахування на феноменологічному рівні принципу Паулі для нуклонів. Однак узагальнені потенціали не містять нескінченних інтенсивностей, і нелокальна частина взаємодії може лише з якісної точки зору нагадувати проектор, що “виштовхує” заборонений стан у підході Неудачина якомога вище у неперервний спектр. Більше того, параметри нелокальної частини взаємодії знаходяться з умови найкращого опису експериментальних даних. Зауважимо, що розрахунок фаз розсіяння у випадку узагальнених потенціалів може бути проведений з використанням модифікованого методу фазових функцій на основі лінійних інтегро-диференціальних рівнянь [3, 6], які не містять неприємних для обчислювальних методів нефізичних сингулярностей як у випадку короткодіючих ядерних потенціалів, так і в разі присутності кулонівського далекосяжного відштовхування.

У найпростішому випадку нелокальна частина парної взаємодії може мати сепарабельний вигляд, так що дія оператора потенціальної енергії на хвильову функцію задається у вигляді:

$$\widehat{W}|\psi(r)\rangle \equiv V(r)|\psi(r)\rangle + g \left(\int u(r')\psi(r') dr' \right) |u(r)\rangle, \quad (1)$$

де формфактор $u(r)$ є додатною функцією при всіх r . Завдяки тому, що сепарабельна частина потенціалу дає внесок лише у парціальному стані з нульовим кутовим моментом, мож-

на за допомогою притягувального локального потенціалу $V(r)$ і відштовхувального сепарабельного $g|u(r)\langle u(r')|$ із $g > 0$ забезпечити необхідну залежність парціальних фаз розсіяння. Це дозволяє найпростішим чином відтворити взаємодію нуклона із складеною α -частинкою, для якої характерне ефективно відштовхування в S -стані завдяки дії принципу Паулі. Прості варіанти узагальнених потенціалів взаємодії типу (1) з невеликою кількістю параметрів дозволили успішно описати експериментальні низькоенергетичні дані розсіяння нуклона на α -частинці і структуру три- та чотирикластерних ядер [3, 5, 6].

Узагальнені міжкластерні парні потенціали типу (1) дають можливість одночасно поставити і вирішити декілька проблем. По-перше, потенціал взаємодії залежить від стану, в першу чергу, від кутового моменту, що відповідає експериментальним даним. Залежність потенціалів взаємодії від кутових моментів є характерною рисою взаємодії між складеними ядерними частинками і широко використовується в теорії ядра. По-друге, завдяки узагальненню відомої теореми Левінсона для потенціалів типу (1) [8] можна узгодити експериментальний факт відсутності зв'язаного стану в системі $n\alpha$ або $p\alpha$ із експериментальним фактом про поведінку S -фази розсіяння, яка починається при нульових енергіях від π і повинна плавно спадати до нуля з ростом енергій. Узагальнена теорема Левінсона для двочастинкового S -розсіяння

$$\delta_0(0) - \delta_0(\infty) = \pi(n + m) \quad (2)$$

містить в правій частині наявну кількість зв'язаних станів n та кількість зв'язаних станів m , які “виштовхуються” нелокальною частиною оператора взаємодії (1) у неперервний спектр. У випадку відсутності зв'язаних станів ($n = 0$) фаза може починатись від $\delta_0(0) = \pi$ і спадати до нуля, якщо $m = 1$. Саме такого типу міжкластерні потенціали ми використовуємо [3, 5, 6] для дослідження легких кластерних ядер, і вони належним чином описують експериментальні дані з розсіяння. По-третє, узагальнені потенціали типу (1) дозволяють, при відповідному виборі параметрів, описати одночасно з двочастинковими фазами розсіяння також енергію і розміри систем декількох кластерів і нуклонів, наприклад, трикластерні ядра ${}^6\text{Li}$ та ${}^6\text{He}$ [3, 6], або чотирикластерні ядра ${}^{10}\text{C}$ і ${}^{10}\text{Be}$ [5]. Таке узгодження досягається принципово простіше, ніж у випадку локальних потенціалів взаємодії, оскільки для відносно простих за формою локальних потенціалів енергії і розміри систем трьох і більшої кількості частинок можуть бути скорельовані між собою при фіксованих двочастинкових низькоенергетичних параметрах, що пояснюється [9–11] малістю радіуса ядерних сил. Для узагальнених потенціалів типу (1) така жорстка кореляція практично зникає, що і дозволяє відносно просто досягти відповідності між теоретичними і експериментальними значеннями енергій і радіусів ядер певним вибором параметрів потенціалів взаємодії.

Цікавою особливістю узагальнених потенціалів є те, що для них можуть модифікуватися і інші важливі твердження. В даній роботі мова йде про загальновідоме твердження про безвузловий характер хвильової функції основного стану для системи декількох бозонів. Виявляється, використання узагальнених потенціалів вигляду (1) призводить до нетривіальної структури хвильової функції основного стану, яка може мати вузли.

Трактуючи ядро ${}^6\text{He}$ як систему з двох нейтронів і α -частинки з узагальненими потенціалами взаємодії між нейтронами і α -частинкою у вигляді (1), можна описати експериментальну ситуацію, коли жодна пара частинок в такій тричастинковій системі не зв'язана, але S -фази розсіяння нейтрона на α -частинці починаються від π і спадають до нуля [3]. Для розрахунку основного стану ${}^6\text{He}$ у тричастинковій моделі з надійною точністю ми використовуємо варіаційний метод з гаусоїдним базисом, коли хвильова функція основного стану

з нульовим повним моментом шукається у вигляді

$$\Psi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3) = \sum_{k=1}^K N_k \widehat{S}|\varphi_k\rangle = \widehat{S} \sum_{k=1}^K N_k \widehat{S} \exp(-(a_k r_{12}^2 + b_k r_{13}^2 + c_k r_{23}^2)), \quad (3)$$

де $\mathbf{r}_{ij} \equiv \mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i$, а \widehat{S} — оператор симетризації. Лінійні коефіцієнти розкладу N_k , а разом з ними — хвильова функція і енергія системи, знаходяться в методі Гальоркіна з системи лінійних алгебраїчних рівнянь

$$\sum_{k=1}^K N_k (\langle \widehat{S}\varphi_n | \widehat{H} | \widehat{S}\varphi_k \rangle - E \langle \widehat{S}\varphi_n | \widehat{S}\varphi_k \rangle) = 0, \quad n = 1, 2, \dots, K. \quad (4)$$

Розширення базису і оптимізація його за нелінійними параметрами a_k, b_k, c_k дозволяють досягти високої точності розрахунку зв'язаних станів системи.

На рис. 1 наведено розраховану нами у трикластерному наближенні хвильову функцію основного стану ядра ${}^6\text{He}$ (з квантовими числами $J^\pi = 0^+$), яка виявляється знакозмінною, з двома явно вираженими екстремумами, які відповідають так званим конфігураціям “сигари” і “трикутника”: якщо частинки розміщені вздовж лінії з α -частинкою в центрі, то це “сигара”, а якщо у площині, з дінейтронним кластером, що рухається довкола спільного центра мас з α -частинкою, то це “трикутник”. На перших трьох графіках (рис. 1 *a, б, в*) зображено ізолінії для хвильової функції ${}^6\text{He}$ залежно від відстані між нейтронами r_{nn} та відстані від α -частинки до центра мас двох нейтронів ρ_α , для трьох різних кутів ($\theta = 0, \theta = \pi/4$ і $\theta = \pi/2$) між векторами \mathbf{r}_{nn} і ρ_α . З якісної точки зору, хвильова функція практично не залежить від кута θ . Наголосимо, що функція має два екстремуми — додатний і від’ємний, причому ізолінія, яка відповідає проходженню хвильової функції через нуль, проходить між двома її екстремумами під невеликим кутом до вертикалі. На рис. 1, *г* для наочності наведено тривимірне зображення хвильової функції для $\theta = 0$, на якому чітко видно знакозмінність хвильової функції, і що від’ємний мінімум функції лежить нижче нульової горизонтальної площини. Ще раз підкреслимо, що хвильова функція основного стану системи з нульовим кутовим моментом є знакозмінною завдяки структурі узагальнених потенціалів типу (1) для $n\alpha$ -взаємодії.

Зручно також зобразити густину розподілу ймовірності $P(r, \rho) = r^2 \rho^2 \int d\Omega |\Psi(\mathbf{r}, \rho)|^2$ і показати наявність двох максимумів у розподілі цієї додатної величини (рис. 2, *a, б*), що відповідають конфігураціям “сигари” (максимум зліва) і “трикутника” (максимум справа).

Такі ж особливості хвильових функцій спостерігаються і в чотирикластерних системах [4], де хвильові функції основного стану $J^\pi = 0^+$ ядер ${}^{10}\text{Be}$ і ${}^{10}\text{C}$ у чотирикластерній моделі (два нуклони і дві α -частинки) також є знакозмінними.

Причиною такої поведінки хвильових функцій як трикластерних, так і чотирикластерних, є структура потенціалу взаємодії (1). Якщо розглянути найпростішу двокластерну систему і дещо посилили потенціал $n\alpha$ -взаємодії так, щоб утворився зв'язаний стан, то двочастинкова хвильова функція в основному стані була б знакозмінною, маючи вузол на скінченній відстані між частинками. Це можна пояснити тим, що при $g \rightarrow \infty$ відштовхувальний сепарабельний доданок в (1) дозволить мінімізувати енергію, щоб міг утворитися зв'язаний стан, лише при умові

$$\int u(r') \psi(r') d\mathbf{r}' \rightarrow 0, \quad g \rightarrow \infty. \quad (5)$$

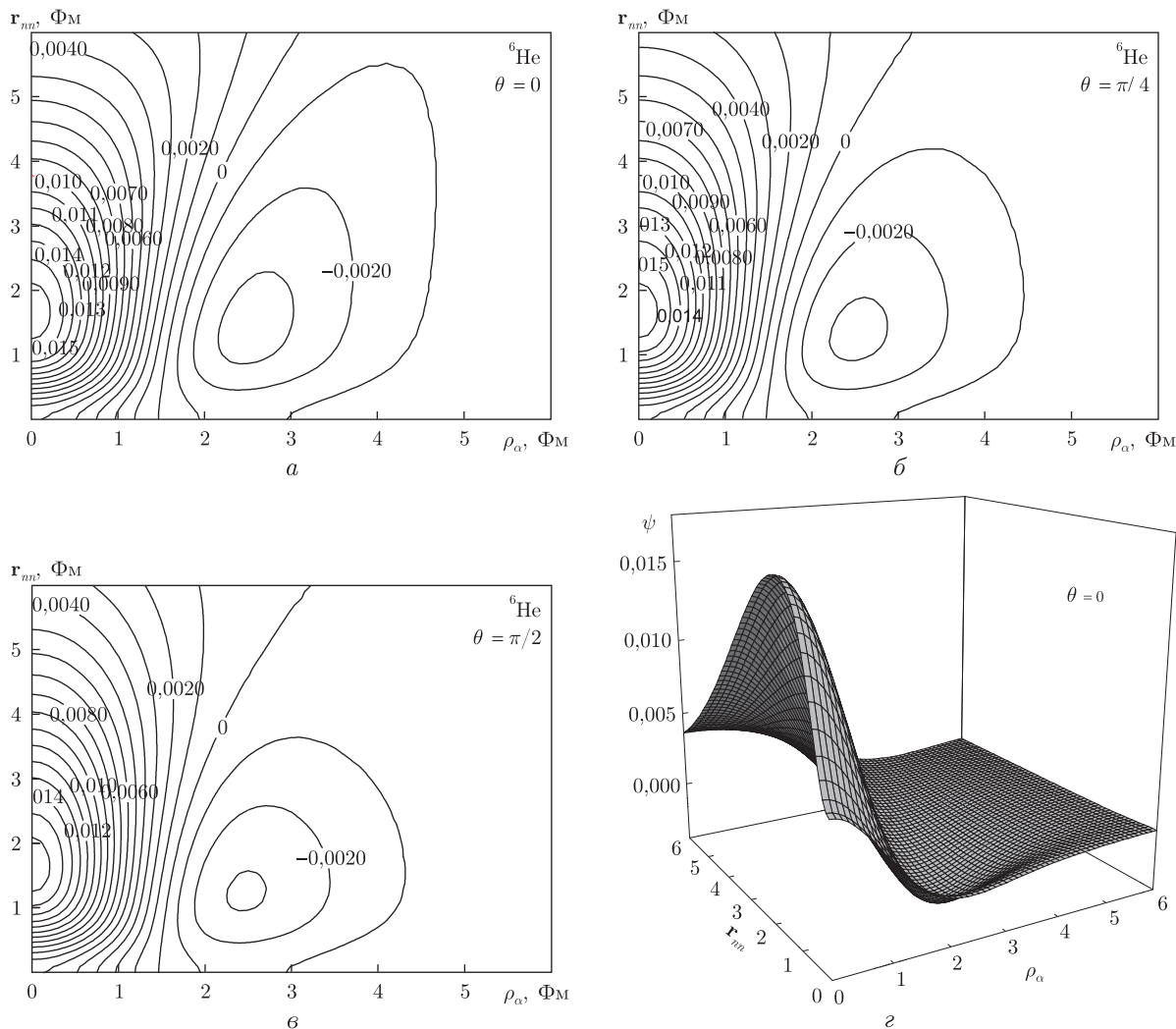


Рис. 1. Ізолінії для хвильової функції ядра ${}^6\text{He}$ в координатах \mathbf{r}_{nn} та ρ_α для різних значень кута між ними (а, б, в). Хвильова для $\theta = 0^\circ$ (г)

Співвідношення (5) при додатних $u(r)$ може бути виконано лише для знакозмінної хвильової функції. Подібні міркування можна перенести і на системи більшої кількості частинок. Для потенціалу $n\alpha$ -взаємодії, який ми використовуємо у дослідженні реальних систем, константа $g > 0$ скінченна, однак досить велика, щоб справедливими були вищенаведені міркування.

Наявність вузлової структури хвильової функції основного стану системи трьох частинок якісно можна пояснити тим, що тричастинкова хвильова функція основного стану у конкретному випадку ядра ${}^6\text{He}$, в якому α -частинка вчетверо масивніша за нейтрон, можна використати кластерне наближення $\Psi(\mathbf{r}_{nn}, \rho_\alpha) \approx \varphi_{nn}(\mathbf{r}_{nn})f(\rho_\alpha)$, в якому нехтується залежністю хвильової функції від кута θ між координатами Якобі \mathbf{r}_{nn} і ρ_α . Як природно припустити, вузлова лінія, де хвильова функція змінює знак, може з'являтися завдяки $f(\rho_\alpha)$ в області $\rho_\alpha \sim 1,5 \div 2$ ФМ. Якби вказане наближення працювало точніше, то лінія вузлів на рис. 1 йшла б вертикально. Як видно з рис. 1, хвильова функція ${}^6\text{He}$, з якісної точки зору, майже не залежить від кута θ , і лінія вузлів дійсно близька до вертикальної.

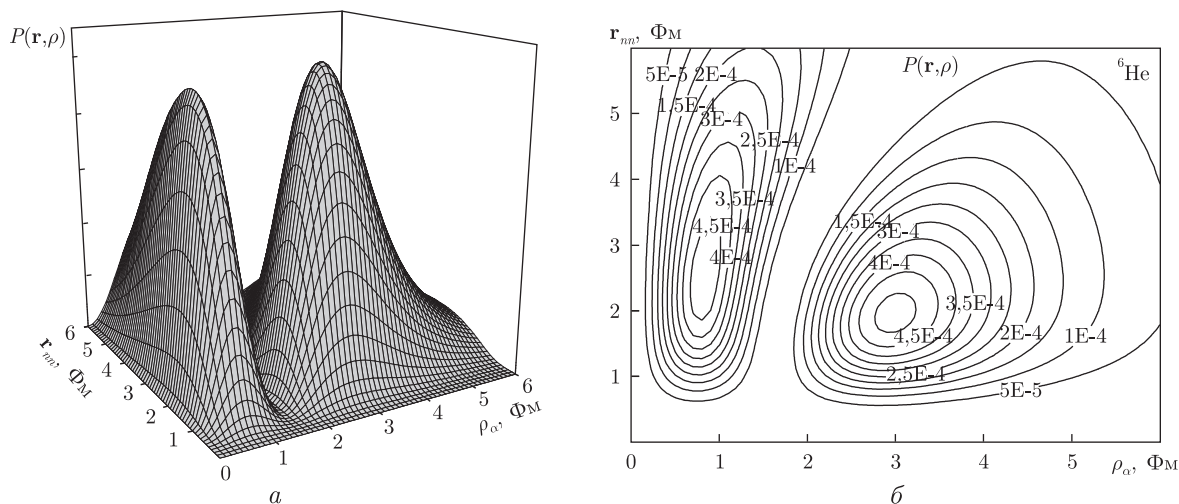


Рис. 2. Розподіл ймовірності в ядрі ${}^6\text{He}$ (а), та відповідні ізолінії (б)

Щоб підтвердити той факт, що вузлова структура основного стану завдячує структурі потенціалу (1), ми виконали розрахунки хвильової функції ${}^6\text{He}$ для певного локального потенціалу між нейтроном і α -частинкою, який містить притягування і відштовхування на малих відстанях. Хоча такий модельний $n\alpha$ -потенціал, який не залежить від кутового моменту, не дозволяє узгодити фази $n\alpha$ -розсіяння з експериментальними даними (оскільки для S -стану потенціал повинен бути ефективно відштовхувальним, а для P -стану — притягувальним), однак він дає для ${}^6\text{He}$ таку саму структуру густини ймовірності, яка показана на рис. 2 для $n\alpha$ -потенціалу вигляду (1). В той же час хвильова функція, отримана з локальним $n\alpha$ -потенціалом, не містить вузлів (у відповідності з загальноприйнятим твердженням), а має два сильно виражених максимуми одного знаку в тих місцях, де на рис. 1 містяться екстремуми різних знаків.

Таким чином, для узагальнених потенціалів з локальною і нелокальною компонентами була виявлена вузлова структура основного стану трьох кластерів з нульовим кутовим моментом. На прикладі хвильової функції ядра ${}^6\text{He}$ показано, що дві основні просторові конфігурації цього ядра (відомі як “сигара” і “трикутник”) відповідають двом екстремумам різного знаку в хвильовій функції системи. Використання таких потенціалів розширює можливості опису систем декількох взаємодіючих кластерів у відповідності до експериментальних даних одночасно з низькоенергетичними даними розсіяння. Отримані результати можуть бути узагальнені на системи чотирьох і більше кластерів.

Дана робота виконана за підтримки цільової програми фундаментальних досліджень Відділення фізики і астрономії НАН України.

1. Zhukov M. V., Danilin B. V., Fedorov D. V. et al. Bound state properties of borromean halo nuclei: ${}^6\text{He}$ and ${}^{11}\text{Li}$ // Phys. Reports. – 1993. – **231**, No 4. – P. 151–199.
2. Kukulín V. I., Pomerenantsev V. N., Razikov Kh. D. et al. Detailed study of the cluster structure of light nuclei in a three-body model (IV). Large Space calculation for $A = 6$ nuclei with realistic nuclear forces // Nucl. Phys. – 1995. – **A 586**. – P. 151–189.
3. Гринюк Б. Е., Сименюг И. В. Структура ядра ${}^6\text{He}$ в трехчастичной модели // Ядерн. физика. – 2009. – **72**, № 1. – С. 10–24.
4. Horiuchi H., Ikeda K., Katô K. Recent development in nuclear cluster physics // Progr. Theor. Phys. Suppl. – 2012. – **192**. – P. 1–238.

5. Grinyuk B. E., Simenog I. V. Three-particle structure of the halo nucleus ${}^6\text{Li}$ // Ядерна фізика та енергетика. – 2009. – **10**, № 1. – С. 9–19.
6. Grinyuk B. E., Simenog I. V. Structure characteristics of light cluster nuclei with two extra nucleons // Укр. фіз. журн. – 2011. – **56**, № 7. – С. 635–644.
7. Neudatchin V. G., Kukulin V. I., Korotkikh V. L., Korennoy V. P. A microscopically substantiated local optical potential for $\alpha\alpha$ -scattering // Phys. Lett. B. – 1971. – **34**. – P. 581–583.
8. Кукулин В. И., Неудачин В. Г., Смирнов Ю. Ф. Взаимодействие составных частиц и принцип Паули // Физика элемент. частиц и атом. ядра. – 1979. – **10**. – С. 1236–1293.
9. Симоног І. В., Шаповал Д. В. Теорія возмущення по радіусу сил для задачі трьох тел // Теор. мат. фізика. – 1988. – **75**, № 2. – С. 275–287.
10. Гринюк Б. Е., Симоног І. В., Ситниченко А. І. Безмодельні властивості параметрів розсіяння і спектра трьох частиць з взаємодією малого радіуса // Укр. фіз. журн. – 1984. – **29**, № 9. – С. 1289–1295.
11. Симоног І. В., Ситниченко А. І., Шаповал Д. В. О разложении эффективного радиуса для дублетного $n\mathbf{d}$ -рассеяния // Ядерн. физика. – 1987. – **45**, вып. 1. – С. 60–66.

*Інститут теоретичної фізики
ім. М. М. Боголюбова НАН України, Київ*

Надійшло до редакції 27.12.2012

Б. Е. Гринюк, И. В. Симоног

Узловая структура волновых функций основного состояния трехкластерных ядер

Показано, что для обобщенных потенциалов взаимодействия с локальной и нелокальной частью, используемых в теории трехкластерных легких ядер как систем из α -кластера и двух нуклонов, волновые функции в основном состоянии имеют узел.

B. E. Grinyuk, I. V. Simenog

The node structure of the ground-state wave functions of three-cluster nuclei

For the generalized interaction potentials with local and nonlocal terms used in studying the three-cluster light nuclei as systems of an α -cluster and two nucleons, it is shown that the ground-state wave function has a node.