Доповіді
НАЦІОНАЛЬНОЇ
АКАДЕМІЇ НАУК
УКРАЇНИ

5 • 2013

МАТЕМАТИКА

УДК 517.5

Е. С. Афанасьева

Граничное поведение гомеоморфизмов в метрических пространствах

(Представлено членом-корреспондентом НАН Украины В. Я. Гутлянским)

Исследована проблема продолжения на границу так называемых кольцевых Q-гомеоморфизмов относительно p-модулей между областями в метрических пространствах с мерами. Сформулированы условия на функцию Q и границы областей, при которых всякий кольцевой Q-гомеоморфизм допускает непрерывное или гомеоморфное продолжение на границу. Полученные результаты ведут, в частности, к важным приложениям к фракталам в $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$.

В последнее время активно развивается теория так называемых Q-гомеоморфизмов. В работе [1] для квазиконформных отображений было получено модульное неравенство, которое впоследствии и легло в основу определения Q-гомеоморфизмов, введенных проф. Олли Мартио (Финляндия). В последние годы на плоскости и в пространстве также активно изучается более широкий класс кольцевых Q-гомеоморфизмов (см., например, [2]). Данное понятие было мотивировано кольцевым определением квазиконформности по Герингу в [3] и представляет собой обобщение и локализацию этого определения, которое впервые было введено и использовано для изучения вырожденных уравнений Бельтрами на плоскости в работе [4]. Теория граничного поведения всегда была наиболее трудной и интересной частью теории отображений (см., например, [2, 5] и приведенную там библиографию). В данной работе эта теория развивается для кольцевых Q-гомеоморфизмов относительно p-модуля в метрических пространствах.

Далее H^k, $k \in [0, \infty)$, обозначает *k-мерную меру Хаусдорфа* множества A в метрическом пространстве (X, d). Точнее $H^k(A) := \sup\limits_{\varepsilon>0} H^k_\varepsilon(A)$, $H^k_\varepsilon(A) := \inf \sum\limits_{i=1}^{\infty} (\operatorname{diam} A_i)^k$, где инфимум берется по всем покрытиям A множествами A_i с $\operatorname{diam} A_i < \varepsilon$ (см., например, [6]). Напомним, что $\operatorname{diam} A_i = \sup\limits_{x,y \in A_i} d(x, y)$. Как известно, если для некоторого множества A и $k_1 \geqslant 0$ выполнено условие $H^{k_1}(A) < \infty$, то $H^{k_2}(A) = 0$ для произвольного числа $k_2 > k_1$ (см., например, [6, гл. 7, разд. 1]). В связи с этим вводится величина $\dim_H A := \sup\limits_{H^k(A)>0} k$, которая называется *хаусдорфовой размерностью* множества A. Напомним, что топологическое пространство *связно*, если его нельзя разбить на два непустых открытых множества. Компактные связные пространства называются *континуумами*. В дальнейшем будем говорить, что континуум γ *k-спрямляем*, если его мера хаусдорфа H^k конечна. Под *обобщенной областью* в X будем понимать открытое связное множество. Обобщенная область D называется *локально связной в точке* $x_0 \in \partial D$, если для любой окрестности U точки x_0 найдется окрестность $V \subseteq U$ точки x_0 такая, что $V \bigcap D$ связно (ср. [7, с. 232]).

Фугледе рассматривал системы мер в абстрактном множестве $\mathcal{X}$ с фиксированной основной мерой (см., например, [8]). Нами будут рассмотрены системы борелевских мер, ассоциированных с континуумами в метрических пространствах (X, d). Именно, мера m_γ, ассоциированная с континуумом γ в (X, d), определяется для каждого борелевского множества B в (X, d) как хаусдорфова мера H^k пересечения $B \bigcap \gamma$ при фиксированном $k > 0$. Если Γ — семейство континуумов в (X, d), то через E_Γ будем обозначать систему мер m_γ, ассоциированных с $\gamma \in \Gamma$.

Пусть теперь (X, d, μ) — метрическое пространство с борелевой мерой μ. Неотрицательную μ-измеримую функцию $\rho\colon X \to [0, \infty]$ назовем *допустимой* для E_Γ, пишем $\rho \in \operatorname{adm} E_\Gamma$, если $\int\limits_X \rho\, dm_\gamma \geqslant 1$, $\forall\, \gamma \in \Gamma$. *$p$-модуль*, $0 < p < \infty$, семейства Γ континуумов γ в (X, d, μ) определим следующим образом:

$$M_p(\Gamma) = \inf_{\rho \in \operatorname{adm} E_\Gamma} \int\limits_X \rho^p(x)\, d\mu(x). \tag{1}$$

Здесь мы доопределяем $M_p(\Gamma) = +\infty$, если $E_\Gamma = \varnothing$.

В дальнейшем для любых множеств A, B и C в X через $\Gamma(A, B; C)$ обозначается семейство всех континуумов γ в (X, d), соединяющих A и B в C, т. е. таких, что $\gamma \bigcap A \neq \varnothing$, $\gamma \bigcap B \neq \varnothing$ и $\gamma \setminus \{A \bigcup B\} \subseteq C$. Полагаем также $B(x_0, r) = \{x \in X\colon d(x, x_0) < r\}$.

Пусть D и D' — обобщенные области в пространствах (X, d, μ) и (X', d', μ') соответственно, $Q\colon X \to (0, \infty)$ — μ-измеримая функция и $p \in (0, \infty)$. Говорят, что гомеоморфизм $f\colon D \to D'$ является *кольцевым Q-гомеоморфизмом в точке* $x_0 \in \overline{D}$ относительно p-модуля, если неравенство

$$M_p(\Gamma(f(C_0), f(C_1); D')) \leqslant \int\limits_{A \cap D} Q(x) \cdot \eta^p(d(x, x_0))\, d\mu(x) \tag{2}$$

выполняется для любого кольца $A = A(x_0, r_1, r_2)\colon = \{x \in X\colon r_1 < d(x, x_0) < r_2\}$, $x_0 \in X$, $0 < r_1 < r_2 < \infty$, любых двух континуумов $C_0 \subset \overline{B(x_0, r_1)} \bigcap D$ и $C_1 \subset D \setminus B(x_0, r_2)$ и любой борелевой функции $\eta\colon (r_1, r_2) \to [0, \infty]$ такой, что $\int\limits_{r_1}^{r_2} \eta(r)\, dr \geqslant 1$. Наконец, говорим, что гомеоморфизм $f\colon D \to D'$ есть *кольцевой Q-гомеоморфизм*, если f является кольцевым Q-гомеоморфизмом в каждой точке $x_0 \in \overline{D}$.

Напомним также, что пространство (X, d, μ) называется *α-регулярным по Альфорсу*, если существует постоянная $C \geqslant 1$ такая, что $C^{-1} r^\alpha \leqslant \mu(B_r) \leqslant C r^\alpha$ для всех шаров B_r в X радиуса $r < \operatorname{diam} X$. Как известно, α-регулярные пространства имеют хаусдорфову размерность α (см., например, [9, с. 61]). Пространство (X, d, μ) называется *регулярным по*

Альфорсу, если оно α-регулярно по Альфорсу для некоторого $\alpha \in (1, \infty)$. Говорят также, что пространство (X, d, μ) *α-регулярно сверху в точке* $x_0 \in X$, если существует постоянная $C > 0$ такая, что $\mu(B(x_0, r)) \leqslant Cr^\alpha$ для всех шаров $B(x_0, r)$ с центром в точке $x_0 \in X$ радиуса $r < r_0$. Будем также говорить, что пространство (X, d, μ) *регулярно сверху*, если предыдущее условие выполнено в каждой точке $x_0 \in X$ для некоторого $\alpha \in (1, \infty)$.

1. Предварительные замечания. Семейство континуумов Γ_1 из произвольного топологического пространства T *минорируется* семейством континуумов Γ_2 из T, пишут $\Gamma_2 > \Gamma_1$, если для каждого континуума $\gamma_1 \in \Gamma_1$ существует континуум $\gamma_2 \in \Gamma_2$ такой, что γ_2 является подконтинуумом γ_1.

Предложение 1. *Пусть Ω — открытое множество в топологическом пространстве T. Тогда $\Gamma(\Omega, \partial\Omega; \Omega) > \Gamma(\Omega, T \setminus \Omega; T)$.*

Из неравенства предложения 1 по [8, с. 178] получаем нижеследующее.

Следствие 1. *Для любого открытого множества Ω в T $M_p(\Gamma(\Omega, T \setminus \Omega; T)) < < M_p(\Gamma(\Omega, \partial\Omega; \Omega))$, $\forall\, p \in (0, \infty)$.*

Предложение 2. *Пусть γ — k-спрямляемый континуум в (X, d, μ), соединяющий точки $x_1 \in \overline{B(x_0, r_1)}$ и $x_2 \in X \setminus B(x_0, r_2)$, где $0 < r_1 < r_2 < \infty$, и пусть $\eta\colon [0, \infty] \to [0, \infty]$ — борелева функция. Тогда $\int\limits_\gamma \eta(d(x, x_0))\, dm_\gamma \geqslant \int\limits_{r_1}^{r_2} \eta(r)\, dr$.*

Аналогично [10], говорим, что граница обобщенной области D *слабо плоская в точке* $x_0 \in \partial D$ относительно p-модуля, $p \in (0, \infty)$, если для любого числа $P > 0$ и любой окрестности U точки x_0 найдется ее окрестность $V \subset U$ такая, что $M_p(\Gamma(E, F; D)) \geqslant P$ для любых континуумов E и F в D, пересекающих ∂U и ∂V. Также говорим, что граница обобщенной области D *сильно достижима* в точке $x_0 \in \partial D$ относительно p-модуля, $p \in \in (0, \infty)$, если для любой окрестности U точки x_0 найдется компакт $E \subset D$, окрестность $V \subset U$ точки x_0 и число $\delta > 0$ такие, что $M_p(\Gamma(E, F; D)) \geqslant \delta$ для любого континуума F в D, пересекающего ∂U и ∂V. Наконец, границу обобщенной области D называем *сильно достижимой* относительно p-модуля, $p \in (0, \infty)$, и *слабо плоской* относительно p-модуля, $p \in (0, \infty)$, если соответствующие свойства имеют место в каждой точке ее границы.

Предложение 3. *Если граница обобщенной области D слабо плоская в точке $x_0 \in \partial D$ относительно p-модуля, $p \in (0, \infty)$, то ∂D сильно достижима в точке x_0 относительно p-модуля.*

Лемма 1. *Пусть D — обобщенная область в (X, d, μ). Если ∂D слабо плоская в точке $x_0 \in \partial D$ относительно p-модуля, $p \in (0, \infty)$, то D локально связна в x_0.*

Следствие 2. *Области со слабо плоскими границами относительно p-модуля, $p \in \in (0, \infty)$, локально связны во всех точках границы.*

2. Функции конечного среднего колебания. Следуя [10], говорим, что функция $\varphi\colon X \to \mathbb{R}$ имеет *конечное среднее колебание в точке* $x_0 \in X$, сокр. $\varphi \in FMO(x_0)$, если

$$\overline{\lim_{\varepsilon \to 0}} \quad \fint\limits_{B(x_0, \varepsilon)} |\varphi(x) - \widetilde{\varphi}_\varepsilon|\, d\mu(x) < \infty, \tag{3}$$

где $\widetilde{\varphi}_\varepsilon = \fint\limits_{B(x_0,\varepsilon)} \varphi(x)\, d\mu(x) = \dfrac{1}{\mu(B(x_0, \varepsilon))} \int\limits_{B(x_0,\varepsilon)} \varphi(x)\, d\mu(x)$ — среднее значение функции $\varphi(x)$ по шару $B(x_0, \varepsilon) = \{x \in X\colon d(x, x_0) < \varepsilon\}$ относительно меры μ. Здесь условие (3) включает предположение, что φ интегрируема относительно меры μ по некоторому шару $B(x_0, \varepsilon)$, $\varepsilon > 0$.

Предложение 4. *Если для некоторого набора чисел* $\varphi_\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$,

$$\overline{\lim_{\varepsilon\to 0}} \frac{1}{\mu(B(x_0,\varepsilon))} \int\limits_{B(x_0,\varepsilon)} |\varphi(x) - \varphi_\varepsilon|\, d\mu(x) < \infty, \tag{4}$$

то $\varphi \in FMO(x_0)$.

Следствие 3. *В частности, если*

$$\overline{\lim_{\varepsilon\to 0}} \frac{1}{\mu(B(x_0,\varepsilon))} \int\limits_{B(x_0,\varepsilon)} |\varphi(x)|\, d\mu(x) < \infty,$$

то $\varphi \in FMO(x_0)$.

Варианты следующей леммы из [10] были сначала доказаны для BMO функций и внутренних точек области D в $\mathbb{R}^n$ при $n = 2$ и $n \geqslant 3$ соответсвенно, а затем для граничных точек D в $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$, с условием удвоения меры и FMO функций (см. историю вопроса более подробно в [2, гл. 13]).

Лемма 2. *Пусть пространство* (X, d, μ) p*-регулярно сверху с* $p \geqslant 2$ *в точке* x_0 *и*

$$\mu(B(x_0, 2r)) \leqslant \gamma \log^{p-2} \frac{1}{r} \mu(B(x_0, r)) \qquad \forall\, r \in (0, r_0). \tag{5}$$

Тогда для любой неотрицательной функции $\varphi \colon X \to \mathbb{R}$ *класса* $FMO(x_0)$ *при* $\varepsilon \to 0$ *и некотором* $\varepsilon_0 \in (0, \delta_0)$ *выполнено*

$$\int\limits_{A(x_0,\varepsilon,\varepsilon_0)} \frac{\varphi(x) d\mu(x)}{\left(d(x,x_0) \log \dfrac{1}{d(x,x_0)}\right)^p} = O\left(\log\log \frac{1}{\varepsilon}\right),$$

где $\delta_0 = \min(e^{-e}, d_0)$, $d_0 := \sup\limits_{x\in D} d(x, x_0)$, $A(x_0, \varepsilon, \varepsilon_0) = \{x \in X \colon \varepsilon < d(x, x_0) < \varepsilon_0\}$.

Замечание 1. Отметим, что условие (5) слабее *условия удвоения меры* μ:

$$\mu(B(x_0, 2r)) \leqslant \gamma \mu(B(x_0, r)) \qquad \forall\, r \in (0, r_0), \tag{6}$$

которое использовалось ранее в контексте $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$, в работе [11] (см. также [2, секция 6.2]). Заметим также, что условие (6) автоматически выполняется, если X регулярно по Альфорсу.

3. Продолжение на границу обратных отображений. Здесь $C(x_0, f)$ обозначает предельное множество отображения f в точке x_0, т. е. $C(x_0, f) \colon = \{x' \in X' \colon x' = \lim\limits_{n\to\infty} f(x_n),$ $x_n \to x_0,\ x_n \in D\}$.

Лемма 3. *Пусть* $f \colon D \to D'$ — *кольцевой* Q*-гомеоморфизм относительно* p*-модуля,* $p \in (0, \infty)$, *с* $Q \in L^1_\mu(D)$. *Если обобщенная область* D *локально связна в точках* x_1 *и* $x_2 \in \partial D$, $x_1 \neq x_2$, *а* D' *имеет слабо плоскую границу относительно* p*-модуля,* $p \in (0, \infty)$, *то* $C(x_1, f) \bigcap C(x_2, f) = \varnothing$.

По лемме 3 получаем, в частности, следующее заключение.

Теорема 1. *Пусть обобщенная область* D *локально связна во всех своих граничных точках и* $\overline{D}$ — *компакт, обобщенная область* D' *имеет слабо плоскую границу относительно* p*-модуля,* $p \in (0, \infty)$, *а* $f \colon D \to D'$ — *кольцевой* Q*-гомеоморфизм относительно*

p-модуля, $p \in (0, \infty)$, с $Q \in L^1_\mu(D)$. Тогда обратное отображение $g = f^{-1}\colon D' \to D$ допускает непрерывное продолжение $\overline{g}\colon \overline{D'} \to \overline{D}$.

Замечание 2. Известно (см. пример предложения 6.3 в [2]), что никакая сколь угодно высокая степень интегрируемости Q в D не гарантирует продолжения прямых отображений на границу.

4. Продолжение на границу прямых отображений.

Лемма 4. *Пусть обобщенная область D локально связна в точке $x_0 \in \partial D$, $\overline{D'}$ — компакт, а $f\colon D \to D'$ — кольцевой Q-гомеоморфизм в x_0 относительно p-модуля, $p \in (0, \infty)$, такой, что $\partial D'$ сильно достижима относительно p-модуля, $p \in (0, \infty)$, хотя бы в одной точке предельного множества $C(x_0, f)$, $Q\colon X \to (0, \infty)$ — μ-измеримая функция, удовлетворяющая условию*

$$\int\limits_{\varepsilon<d(x,x_0)<\varepsilon_0} Q(x)\psi^p_{x_0,\varepsilon}(d(x,x_0))\,d\mu(x) = o(I^p_{x_0,\varepsilon_0}(\varepsilon)) \tag{7}$$

при $\varepsilon \to 0$ для некоторого $\varepsilon_0 \in (0, d(x_0))$, где $d(x_0) := \sup\limits_{x\in D} d(x, x_0)$ и $\psi_{x_0,\varepsilon}(t)$ — семейство неотрицательных измеримых (по Лебегу) функций на $(0, \infty)$ таких, что

$$0 < I_{x_0,\varepsilon_0}(\varepsilon)\colon = \int\limits_{\varepsilon}^{\varepsilon_0} \psi_{x_0,\varepsilon}(t)\,dt < \infty \qquad \forall\,\varepsilon \in (0, \varepsilon_0), \qquad \varepsilon_0 \in (0, d(x_0)). \tag{8}$$

Тогда f продолжим в точку x_0 по непрерывности в (X', d').

Следствие 4. *В частности, если*

$$\varlimsup_{\varepsilon\to 0} \int\limits_{\varepsilon<d(x,x_0)<\varepsilon_0} Q(x)\psi^p(d(x,x_0))\,d\mu(x) < \infty, \tag{9}$$

где $\psi(t)$ — неотрицательная измеримая функция на $(0, \infty)$ такая, что $I(\varepsilon, \varepsilon_0) := \int\limits_{\varepsilon}^{\varepsilon_0} \psi(t)\,dt < \infty$, $\forall\,\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$, и $I(\varepsilon, \varepsilon_0) \to \infty$ при $\varepsilon \to 0$, то кольцевой Q-гомеоморфизм $f\colon D \to D'$ продолжим в точку x_0 по непрерывности в (X', d').

Замечание 3. Другими словами, достаточно, чтобы сингулярный интеграл в (9) сходился в точке x_0 хотя бы для одного ядра ψ с неинтегрируемой особенностью в нуле. Более того, как показывает лемма 4, достаточно, чтобы указанный интеграл даже расходился, но с контролируемой скоростью: $\int\limits_{\varepsilon<d(x,x_0)<\varepsilon_0} Q(x)\psi^p(d(x,x_0))\,d\mu(x) = o(I^p(\varepsilon, \varepsilon_0))$.

Выбирая в лемме 4 $\psi(t) \equiv 1/t$, приходим к следующей теореме.

Теорема 2. *Пусть D локально связна в точке $x_0 \in \partial D$, $\partial D'$ сильно достижима относительно p-модуля, $p \in (0, \infty)$, и $\overline{D'}$ компактно. Если измеримая функция $Q\colon X \to (0, \infty)$ удовлетворяет условию*

$$\int\limits_{\varepsilon<d(x,x_0)<\varepsilon_0} \frac{Q(x)d\mu(x)}{d(x,x_0)^p} = o\left(\left[\log\frac{1}{\varepsilon}\right]^p\right) \tag{10}$$

при $\varepsilon \to 0$ для некоторого $\varepsilon_0 < d(x_0)\colon = \sup\limits_{x\in D} d(x, x_0)$, то любой кольцевой Q-гомеоморфизм относительно p-модуля, $p \in (0, \infty)$, $f\colon D \to D'$ продолжим в точку x_0 по непрерывности в (X', d').

Следствие 5. *В частности, заключение теоремы остается в силе, если сингулярный интеграл в* (10) *сходится в окрестности точки* x_0.

Комбинируя леммы 2 и 4, выбирая $\psi_\varepsilon(t) \equiv t\log(1/t)$, $t \in (0, \delta_0)$, приходим к следующему результату.

Теорема 3. *Пусть X p-регулярно сверху в точке $x_0 \in \partial D$, $p \geqslant 2$, где D локально связна и удовлетворяет условию* (5), *а $\partial D'$ сильно достижима относительно p-модуля, $p \in (0, \infty)$, и $\overline{D'}$ компактно. Если $Q \in FMO(x_0)$, то любой кольцевой Q-гомеоморфизм относительно p-модуля, $p \in (0, \infty)$, $f\colon D \to D'$ продолжим в точку x_0 по непрерывности в (X', d').*

Комбинируя теорему 3 и следствие 3, получаем следующее заключение.

Следствие 6. *В частности, если*

$$\overline{\lim_{\varepsilon\to 0}}\frac{1}{\mu(B(x_0,\varepsilon))}\int\limits_{B(x_0,\varepsilon)} Q(x)\,d\mu(x) < \infty, \tag{11}$$

то любой кольцевой Q-гомеоморфизм относительно p-модуля, $p \in (0, \infty)$, $f\colon D \to D'$ продолжим в точку x_0 по непрерывности в (X', d').

5. Гомеоморфное продолжение на границу. Комбинируя результаты предыдущих двух пунктов, получаем следующие теоремы.

Теорема 4. *Пусть D и D' имеют слабо плоские границы относительно p-модуля, $p \in (0, \infty)$, $\overline{D}$ и $\overline{D'}$ компактны и пусть $Q\colon X \to (0, \infty)$ — функция класса $L^1_\mu(D)$, для которой выполнено условие* (10) *$p \in (0, \infty)$, в каждой точке $x_0 \in \partial D$ для некоторого $\varepsilon_0 = \varepsilon(x_0) < d(x_0)\colon = \sup\limits_{x\in D} d(x, x_0)$. Тогда любой кольцевой Q-гомеоморфизм относительно p-модуля, $p \in (0, \infty)$, $f\colon D \to D'$ допускает продолжение до гомеоморфизма $\overline{f}\colon \overline{D} \to \overline{D'}$.*

Следствие 7. *В частности, заключение теоремы имеет место, если сингулярный интеграл в* (10) *сходится в окрестности каждой точки $x_0 \in \partial D$.*

Теорема 5. *Пусть D — область в p-регулярном сверху пространстве (X, d, μ), $p \geqslant 2$, которая локально связна на границе и удовлетворяет условию* (5) *во всех граничных точках, D' — область со слабо плоской границей относительно p-модуля, $p \in (0, \infty)$, в пространстве (X', d', μ'), а $\overline{D}$ и $\overline{D'}$ компактны. Если функция $Q\colon X \to (0, \infty)$ имеет конечное среднее колебание во всех граничных точках области D, то любой кольцевой Q-гомеоморфизм относительно p-модуля, $p \in (0, \infty)$, $f\colon D \to D'$ продолжим до гомеоморфизма $\overline{f}\colon \overline{D} \to \overline{D'}$.*

Следствие 8. *В частности, заключение теоремы имеет место, если* (11) *имеет место $\forall\, x_0 \in \partial D$.*

1. *Bishop C. J., Gutlyanskii V. Ya., Martio O., Vuorinen M.* On conformal dilatation in space // Int. J. Math. Math. Sci. – 2003. – **22**. – P. 1397–1420.
2. *Martio O., Ryazanov V., Srebro U., Yakubov E.* Moduli in modern mapping theory. – New York: Springer, 2009. – 367 p.
3. *Gehring F. W.* Rings and quasiconformal mappings in space // Trans. Amer. Math. Soc. – 1962. – **103**. – P. 353–393.
4. *Ryazanov V., Srebro U., Yakubov E.* On ring solutions of Beltrami equation // J. Anal. Math. – 2005. – **96**. – P. 117–150.
5. *Gutlyanskii V., Ryazanov V., Srebro U., Yakubov E.* The Beltrami equation: A geometric approach, developments in mathematics. Vol. 26. – New York: Springer, 2012. – 301 p.
6. *Гуревич В., Волмэн Г.* Теория размерности. – Москва: Изд-во иностр. лит., 1948. – 232 с.

7. *Куратовский К.* Топология. Т. 2. – Москва: Мир, 1969. – 624 с.
8. *Fuglede B.* Extremal length and functional completion // Acta Math. – 1957. – **98**. – P. 171–219.
9. *Heinonen J.* Lectures on analysis on metric spaces. – New York: Springer, 2001. – 151 p.
10. *Рязанов В. И., Салимов Р. Р.* Слабо плоские границы и пространства в теории отображений // Укр. мат. вест. – 2007. – **4**, № 2. – С. 199–234.
11. *Игнатьев А. А., Рязанов В. И.* Конечное среднее колебание в теории отображений // Там же. – 2005. – **2**, № 3. – С. 395–417.

Институт прикладной математики
и механики НАН Украины, Донецк

Поступило в редакцию 06.11.2012

О. С. Афанасьєва

Гранична поведінка гомеоморфізмів у метричних просторах

Досліджено проблему продовження на межу так званих кільцевих Q-гомеоморфізмів відносно p-модулів між областями у метричних просторах із мірами. Сформульовано умови на функцію Q та межі областей, при яких усякий кільцевий Q-гомеоморфізм допускає неперервне або гомеоморфне продовження на межу. Отримані результати ведуть, зокрема, до важливих застосувань до фракталів у $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$.

O. S. Afanas'eva

Boundary behavior of homeomorphisms in metric spaces

The problem of extension to the boundary of the so-called ring Q-homeomorphisms with respect to p-moduli between domains in metric spaces with measures is investigated. Conditions on the function Q and boundaries of domains, under which every ring Q-homeomorphism admits a continuous or homeomorphic extension to the boundary, are formulated. The obtained results lead, in particular, to important applications to fractals in $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$.