УДК 517.5

В. И. Рязанов, Е. А. Севостьянов

О некоторых вопросах сходимости и компактности пространственных гомеоморфизмов

(Представлено членом-корреспондентом НАН Украины В. Я. Гутлянским)

Доказаны различные теоремы сходимости для общих пространственных гомеоморфизмов и на этой основе получены теоремы сходимости и компактности для классов так называемых кольцевых Q-гомеоморфизмов. В частности, установлено, что класс кольцевых Q-гомеоморфизмов f в $\mathbb{R}^n$, фиксирующих две точки, компактен при Q конечного среднего колебания. Полученные результаты будут иметь широкие приложения к классам Соболева и более общим классам Орлича–Соболева.

В настоящей работе мы приводим некоторые сведения из теории сходимости общих гомеоморфизмов и развиваем теорию компактности для так называемых кольцевых Q-гомеоморфизмов. Кольцевые Q-гомеоморфизмы были введены сначала на плоскости в связи с изучением вырожденных уравнений Бельтрами (см., например, [1, 2]). Теория кольцевых Q-гомеоморфизмов имеет также приложения к различным классам отображений с конечным искажением, интенсивно изучаемых в последнее время. Данная работа является естественным продолжением наших работ [3, 4].

Напомним, что борелева функция $\rho\colon \mathbb{R}^n \to [0,\infty]$, $n \geqslant 2$, называется *допустимой* для семейства Γ кривых γ в $\mathbb{R}^n$, пишут $\rho \in \operatorname{adm}\Gamma$, если

$$\int\limits_{\gamma} \rho(x)|dx| \geqslant 1 \qquad \forall\, \gamma \in \Gamma.$$

Модулем семейства кривых Γ называется величина

$$M(\Gamma) = \inf_{\rho\in\operatorname{adm}\Gamma} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \rho^n(x)\, dm(x).$$

Пусть D — область в $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$, $E,\ F \subset \mathbb{R}^n$ — произвольные множества. Обозначим через $\Gamma(E,F,D)$ семейство всех кривых $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{R}^n$, которые соединяют E и F в D, т. е. $\gamma(a) \in E$, $\gamma(b) \in F$ и $\gamma(t) \in D$ при $a < t < b$. Следующее определение мотивировано кольцевым определением квазиконформности (см. [5]). Пусть D — область в $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$, $Q\colon D \to (0,\infty)$ — измеримая функция. Положим

$$A(x_0,r_1,r_2) = \{x \in \mathbb{R}^n : r_1 < |x-x_0| < r_2\},$$

$$S(x_0,r_i) = \{x \in \mathbb{R}^n\colon |x-x_0| = r_i\}, \qquad i = 1,2.$$

Говорим (см. [3]), что гомеоморфизм f области D в $\mathbb{R}^n$ является *кольцевым Q-гомеоморфизмом в точке* $x_0 \in D$, если

$$M(\Gamma(f(S_1), f(S_2), f(A))) \leqslant \int\limits_{A} Q(x)\eta^n(|x-x_0|)\, dm(x) \tag{1}$$

для любого кольца $A = A(x_0, r_1, r_2)$, $0 < r_1 < r_2 < r_0 = \mathrm{dist}(x_0, \partial D)$, $S_i = S(x_0, r_i)$, $i = 1, 2$, и для каждой измеримой функции $\eta\colon (r_1, r_2) \to [0, \infty]$ такой, что

$$\int\limits_{r_1}^{r_2} \eta(r)\, dr \geqslant 1.$$

Если условие (1) имеет место в каждой точке $x_0 \in D$, то также говорим, что f является *кольцевым Q-гомеоморфизмом в области D*.

1. О сходимости общих гомеоморфизмов. В дальнейшем в $\overline{\mathbb{R}^n} = \mathbb{R}^n \bigcup\{\infty\}$ мы используем *сферическую метрику*

$$h(x, y) = \frac{|x - y|}{\sqrt{1 + |x|^2}\sqrt{1 + |y|^2}}, \qquad x \neq \infty \neq y, \qquad h(x, \infty) = \frac{1}{\sqrt{1 + |x|^2}}.$$

Сферический диаметр множества $E \subset \overline{\mathbb{R}^n}$ есть величина

$$h(E) = \sup_{x, y \in E} h(x, y).$$

Для точки $z \in \overline{\mathbb{R}^n}$ и множества $E \subseteq \overline{\mathbb{R}^n}$ мы также определим расстояние $h(z, E)$ как точную нижнюю грань $h(z, y)$ по всем $y \in E$, а для множеств $F \subseteq \overline{\mathbb{R}^n}$ и $E \subseteq \overline{\mathbb{R}^n}$ — расстояние $h(F, E)$ как точную нижнюю грань $h(z, y)$ по всем $z \in F$ и $y \in E$. В дальнейшем $B^*(x_0, \rho)$, $x_0 \in \overline{\mathbb{R}^n}$, $\rho \in (0, 1)$, обозначает шар $\{x \in \overline{\mathbb{R}^n} : h(x, x_0) < \rho\}$ относительно сферической метрики.

Начнем с простого следствия из теоремы Брауэра об инвариантности области.

Следствие 1. *Пусть U — открытое множество в $\overline{\mathbb{R}^n}$ и $f\colon U \to \overline{\mathbb{R}^n}$ — непрерывное инъективное отображение. Тогда f — гомеоморфизм множества U на множество $V = f(U)$.*

Ядром последовательности открытых множеств $\Omega_l \subset \overline{\mathbb{R}^n}$, $l = 1, 2, \ldots$ называется открытое множество

$$\Omega_0 = \mathrm{Kern}\, \Omega_l := \bigcup_{m=1}^{\infty} \mathrm{Int}\left(\bigcap_{l=m}^{\infty} \Omega_l\right),$$

где $\mathrm{Int}\, A$ обозначает множество, состоящее из всех внутренних точек A; другими словами, $\mathrm{Int}\, A$ есть объединение всех открытых шаров внутри A относительно сферической метрики.

Следующее предложение для случая плоскости было доказано в работе [6] (см. также [1, предложение 2.7]).

Предложение 1. *Пусть $g_l\colon D \to D_l'$, $D_l' := g_l(D)$, — последовательность гомеоморфизмов, заданных в области $D \subseteq \overline{\mathbb{R}^n}$. Предположим, что последовательность g_l сходится локально равномерно при $l \to \infty$ к инъективному отображению $g\colon D \to D' := g(D) \subset \overline{\mathbb{R}^n}$ относительно сферической метрики. Тогда отображение g является гомеоморфизмом и, кроме того, $D' \subset \mathrm{Kern}\, D_l'$.*

Замечание 1. В частности, из предложения 1 следует, что $D' := g(D) \subseteq \mathbb{R}^n$, если $D_l' := g_l(D) \subseteq \mathbb{R}^n$ при всех $l = 1, 2, \ldots$.

Следующее утверждение для плоского случая может быть найдено в работе [7] (см. также [1, лемма 2.16]).

Лемма 1. *Пусть D — область в $\overline{\mathbb{R}^n}$, $l = 1, 2, \ldots,$ и пусть f_l — последовательность гомеоморфизмов D в $\overline{\mathbb{R}^n}$ такая, что f_l сходится при $l \to \infty$ локально равномерно к гомеоморфизму f из D в $\overline{\mathbb{R}^n}$ относительно сферической метрики. Тогда также $f_l^{-1} \to f^{-1}$ локально равномерно в области $f(D)$.*

Следующее утверждение на плоскости было доказано в работе [8] (см. [1, предложение 2.6]).

Теорема 1. *Пусть D — область в $\overline{\mathbb{R}^n}$, $n \geqslant 2$, f_m, $m = 1, 2, \ldots,$ — последовательность гомеоморфизмов D в $\overline{\mathbb{R}^n}$, сходящаяся локально равномерно к дискретному отображению $f\colon D \to \overline{\mathbb{R}^n}$ относительно сферической метрики. Тогда f — гомеоморфизм D в $\overline{\mathbb{R}^n}$.*

2. О сходимости гомеоморфизмов, удовлетворяющих модульным условиям. Следующая лемма играет значительную роль в дальнейших исследованиях. Ее плоский аналог был доказан в работе [9] (см. также [1, приложение A1]).

Лемма 2. *Пусть f_m, $m = 1, 2, \ldots,$ — последовательность гомеоморфизмов области $D \subseteq \mathbb{R}^n$ в $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$, сходящаяся к отображению f равномерно на каждом компактном множестве в D относительно сферической метрики в $\overline{\mathbb{R}^n}$. Предположим, что для каждого $x_0 \in D$ найдутся последовательности $R_k > 0$ и $r_k \in (0, R_k)$, $k = 1, 2, \ldots,$ такие, что $R_k \to 0$ при $k \to \infty$ и $M(\Gamma(f_m(s_k), f_m(S_k), f_m(A_k))) \to 0$ при $k \to \infty$ равномерно по $m = 1, 2, \ldots,$ где $s_k = S(x_0, r_k)$, $S_k = S(x_0, R_k)$, $A_k = A(x_0, r_k, R_k)$. Тогда отображение f — либо постоянная в $\overline{\mathbb{R}^n}$, либо гомеоморфизм области D в $\mathbb{R}^n$.*

Следуя работе [10], говорим, что функция $\varphi\colon D \to \mathbb{R}$ имеет *конечное среднее колебание в точке* $x_0 \in D$, сокр. $\varphi \in \mathrm{FMO}\ (x_0)$, если φ интегрируема в окрестности x_0 и

$$\overline{\lim_{\varepsilon \to 0}} \ \ \fint_{B(x_0,\varepsilon)} |\varphi(x) - \widetilde{\varphi}_\varepsilon|\, dm(x) < \infty, \tag{2}$$

где $\widetilde{\varphi}_\varepsilon$ — среднее значение функции φ в шаре $B(x_0, \varepsilon) = \{x \in \mathbb{R}^n \colon |x - x_0| < \varepsilon\}$. Также говорим, что функция $\varphi\colon D \to \mathbb{R}$ имеет *конечное среднее колебание в области* D, сокр. $\varphi \in \mathrm{FMO}\ (D)$ или просто $\varphi \in \mathbf{FMO}$, если $\varphi \in \mathrm{FMO}\ (x_0)$ в каждой точке $x_0 \in D$.

Теорема 2. *Пусть D — область в $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$, $Q\colon D \to (0, \infty)$ — измеримая функция и f_m, $m = 1, 2, \ldots,$ — последовательность кольцевых Q-гомеоморфизмов области D в $\mathbb{R}^n$, сходящаяся локально равномерно к отображению f относительно сферической метрики. Если $Q \in FMO$, то отображение f является либо постоянным в $\overline{\mathbb{R}^n}$, либо гомеоморфизмом D в $\mathbb{R}^n$.*

Следствие 2. *В частности, предельное отображение f является либо постоянным в $\overline{\mathbb{R}^n}$, либо гомеоморфизмом области D в $\mathbb{R}^n$,*

$$\overline{\lim_{\varepsilon \to 0}} \ \ \fint_{B(x_0,\varepsilon)} Q(x)\, dm(x) < \infty \qquad \forall\, x_0 \in D,$$

либо если каждая точка $x_0 \in D$ является точкой Лебега функции Q.

Теорема 3. *Пусть D — область в $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$, и $Q\colon D \to (0, \infty)$ — измеримая функция такая, что при некотором положительном $\varepsilon(x_0) < \mathrm{dist}(x_0, \partial D)$*

$$\int\limits_0^{\varepsilon(x_0)} \frac{dr}{r q_{x_0}^{1/(n-1)}(r)} = \infty \qquad \forall\, x_0 \in D, \tag{3}$$

где $q_{x_0}(r)$ обозначает среднее значение функции $Q(x)$ над сферой $|x-x_0|=r$. Предположим, что f_m, $m=1,2,\ldots$, — последовательность кольцевых Q-гомеоморфизмов области D в $\mathbb{R}^n$, сходящаяся локально равномерно к отображению f относительно сферической метрики. Тогда f либо постоянно в $\overline{\mathbb{R}^n}$, либо является гомеоморфизмом D в $\mathbb{R}^n$.

Следствие 3. *В частности, заключение теоремы 3 справедливо, если*

$$q_{x_0}(r) = O\left(\log^{n-1}\frac{1}{r}\right) \qquad \forall\, x_0 \in D.$$

Следствие 4. *В обозначениях теоремы 3 отображение f является постоянным в $\overline{\mathbb{R}^n}$, либо гомеоморфизмом D в $\mathbb{R}^n$ при условии, что функция Q имеет только логарифмические особенности порядка не выше, чем $n-1$ в каждой точке $x_0\in D$.*

Теорема 4. *Пусть D — область в $\mathbb{R}^n$, $n\geqslant 2$, и $Q\colon D\to(0,\infty)$ — измеримая функция такая, что*

$$\int\limits_{\varepsilon<|x-x_0|<\varepsilon_0} \frac{Q(x)}{|x-x_0|^n}\,dm(x) = o\left(\log^n\frac{1}{\varepsilon}\right) \qquad \forall\, x_0\in D \tag{4}$$

при $\varepsilon\to 0$ и некотором положительном $\varepsilon_0=\varepsilon(x_0)<\operatorname{dist}(x_0,\partial D)$. Предположим, что f_m, $m=1,2,\ldots$, — последовательность кольцевых Q-гомеоморфизмов области D в $\mathbb{R}^n$, сходящаяся локально равномерно к отображению f относительно сферической метрики. Тогда предельное отображение f является либо постоянным в $\overline{\mathbb{R}^n}$, либо гомеоморфизмом области D в $\mathbb{R}^n$.

Теорема 5. *Пусть D — область в $\mathbb{R}^n$, $n\geqslant 2$, $Q\colon D\to(0,\infty)$ — измеримая функция и $\Phi\colon[0,\infty]\to[0,\infty]$ — неубывающая выпуклая функция такая, что*

$$\int\limits_D \Phi(Q(x))\frac{dm(x)}{(1+|x|^2)^n} < \infty \tag{5}$$

и при некотором $\delta>\Phi(0)$

$$\int\limits_{\delta}^{\infty} \frac{d\tau}{\tau[\Phi^{-1}(\tau)]^{1/(n-1)}} = \infty. \tag{6}$$

Предположим, что f_m, $m=1,2,\ldots$, — последовательность кольцевых Q-гомеоморфизмов области D в $\mathbb{R}^n$, сходящаяся локально равномерно к отображению f относительно сферической метрики. Тогда отображение f является либо постоянной в $\overline{\mathbb{R}^n}$, либо гомеоморфизмом области D в $\mathbb{R}^n$.

Следствие 5. *В частности, заключение теоремы 5 имеет место, как только*

$$\int\limits_D \frac{e^{\alpha Q^{1/(n-1)}(x)}}{(1+|x|^2)^n}\,dm(x) < \infty$$

при некотором $\alpha>0$.

3. О полноте кольцевых Q-гомеоморфизмов. Следующий результат был доказан ранее при $n=2$ в работе [8, теорема 4.1] (см. также [1, теорема 6.2]).

Теорема 6. *Пусть $f_m\colon D \to \mathbb{R}^n$, $m = 1, 2, \ldots,$ — последовательность кольцевых Q-гомеоморфизмов в точке $x_0 \in D$. Предположим, что f_m сходится локально равномерно к гомеоморфизму $f\colon D \to \mathbb{R}^n$ относительно сферической метрики. Тогда f также является кольцевым Q-гомеоморфизмом в точке x_0.*

4. О нормальных семействах кольцевых Q-гомеоморфизмов. Напомним, что семейство отображений называется нормальным, если из любой последовательности его элементов можно извлечь подпоследовательность, сходящуюся в области локально равномерно.

Для заданной области D в $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$, измеримой функции $Q\colon D \to (0, \infty)$ и числа $\Delta > 0$, обозначим символом $\mathfrak{F}_{Q,\Delta}$ класс всех кольцевых Q-гомеоморфизмов $f\colon D \to \mathbb{R}^n$ в точке x_0 таких, что $h(\overline{\mathbb{R}^n} \setminus f(D)) \geqslant \Delta$.

Замечание 2. Нами было установлено, что класс $\mathfrak{F}_{Q,\Delta}$ нормален как только выполнено хотя бы одно из условий на функцию Q из теорем 2–5 и следствий 2–5 (см. также соответствующие условия нормальности семейств в работах [3, 4]).

5. О компактности семейств кольцевых Q-гомеоморфизмов. Пусть задана область D в $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$, измеримая функция $Q\colon D \to (0, \infty)$ и две пары точек x_1, $x_2 \in D$, y_1, $y_2 \in \mathbb{R}^n$, $x_1 \neq x_2$, $y_1 \neq y_2$. Обозначим символом $\mathfrak{R}_Q$ класс всех кольцевых Q-гомеоморфизмов области D в $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$, удовлетворяющих условиям нормировки $f(x_1) = y_1$, $f(x_2) = y_2$.

Напомним, что семейство отображений называется компактным, если это семейство является нормальным и замкнутым. Объединяя сформулированные выше результаты о нормальности и замкнутости, получаем следующие результаты о компактности семейств кольцевых Q-гомеоморфизмов.

Теорема 7. *Класс $\mathfrak{R}_Q$ является компактным, если $Q \in FMO$.*

Следствие 6. *Класс $\mathfrak{R}_Q$ компактен, если*

$$\overline{\lim_{\varepsilon \to 0}} \ \fint_{B(x_0,\varepsilon)} Q(x)\, dm(x) < \infty \qquad \forall\, x_0 \in D.$$

Следствие 7. *Класс $\mathfrak{R}_Q$ компактен, если каждая точка $x_0 \in D$ является точкой Лебега функции Q.*

Теорема 8. *Пусть функция Q удовлетворяет условию*

$$\int\limits_0^{\varepsilon(x_0)} \frac{dr}{r q_{x_0}^{1/(n-1)}(r)} = \infty \qquad \forall\, x_0 \in D$$

при некотором $\varepsilon(x_0) < \operatorname{dist}(x_0, \partial D)$, где $q_{x_0}(r)$ — среднее значение функции $Q(x)$ над сферой $|x - x_0| = r$. Тогда класс $\mathfrak{R}_Q$ компактен.

Следствие 8. *Класс $\mathfrak{R}_Q$ компактен, если функция $Q(x)$ имеет лишь логарифмические особенности порядка не выше, чем $n - 1$ в каждой точке $x_0 \in D$.*

Теорема 9. *Класс $\mathfrak{R}_Q$ компактен, если условие*

$$\int\limits_{\varepsilon < |x - x_0| < \varepsilon_0} \frac{Q(x)}{|x - x_0|^n} dm(x) = o\left(\log^n \frac{1}{\varepsilon}\right) \qquad \forall\, x_0 \in D$$

выполнено при $\varepsilon \to 0$ для некоторого $\varepsilon_0 = \varepsilon(x_0) < \operatorname{dist}(x_0, \partial D)$.

Теорема 10. *Класс $\mathfrak{R}_Q$ компактен, если условие*

$$\int\limits_D \Phi(Q(x))\frac{dm(x)}{(1+|x|^2)^n} \leqslant M < \infty \tag{7}$$

выполнено для неубывающей выпуклой функции $\Phi\colon [0,\infty] \to [0,\infty]$ *такой, что*

$$\int\limits_{\delta}^{\infty} \frac{d\tau}{\tau[\Phi^{-1}(\tau)]^{1/(n-1)}} = \infty \tag{8}$$

при некотором $\delta > \Phi(0)$.

Заметим, что условие (8) является не только достаточным, но и необходимым условием нормальности и, следовательно, компактности класса $\mathfrak{R}_Q$ с интегральными ограничениями на Q типа (7) (см. [4]).

Следствие 9. *В частности, заключение теоремы 10 имеет место, если при некотором* $\alpha > 0$ *выполнено условие*

$$\int\limits_D \frac{e^{\alpha Q^{1/(n-1)}(x)}}{(1+|x|^2)^n}\, dm(x) \leqslant M < \infty.$$

Приведенные результаты будут иметь широкие приложения к теории сходимости и компактности гомеоморфизмов классов Соболева, а также более общих классов Орлича–Соболева, что будет рассмотрено отдельно.

1. *Gutlyanskii V. Ya., Ryazanov V. I., Srebro U., Yakubov E.* The Beltrami equation: A geometric approach, developments in mathematics. Vol. 26. – New York: Springer, 2012. – 301 p.
2. *Martio O., Ryazanov V., Srebro U., Yakubov E.* Moduli in modern mapping theory. – New York: Springer, 2009. – 367 p.
3. *Рязанов В. И., Севостьянов Е. А.* Равностепенно непрерывные классы кольцевых Q-гомеоморфизмов // Сиб. мат. журн. – 2007. – **48**, № 6. – С. 216–231.
4. *Рязанов В. И., Севостьянов Е. А.* Равностепенная непрерывность квазиконформных в среднем отображений // Там же. – 2011. – **52**, № 3. – С. 665–679.
5. *Gehring F. W.* Rings and quasiconformal mappings in space // Trans. Amer. Math. Soc. – 1962. – **103**. – P. 353–393.
6. *Bojarski B., Gutlyanskii V., Ryazanov V.* On Beltrami equations with two characteristics // Complex Variables and Elliptic Equations. – 2009. – **54**, No 10. – P. 933–950.
7. *Kolomoitsev Yu., Ryazanov V.* Uniqueness of approximate solutions of the Beltrami equations // Proc. Inst. Appl. Math. & Mech. NASU. – 2009. – **19**. – P. 116–124.
8. *Ryazanov V., Srebro U., Yakubov E.* On strong solutions of the Beltrami equations // Complex Variables and Elliptic Equations. – 2010. – **55**, No 1–3. – P. 219–236.
9. *Brakalova M., Jenkins J.* On solutions of the Beltrami equation II // Publ. Inst. Math. (Beograd) (N. S.). – 2004. – **75(89)**. – P. 3–8.
10. *Игнатьев А., Рязанов В.* Конечное среднее колебание в теории отображений // Укр. мат. вест. – 2005. – **2**, № 3. – С. 395–417.

Институт прикладной математики и механики НАН Украины, Донецк

Поступило в редакцию 06.11.2012

В. І. Рязанов, Є. О. Севостьянов

Про деякі питання збіжності та компактності просторових гомеоморфізмів

Доведено певні теореми збіжності для загальних просторових гомеоморфізмів і на цій основі отримано теореми збіжності та компактності для класів так званих кільцевих Q-гомеоморфізмів. Зокрема, встановлено, що клас кільцевих Q-гомеоморфізмів f в $\mathbb{R}^n$, який фіксує дві точки, є компактним за умови, що Q належить класу скінченного середнього коливання. Одержані результати матимуть широкі застосування до класів Соболева та більш загальних класів Орліча–Соболева.

V. I. Ryazanov, E. A. Sevost'yanov

About some problems of convergence and compactness of space homeomorphisms

Various theorems on convergence and compactness of the general space homeomorphisms are proved. On this basis, the theorems on convergence and compactness for classes of the so-called ring Q-homeomorphisms are obtained. In particular, it is shown that the class of ring Q-homeomorphisms in $\mathbb{R}^n$ fixing two points is compact provided that a function Q has a finite mean oscillation. These results will have a wide range of applications to the Sobolev classes, as well as to the more general Orlicz–Sobolev classes.