УДК 539.3

Член-кореспондент НАН України **Г. С. Кіт, О. В. Галазюк**

Плоска деформація тіла зі стрічковою пеленою теплових джерел або диполів

Визначення стаціонарного температурного поля із стрічковою пеленою теплових джерел або диполів зведено до розв'язання інтегральних рівнянь першого роду і запропоновано метод знаходження множини його розв'язків. За відомим температурним полем і рівняннями термопружності у переміщеннях знайдено вирази компонент вектора пружного переміщення та компонент тензора температурних напружень через інтеграли Фур'є.

При визначенні двовимірного стаціонарного температурного поля і зумовленої ним плоскої деформації тіла при тепловиділенні у стрічковій області шириною $2L$ використовують інтегральні подання комплексних потенціалів температури, що дає можливість зводити задачі термопружності до сингулярних інтегральних рівнянь з ядром Коші [1, 2]. У роботі [3] показано, що дійсна і уявна частини інтеграла типу Коші є, відповідно, логарифмічні потенціали подвійного та простого шарів. При цьому для зникання логарифмічного потенціалу простого шару на нескінченності слід вимагати рівності нулю інтеграла по відрізку $2L$ від його густини. При постановці таких задач постулюється відсутність джерел тепла поза межами області тепловиділення, що призводить до коренево-сингулярного розподілу потоків тепла на її краю.

Нижче запропоновано нову постановку і метод розв'язання плоских задач стаціонарної теплопровідності та термопружності для тіла з тонким стрічковим тепловидільним або теплоізольованим включенням. Стрічкові неоднорідності в межах цієї постановки змодельовані стрічковою пеленою джерел тепла або теплових диполів, а зумовлене ними температурне поле визначене розв'язками інтегральних рівнянь першого роду. При додаткових некласичних умовах серед множини розв'язків цих рівнянь завжди існує розв'язок, який виконує фізично зумовлену вимогу неперервності теплових потоків на краю неоднорідності.

Розв'язок рівнянь термопружності зі стрічковою пеленою джерел тепла. В однорідному пружному просторі введемо декартову систему координат $L\alpha$, $L\beta$, $L\gamma$ з початком у площині $\gamma = 0$ і вважатимемо, що у тілі під дією двовимірного температурного поля реалізується стан плоскої деформації. У цьому випадку векторне рівняння квазістатичної термопружності

$$(\lambda + 2\mu)\,\mathrm{grad}\,\theta - \mu\,\mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\,\mathbf{u} = \alpha_T(3\lambda + 2\mu)\,\mathrm{grad}\,T$$

у декартовій системі координат зведемо до двох рівнянь в частинних похідних

$$k^2\partial_\alpha\theta + 2\partial_\gamma\omega_\beta = \alpha_T(3k^2-4)\partial_\alpha T, \qquad k^2\partial_\gamma\theta - 2\partial_\alpha\omega_\beta = \alpha_T(3k^2-4)\partial_\gamma T \tag{1}$$

стосовно інваріантних величин

$$\theta(\alpha,\gamma) = \mathrm{div}\,\mathbf{u} = \partial_\alpha u_\alpha + \partial_\gamma u_\gamma, \qquad 2\omega_\beta(\alpha,\gamma) = (\mathrm{rot}\,u)_\beta = \partial_\gamma u_\alpha - \partial_\alpha u_\gamma. \tag{2}$$

Тут $k^2 = (\lambda+2\mu)/\mu = 2(1-\nu)/(1-2\nu)$, де λ і μ — сталі Ламе; ν — коефіцієнт Пуассона; α_T — коефіцієнт лінійного теплового розширення; Lu_α і Lu_γ — компоненти вектора пружного переміщення $\mathbf{u}$ у напрямку осей α і γ відповідно; ∂_α і ∂_γ — оператори диференціювання за змінними α і γ.

Систему рівнянь (1) розщеплюємо на два незалежні рівняння

$$\Delta\theta^T = \beta_T \Delta T, \qquad \Delta\omega_\beta^T = 0 \tag{3}$$

відносно ключових функцій $\theta^T(\alpha,\gamma)$ і $\omega_\beta^T(\alpha,\gamma)$, де Δ — оператор Лапласа в декартовій системі координат; $\beta_T = \alpha_T k^{-2}(3k^2-4)$. Часткові розв'язки рівнянь (3) такі:

$$\theta^T(\alpha,\gamma) = \beta_T T(\alpha,\gamma), \qquad \omega_\beta^T(\alpha,\gamma) = 0. \tag{4}$$

Увівши формулами

$$u_\alpha^T(\alpha,\gamma) = \partial_\alpha P^T(\alpha,\gamma), \qquad u_\gamma^T(\alpha,\gamma) = \partial_\gamma P^T(\alpha,\gamma) \tag{5}$$

термопружний потенціал переміщень $P^T(\alpha,\gamma)$, на основі співвідношень (2) і (4) одержимо рівняння Пуассона

$$\Delta P^T = \beta_T T(\alpha,\gamma). \tag{6}$$

Нехай у площині $\gamma = 0$ розподілені джерела тепла за законом

$$W(\alpha,p) = 2T_0 \int\limits_0^\infty \eta[G(\eta,p)\sin\eta\alpha + H(\eta,p)\cos\eta\alpha]\,d\eta, \tag{7}$$

де твірні функції $G(\eta,p)$ і $H(\eta,p)$ з параметром p визначають антисиметричну та симетричну за змінною α складові функції $W(\alpha,p)$, $T_0 = W_0 L/\lambda_T$ — множник із розмірністю температури; λ_T — коефіцієнт теплопровідності. Розв'язок рівняння стаціонарної теплопровідності з розподіленими у площині $\gamma = 0$ джерелами тепла

$$\Delta T = -\delta(\gamma) W(\alpha,p),$$

де $\delta(\gamma)$ — дельта-функція Дірака, є таким:

$$T(\alpha,\gamma) = T_0 \int\limits_0^\infty e^{-\eta|\gamma|} K(\eta,p,\alpha)\,d\eta. \tag{8}$$

Тут

$$K(\eta,p,\alpha) = G(\eta,p)\sin\eta\alpha + H(\eta,p)\cos\eta\alpha. \tag{9}$$

Відзначимо, що, відповідно до подання (8), похідна

$$\partial_\gamma T = -T_0 \operatorname{sign}\gamma \int\limits_0^\infty \eta e^{-\eta|\gamma|} K(\eta,p,\alpha)\,d\eta$$

має стрибок при переході площини $\gamma = 0$ по нормалі до неї.

Розв'язок рівняння (6) з правою частиною (8)

$$P^T(\alpha,\gamma) = -0{,}5\beta_T T_0 \int_0^{\infty} \eta^{-2}(1+\eta|\gamma|)e^{-\eta|\gamma|}K(\eta,p,\alpha)\,d\eta.$$

За формулами (5) знаходимо температурні переміщення

$$\begin{aligned} &u_\alpha^T(\alpha,\gamma) = -0{,}5\beta_T T_0 \int_0^{\infty} \eta^{-2}(1+\eta|\gamma|)e^{-\eta|\gamma|}\partial_\alpha K(\eta,p,\alpha)\,d\eta,\\ &u_\gamma^T(\alpha,\gamma) = 0{,}5\beta_T\gamma T(\alpha,\gamma). \end{aligned} \tag{10}$$

За відомими компонентами (10) вектора переміщення і співвідношеннями Дюамеля–Неймана визначаємо компоненти тензора напружень. Зокрема,

$$\begin{aligned} &\sigma_{\gamma\gamma}^T(\alpha,\gamma) = -\mu\beta_T\left[T(\alpha,\gamma) + T_0|\gamma|\int_0^{\infty}\eta e^{-\eta|\gamma|}K(\eta,p,\alpha)\,d\eta\right],\\ &\sigma_{\alpha\gamma}^T(\alpha,\gamma) = \mu\beta_T T_0\gamma\int_0^{\infty} e^{-\eta|\gamma|}\partial_\alpha[K(\eta,p,\alpha)]\,d\eta,\\ &\sigma_{\alpha\alpha}^T(\alpha,\gamma) + \sigma_{\beta\beta}^T(\alpha,\gamma) + \sigma_{\gamma\gamma}^T(\alpha,\gamma) = -4\mu\beta_T T(\alpha,\gamma). \end{aligned} \tag{11}$$

Отже, за довільним законом (7) розподілу джерел тепла, у площині $\gamma = 0$ відсутні нормальні переміщення і дотичні напруження, тому формули (10) і (11) дають розв'язки задачі термопружності для півпростору з гладко закріпленою межею. Нормальні напруження $\sigma_{\alpha\alpha}^T(\alpha,\pm0)$, $\sigma_{\beta\beta}^T(\alpha,\pm0)$ і $\sigma_{\gamma\gamma}^T(\alpha,\pm0)$ у цій площині пропорційні температурі і є стискальними.

Розв'язок рівнянь термопружності зі стрічковою пеленою теплових диполів. Якщо у площині $\gamma = 0$ розподілені теплові диполі за законом

$$D(\alpha,p) = 2T_0\int_0^{\infty}[G(\eta,p)\sin\eta\alpha + H(\eta,p)\cos\eta\alpha]\,d\eta,$$

то температурне поле визначається розв'язком рівняння Пуассона

$$\Delta T = -\delta'(\gamma)D(\alpha,\beta),$$

де $\delta'(\gamma)$ — похідна від дельта-функції Дірака, і є таким:

$$T(\alpha,\gamma) = T_0\operatorname{sign}\gamma\int_0^{\infty} e^{-\eta|\gamma|}K(\eta,p,\alpha)\,d\eta. \tag{12}$$

Таким чином, при розподілі у площині $\gamma = 0$ стрічкової пелени теплових диполів температурне поле (12) має стрибок при переході цієї площини по нормалі до неї. Тому в цьому випадку площина $\gamma = 0$ є поверхнею розриву параметрів поля нульового порядку — тепловим вихором [5], який обмежений поверхнями $\gamma = \pm0$.

Розв'язок рівняння (6) з урахуванням виразу (12) запишемо так:

$$P^T(\alpha,\gamma) = -0{,}5\beta_T T_0\gamma \int\limits_0^\infty \eta^{-1} e^{-\eta|\gamma|} K(\eta,p,\alpha)\,d\eta.$$

Тому за формулами (5) знаходимо компоненти вектора переміщення

$$\begin{aligned} u_\alpha^T(\alpha,\gamma) &= -0{,}5\beta_T T_0\gamma \int\limits_0^\infty \eta^{-1} e^{-\eta|\gamma|} \partial_\alpha K(\eta,p,\alpha)\,d\eta, \\ u_\gamma^T(\alpha,\gamma) &= -0{,}5\beta_T \left\{ T_0 \int\limits_0^\infty \eta^{-1} e^{-\eta|\gamma|} K(\eta,p,\alpha)\,d\eta - \gamma T(\alpha,\gamma) \right\}, \end{aligned} \tag{13}$$

а за співвідношеннями Дюамеля–Неймана знаходимо компоненти тензора напружень

$$\begin{aligned} \sigma_{\gamma\gamma}^T(\alpha,\gamma) &= -\beta_T\mu T_0\gamma \int\limits_0^\infty \eta e^{-\eta|\gamma|} K(\eta,p,\alpha)\,d\eta, \\ \sigma_{\alpha\gamma}^T(\alpha,\gamma) &= -\mu\beta_T T_0 \int\limits_0^\infty \eta^{-1}(1-\eta|\gamma|) e^{-\eta|\gamma|} \partial_\alpha K(\eta,p,\alpha)\,d\eta, \\ \sigma_{\alpha\alpha}^T(\alpha,\gamma) &+ \sigma_{\beta\beta}^T(\alpha,\gamma) + \sigma_{\gamma\gamma}^T(\alpha,\gamma) = -4\mu\beta_T T(\alpha,\gamma). \end{aligned} \tag{14}$$

З формул (13) і (14) випливає, що радіальні переміщення і нормальні напруження у площині $\gamma = 0$ відсутні, тому цими формулами описується напружено-деформований стан півпростору, межа якого закріплена гнучкою нерозтяжною плівкою.

Приклад температурного поля у тілі зі стрічковою пеленою теплових диполів. Нехай у стрічковій області $0 \leqslant |\alpha| \leqslant 1$ задана нормальна складова $q_\gamma^*(\alpha,\pm 0) = C - f(\alpha^2)$ безрозмірного вектора $\vec{q}^{\,*} = L\vec{q}/\lambda_T T_0$ теплового потоку, де C — стала величина. Тоді, згідно з рівняннями балансу $\operatorname{div}\vec{q}^{\,*} = 0$ за температурним полем (12), його складова $q_\gamma^*(\alpha,\gamma)$ у напрямку осі γ визначається так:

$$q_\gamma^*(\alpha,\gamma) = \int\limits_0^\infty \eta H(\eta,p) e^{-\eta|\gamma|} \cos\eta\alpha d\eta.$$

Тому для визначення твірної функції $H(\eta,p)$ одержимо інтегральне рівняння першого роду

$$\int\limits_0^\infty \eta H(\eta,p)\cos\eta\alpha d\eta = C - f(\alpha^2), \qquad 0 \leqslant |\alpha| \leqslant 1, \tag{15}$$

яке після диференціювання за змінною α набуде вигляду

$$\int\limits_0^\infty \eta^2 H(\eta,p)\sin\eta\alpha d\eta = 2\alpha f'(\alpha^2). \tag{16}$$

Якщо функцію $H(\eta, p)$ подати узагальненим рядом Неймана

$$\eta^2 H(\eta, p) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{J_{2n-p+2,5}(\eta)}{\eta^{p-0,5}}, \qquad p > 0{,}5, \tag{17}$$

то рівняння (16) після обчислення розривного інтеграла Фур'є [6] стає рядом

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{\sqrt{\pi}\Gamma(n+1)\Gamma(n-p+2{,}5)}{2^p\Gamma(n+3)\Gamma(n+0{,}5)} P_n^{(-0,5;2-p)}(1-2\alpha^2) = f'(\alpha^2), \qquad 0 \leqslant |\alpha| \leqslant 1,$$

за поліномами Якобі [7]. Тому коефіцієнти a_n обчислюють за формулою ортогональності і за ними сталу C в рівнянні (15) знаходимо за формулою

$$C = f(0) + \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{\sqrt{\pi}\Gamma(p)\Gamma(n-p+1{,}5)}{2^{p+1}\Gamma(n+2)\Gamma(n+1{,}5)\Gamma(-n+p-1)}.$$

При цьому розподіл диполів, які обумовлюють заданий тепловий потік, визначається розривним інтегралом Фур'є

$$D(\alpha, p) = 2T_0 \sum_{n=0}^{\infty} a_n \int\limits_0^{\infty} \frac{J_{2n-p+2,5}(\eta)}{\eta^{p+1,5}} \cos \eta\alpha d\eta. \tag{18}$$

Цей закон розподілу є неперервним у точці $|\alpha| = 1$ і зникає на нескінченності, якщо

$$0 \leqslant p \leqslant 0{,}5. \tag{19}$$

При виконанні цієї нерівності стрибок температури при $\gamma = \pm 0$, що утворює тепловий вихор, неперервно поширюється у відповідності із теоремою Гельмгольца про збереження вихорів [8] в область $1 \leqslant |\alpha| < \infty$. Отже, параметр p можна трактувати як певну теплофізичну характеристику теплового шару, який утворений тепловим вихором і обмежений поверхнями $\gamma = \pm 0$.

Якщо тепловий вихор не поширюється в область $1 < |\alpha| < \infty$, то параметр $p = -0{,}5$ і теплові потоки

$$q_\alpha^*(\alpha, \pm 0) = \pm \sum_{n=0}^{\infty} a_n \int\limits_0^{\infty} J_{2n+3}(\eta) \sin \eta\alpha d\eta,$$

$$q_\gamma^*(\alpha, \pm 0) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \int\limits_0^{\infty} J_{2n+3}(\eta) \cos \eta\alpha d\eta \tag{20}$$

мають в точках $|\alpha| = \pm 1$ сингулярний розподіл із класичною кореневою особливістю. Дійсно, обчисливши розривні інтеграли Фур'є [6] у поданнях (20), знаходимо, що в області $0 \leqslant |\alpha| < 1$

$$q_\alpha^*(\alpha, \pm 0) = \pm \frac{\alpha}{\sqrt{1-\alpha^2}} \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{\Gamma(n+2{,}5)\Gamma(-n-1; n+2; 1{,}5; \alpha^2)}{\Gamma(n+1{,}5)\Gamma(n+0{,}5)},$$

$$q_\gamma^*(\alpha, \pm 0) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \Gamma(n+2, -n-1; 0{,}5; \alpha^2) = C - f(\alpha^2),$$

а в області $1 < |\alpha| < \infty \quad q_\alpha^*(\alpha, \pm 0) = 0,$

$$q_\gamma^*(\alpha, \pm 0) = \pm \frac{\sqrt{\pi}\,\mathrm{sign}\,\alpha}{\sqrt{\alpha^2 - 1}} \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{\Gamma(n+2)\Gamma(n+2; n+1{,}5; 2n+4; \alpha^{-2})}{\Gamma(2n+4)\Gamma(-n-1{,}5)|\alpha|^{2n+3}}.$$

При цьому $D(\alpha; -0{,}5) = 0$ в області $1 \leqslant |\alpha| < \infty$.

1. *Кит Г. С., Кривцун М. Г.* Плоские задачи термоупругости для тел с трещинами. – Киев: Наук. думка, 1983. – 280 с.
2. *Сулим Г. Т.* Основи математичної теорії термопружної рівноваги деформівних твердих тіл з тонкими включеннями. – Львів: Дослідно-видавн. центр НТШ. – 2007. – 716 с.
3. *Гахов Ф. Д.* Краевые задачи – Москва: Наука, 1977. – 638 с.
4. *Трусделл К.* Первоначальный курс рациональной механики сплошных сред. – Москва: Мир, 1975. – 592 с.
5. *Кіт Г. С., Галазюк В. А.* Осесиметричний напружено-деформований стан тіла з плоскою пеленою теплових джерел // Доп. НАН України. – 2011. – № 10. – С. 54–60.
6. *Градштейн И. С., Рыжик И. М.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. – Москва: Наука, 1963. – 1100 с.
7. *Абрамовиц М., Стиган И.* Справочник по специальным функциям – Москва: Наука, 1979. – 832 с.
8. *Лойцянский Л. Г.* Механика жидкости и газа – Москва: Наука, 1973. – 847 с.

Інститут прикладних проблем механіки
і математики ім. Я. С. Підстригача
НАН України, Львів
Фізико-механічний інститут ім. Г. В. Карпенка
НАН України, Львів

Надійшло до редакції 10.04.2012

Член-корреспондент НАН Украины **Г. С. Кит, О. В. Галазюк**

Плоская деформация тела с ленточной пеленой тепловых источников или диполей

Определение стационарного температурного поля с ленточной пеленой тепловых источников или диполей сведено к решению интегральных уравнений первого рода и предложен метод нахождения множества его решений. По известному температурному полю и уравнению термоупругости в перемещениях найдены выражения компонент вектора упругого перемещения и компонент тензора температурных напряжений через интегралы Фурье.

Corresponding Member of the NAS of Ukraine **H. S. Kit, O. V. Halazyuk**

Plane deformation of a body with a band sheet of thermal sources or dipoles

The determination of the stationary temperature field in a body with a band sheet of thermal sources or dipoles is reduced to the solution of an integral equation of the first type. The method of determination of a set of solutions of this equation is proposed. The components of the elastic displacement vector and the temperature stress tensor are found in terms of Fourier integrals with regard for the known temperature field and the thermoplasticity equation.