



УДК 539.3

И. Д. Бреславский, К. В. Аврамов

### Нерезонансное взаимодействие двух мод колебаний прямоугольных пластин при их геометрически нелинейном деформировании

(Представлено членом-корреспондентом НАН Украины А. Е. Божко)

*Исследованы геометрически нелинейные колебания тонкой прямоугольной неподвижно опертой пластины. Показано, что для хорошего приближения динамики пластины достаточно модели колебаний с двумя степенями свободы. Нелинейная динамика исследована с помощью нелинейных нормальных форм Каудерера–Розенберга. Исследован режим двухмодовых колебаний при отсутствии внутреннего резонанса между соответствующими частотами. Более того, с увеличением амплитуд колебаний связь между обобщенными координатами приобретает линейную форму.*

Пластины являются одним из важнейших элементов машиностроительных, кораблестроительных и авиационных конструкций. Результаты исследований линейных колебаний пластин представлены в работах [1, 2]. Динамика пластин при их геометрически нелинейном деформировании рассмотрена в [3, 4]. В [5, 6] геометрически нелинейное деформирование пластин исследуется методом конечных элементов. В работе [7] методы  $R$ -функций и многих масштабов применяются для анализа колебаний круглых пластин с надрезами.

Ниже рассматриваются нелинейные колебания тонкой, прямоугольной, неподвижно опертой пластины. Обнаружен режим колебаний, который с ростом амплитуд превращается из одномодового в двухмодовый. Такая эволюция движений исследована с помощью нелинейных нормальных форм (ННФ) Каудерера–Розенберга.

Исследуем свободные колебания тонкой прямоугольной пластины при ее геометрически нелинейном деформировании. Пластина занимает область  $\Lambda = \{(x, y) \in [0, a] \times [0, b]\}$ , где  $x, y$  — прямоугольные координаты ее срединной плоскости. Кинетическую энергию  $K$  и потенциальную энергию упругого деформирования  $\Pi$  пластины представим с помощью соотношений фон Кармана так [4]:

$$\Pi = \frac{1}{2} \int_{-0,5h}^{0,5h} \int_{\Lambda} (\sigma_{11}\varepsilon_{11}^z + \sigma_{22}\varepsilon_{22}^z + \sigma_{12}\varepsilon_{12}^z) dx dy dz, \quad K = \frac{\rho h}{2} \int_{\Lambda} (\dot{w}^2 + \dot{u}^2 + \dot{v}^2) dx dy, \quad (1)$$

© И. Д. Бреславский, К. В. Аврамов, 2013

$$\begin{aligned}\sigma_{11} &= \frac{E}{1-\nu^2}(\varepsilon_{11}^z + \nu\varepsilon_{22}^z), & \sigma_{22} &= \frac{E}{1-\nu^2}(\varepsilon_{22}^z + \nu\varepsilon_{11}^z), & \sigma_{12} &= \frac{E}{2(1+\nu)}\varepsilon_{12}^z, \\ \varepsilon_{11}^z &= u_x + 0,5w_x^2 - zw_{xx}, & \varepsilon_{22}^z &= v_y + 0,5w_y^2 - zw_{yy}, & \varepsilon_{12}^z &= v_x + u_y + w_xw_y - 2zw_{xy},\end{aligned}\quad (2)$$

где  $w_x = \partial w / \partial x$ ;  $h$  — толщина пластины;  $E, \nu$  — модуль упругости и коэффициент Пуассона;  $\rho$  — плотность материала пластины. Предполагается, что пластина неподвижно оперта по всему контуру:  $w = w_{\mathbf{nn}} = u = v = 0$ ;  $(x, y) \in \partial\Lambda$ , где  $\partial\Lambda$  — граница пластины;  $\mathbf{n}$  — внешняя нормаль к  $\partial\Lambda$ .

Перемещения срединной поверхности пластины разложим по собственным формам линейных колебаний. Исследуем свободные нелинейные колебания, которые при стремлении амплитуды колебаний к нулю преобразуются в линейные колебания по первой собственной форме. В этом случае при увеличении амплитуды нелинейные колебания происходят с преобладающей первой собственной формой. В [4, с. 132] показано, что в пластине существуют колебания только с нечетными  $n, m$  в разложении для  $w(x, y, t)$ :

$$w(x, y, t) = \sum_{n,m=0} w_{2n+1,2m+1}(t) \sin((2n+1)\pi a^{-1}x) \sin((2m+1)\pi b^{-1}y). \quad (3)$$

Тогда перемещения  $u(x, y, t)$ ;  $v(x, y, t)$  представляются так [4, с. 132]:

$$\begin{aligned}u(x, y, t) &= \sum_{n=1,m=0} u_{2n,2m+1}(t) \sin(2n\pi a^{-1}x) \sin((2m+1)\pi b^{-1}y), \\ v(x, y, t) &= \sum_{n=0,m=1} v_{2n+1,2m}(t) \sin((2n+1)\pi a^{-1}x) \sin(2m\pi b^{-1}y).\end{aligned}\quad (4)$$

Из вида кинетической и потенциальной энергии (1) и ортогональности тригонометрических функций следуют разложения (3), (4). Этот анализ достаточно громоздок и здесь не представлен. Соотношения (3), (4) введем в кинетическую и потенциальную энергии и произведем необходимое интегрирование. Тогда потенциальная энергия является функцией от  $\mathbf{W} = (w_{1,1}, w_{1,3}, \dots, u_{2,1}, u_{2,3}, \dots, v_{1,2}, v_{1,4}, \dots)$ , а кинетическая — функцией от  $\dot{\mathbf{W}}$ . Колебания пластины опишем уравнениями Лагранжа, записанными с помощью  $K, \Pi$  (1). Для удобства записи все обобщенные координаты обозначим через  $\varphi_i$ ;  $i = 1, \dots$ . Число обобщенных координат в разложениях для  $u, v, w$  обозначим через  $N_u, N_v, N_w$  соответственно. Поскольку собственные частоты колебаний в плоскости существенно выше частот изгибных колебаний, то инерционными слагаемыми в плоскости пластины можно пренебречь [3, 4]. Тогда получаем систему  $N_w$  нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений и систему  $N_u + N_v$  алгебраических уравнений:

$$\ddot{\varphi}_k + \Omega_k^2 \varphi_k + \sum_{i=N_w+1}^N \sum_{j=1}^{N_w} v_{kij} \varphi_i \varphi_j + \sum_{i=1}^{N_w} \sum_{j=i}^{N_w} \sum_{l=j}^{N_w} v_{kijl} \varphi_i \varphi_j \varphi_l = 0; \quad k = 1, \dots, N_w, \quad (5)$$

$$\sum_{i=N_w+1}^N \tilde{v}_{ki} \varphi_i + \sum_{i=1}^{N_w} \sum_{j=i}^{N_w} \tilde{v}_{kij} \varphi_i \varphi_j = 0, \quad k = N_w + 1, \dots, N, \quad (6)$$

где  $N = N_w + N_u + N_v$ ,  $\Omega_k$  — собственные частоты. Из системы (6) выразим  $\varphi_i$ ,  $i = N_w + 1, \dots, N$ , через  $\varphi_i$ ,  $i = 1, \dots, N_w$ . Эти выражения введем в (5) и перейдем к следующим

безразмерным переменным:  $\tau = \Omega_1 t$ ;  $\xi_i(\tau) = \varphi_i(t)h^{-1}$ ;  $i = 1, \dots, N_w$ . Тогда система (5) примет вид

$$\ddot{\xi}_k = -\bar{\Omega}_k^2 \xi_k - \sum_{i=1}^{N_w} \sum_{j=i}^{N_w} \sum_{l=j}^{N_w} \vartheta_{kijl} \xi_i \xi_j \xi_l = f_k(\xi_1, \dots, \xi_{N_w}) = \frac{\partial \Pi}{\partial \xi_k}, \quad k = 1, \dots, N_w, \quad (7)$$

где  $\bar{\Omega}_k = \Omega_k \Omega_1^{-1}$  — безразмерные собственные частоты. При исследовании свободных колебаний к системе (7) добавляются начальные условия, которые соответствуют пространственному распределению начальных отклонений.

Из уравнений (6) следует, что обобщенные координаты продольных перемещений  $u$  и  $v$  зависят от квадратов обобщенных координат поперечных перемещений пластинки, т. е.  $(u, v) = O(w^2)$ . Поэтому третье слагаемое уравнения (5) после подстановки в него зависимостей  $\varphi_i$ ,  $i = N_w + 1, \dots, N$  от  $\varphi_j$ ,  $j = 1, \dots, N_w$ , превращается в выражение, содержащее только кубические слагаемые от  $\varphi_j$ ;  $j = 1, \dots, N_w$ .

Исследуем ННФ Каудерера–Розенберга [8] для системы (7). Движения системы рассматриваются в конфигурационном пространстве  $(\xi_1, \dots, \xi_{N_w})$ . Обобщенную координату  $\xi_1$  выберем в качестве независимой и ННФ представим так:  $\xi_i = \xi_i(\xi_1)$ ,  $i = 2, \dots, N_w$ . Тогда уравнения движения (7) в конфигурационном пространстве представляются:

$$\begin{aligned} \xi_k''(\xi_1) \frac{2(H - \Pi)}{N_w} + \xi_k'(\xi_1) f_1[\xi_1, \xi_2(\xi_1), \dots, \xi_{N_w}(\xi_1)] = \\ 1 + \sum_{k=2}^{N_w} \xi_k'^2(\xi_1) \\ = f_k[\xi_1, \xi_2(\xi_1), \dots, \xi_{N_w}(\xi_1)], \quad k = 2, \dots, N_w, \end{aligned} \quad (8)$$

где  $H$  — величина полной энергии системы. Амплитуда колебаний  $\Xi$  определяется из нелинейного алгебраического уравнения  $\Pi[\Xi, \xi_2(\Xi), \dots, \xi_{N_w}(\Xi)] = H$ . Уравнение (8) дополним граничным условием трансверсальности [8]

$$\xi_k'(\Xi_1) f_1[\Xi_1, \xi_2(\Xi_1), \dots, \xi_{N_w}(\Xi_1)] = f_k[\Xi_1, \xi_2(\Xi_1), \dots, \xi_{N_w}(\Xi_1)], \quad k = 2, \dots, N_w. \quad (9)$$

ННФ представим в виде укороченного ряда Тейлора

$$\xi_i(\xi_1) = \alpha_{1,i} \xi_1 + \alpha_{3,i} \xi_1^3 + \dots, \quad i = 2, \dots, N_w, \quad (10)$$

где  $\alpha_{1,i}$ ,  $\alpha_{3,i}$ ,  $\dots$  — подлежащие определению коэффициенты. Укороченный ряд (10) введем в (8) и приравняем коэффициенты при  $\xi_1, \xi_1^3; \dots$ . В результате получим систему линейных алгебраических уравнений относительно коэффициентов (10)  $\alpha_{1,i}$ ,  $\alpha_{3,i}, \dots$ . Эта система уравнений дополняется одним нелинейным алгебраическим уравнением, которое получается подстановкой укороченного ряда (10) в (9). В результате решения полученной системы алгебраических уравнений находим ННФ в виде (10). После того как ННФ (10) получена, определим движения на этой форме.

Исследуем свободные нелинейные колебания алюминиевой пластины с параметрами из [4]:  $a = 0,515$  м,  $b = 0,184$  м,  $h = 0,0003$  м,  $E = 69 \cdot 10^9$  Па,  $\rho = 2700$  кг/м<sup>3</sup>,  $\nu = 0,33$ . В разложениях (3) и (4) учтем обобщенные координаты  $w_{1,1}$ ,  $w_{3,1}$ ,  $w_{5,1}$ ,  $w_{7,1}$ ,  $w_{1,3}$ ,  $w_{3,3}$  и  $u_{i,j}$ ,  $v_{j,i}$ ,  $i = 2, 4, 6, 8$ ,  $j = 1, 3, 5, 7$  соответственно. Параметры системы (7) с шестью степенями свободы были получены аналитически. Исследовано влияние высоких форм на колебания

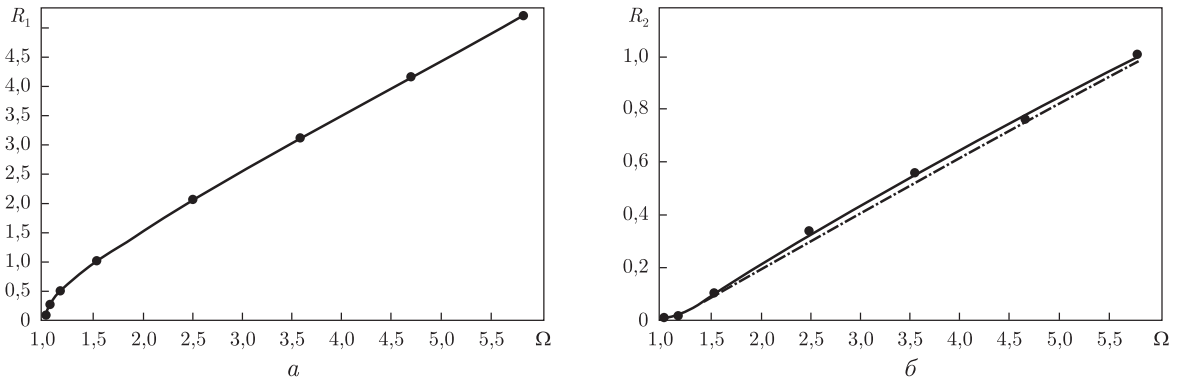


Рис. 1. Скелетные кривые колебаний

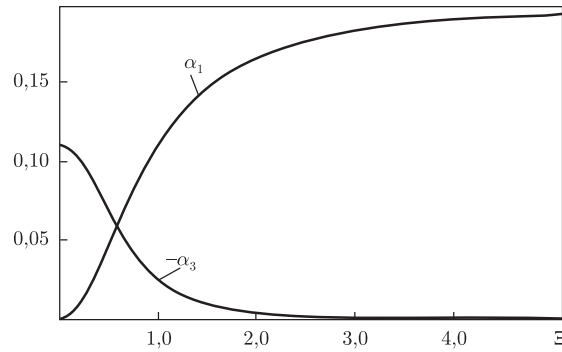


Рис. 2. Зависимости коэффициентов нелинейной нормальной формы от амплитуд колебаний

с преобладающей первой собственной формой. Установлено, что существенное влияние оказывает только обобщенная координата  $\xi_2$ , отвечающая второй собственной форме  $w_{3,1}$ . Поэтому в дальнейшем будем исследовать модель с двумя степенями свободы. Решения этой системы найдем методом гармонического баланса. Из анализа сходимости результатов метода гармонического баланса следует, что для хорошего приближения решения системы (7) достаточно двух гармоник. Результаты расчетов свободных колебаний представлены на скелетных кривых (рис. 1, а, б). На этих рисунках оси ординат демонстрируют размахи колебаний  $R_i = 0,5(\max \xi_i(\tau) - \min \xi_i(\tau))$ . Из рис. 1 следует, что, начиная с некоторых частот свободных колебаний, вклад  $\xi_2$  в динамический прогиб пластины становится существенным, т. е. колебания превращаются в двухмодовые. Отметим, что на динамику системы (7) не влияет внутренний резонанс  $1 : 2$ , так как в этой системе присутствует только кубическая нелинейность. В работе [9] показано, что существуют сильно нелинейные системы с собственными частотами, не удовлетворяющие условиям внутреннего резонанса, в которых наблюдаются несколько активных координат с соизмеримыми амплитудами колебаний. Система (7) принадлежит именно такому классу. Для более детального изучения нерезонансных колебаний с несколькими активными обобщенными координатами воспользуемся ННФ Каудерера–Розенберга. На рис. 2 приведены зависимости коэффициентов (10) от амплитуды ННФ, приведенных на рис. 1 штрихпунктирной линией.

Проводилось прямое численное интегрирование системы (7). Результаты численного интегрирования показаны на рис. 1 точками. Как можно видеть, результаты расчетов ННФ Каудерера–Розенберга и данные, полученные прямым численным интегрированием систе-

мы (7), так близки, что неразличимы в масштабе рисунка. Эти же результаты немного разнятся для координаты  $\xi_2$ .

Таким образом, в работе исследован эффект нерезонансного многомодового взаимодействия колебаний пластин при их геометрически нелинейном деформировании. С помощью ННФ Каудерера–Розенберга показано, что зависимость между обобщенными координатами в конфигурационном пространстве начиная с некоторого уровня амплитуд становится линейной.

1. Филиппов А. П. Колебания деформируемых систем. – Москва: Машиностроение, 1970. – 740 с.
2. Leissa A. W. Vibrations of plates. – Washington, DC: US Government Printing Office, 1969. – 353 p.
3. Вольмир А. С. Нелинейная динамика пластинок и оболочек. – Москва: Наука, 1972. – 432 с.
4. Amabili M. Nonlinear vibrations and stability of shells and plates. – New York: Cambridge Univ. Press, 2008. – 374 p.
5. Ribeiro P., Petyt M. Geometrical non-linear, steady state, forced, periodic vibration of plates, part II: Stability study and analysis of multi-modal response // J. of Sound and Vibration. – 1999. – **226**, No 5. – P. 985–1010.
6. Ribeiro P., Petyt M. Non-linear free vibration of isotropic plates with internal resonance // Intern. J. of Non-Linear Mechanics. – 2000. – **35**. – P. 263–278.
7. Аврамов К. В. Нелинейное взаимодействие сопряженных форм колебаний в круглых пластинах с надрезами // Доп. НАН України. – 2009. – № 7. – С. 49–55.
8. Аврамов К. В., Михлин Ю. В. Нелинейная динамика упругих систем. – Москва; Ижевск: НИЦ “Регулярная и хаотическая динамика”, 2010. – 704 с.
9. Peeters M., Viguie R., Serandour G., Kerschen G., Golinval J.-C. Nonlinear normal modes, Part II: Toward a practical computation using numerical continuation techniques // Mech. Systems and Signal Processing. – 2009. – **23**. – P. 195–216.

Институт проблем машиностроения  
им. А. Н. Подгорного НАН Украины, Харьков

Поступило в редакцию 11.08.2011  
После доработки — 22.10.2012

**І. Д. Бреславський, К. В. Аврамов**

### **Нерезонансна взаємодія двох мод коливань прямокутних пластин при їх геометрично нелінійному деформуванні**

*Досліджено геометрично нелінійні коливання тонкої прямокутної нерухомо опертої пластини. Показано, що для хорошого наближення динаміки пластини достатньо моделі коливань з двома ступенями вільності. Нелінійну динаміку досліджено за допомогою нелінійних нормальних форм Каудерера–Розенберга. Виявлено двомодові коливання за відсутності внутрішнього резонансу між відповідними частотами. Більш того, зі збільшенням амплітуд коливань зв'язок між узагальненими координатами набуває лінійної форми.*

**I. D. Breslavsky, K. V. Avramov**

### **Nonresonant interaction of two modes of vibrations of plates under a geometrically nonlinear deformation**

*Free geometrically nonlinear vibrations of an immovably simply supported rectangular plate are studied. It is shown that the two-degrees-of-freedom model gives a good approximation of the solution. The nonlinear dynamics is studied with the help of Kauderer-Rosenberg nonlinear normal modes. Two-mode motions are found, although the condition of internal resonance is not satisfied. It is found that the dependence between generalized coordinates becomes linear for the vibration amplitude bigger than a certain threshold value.*