УДК 519.854

В. О. Михайлюк

Поліноміальна порогова реоптимізація задач про узагальнену виконуваність з предикатами обмеженої розмірності

(Представлено академіком НАН України І. В. Сергієнком)

При виконанні унікальної ігрової гіпотези (UGC) для розв'язання задачі Ins-Max-EkCSP-P (реоптимізація Max-EkCSP-P при додаванні довільного обмеження) при $k = \mathrm{const}$ *існує поліноміальний оптимальний (пороговий)* $\psi(\alpha_Z)$*-наближений алгоритм, де* $\psi(\alpha_Z) = 2 - 1/\alpha_Z$ *і* α_Z *— цілочисловий розрив напіввизначеної (SDP) релаксації Max-EkCSP-P задачі* Z*.*

У задачах про узагальнену виконуваність (CSP задачах) є множина змінних і множина обмежень (вони задаються предикатами), кожне з яких залежить від деякого числа змінних. Більш формально, CSP задача Q задається множиною предикатів над скінченною областю $[q] = \{1, \ldots, q\}$. Кожен екземпляр цієї задачі складається з множини змінних V і множини обмежень на них. Задача полягає у знаходженні такого приписування значень змінним, які виконують (задовольняють) максимальне число обмежень. У загальному випадку предикати можуть бути замінені дійсними платіжними функціями, і задача полягає в максимізації загального платежу. Велика кількість оптимізаційних задач, таких як Max-Cut і Max-k-Sat, є прикладами CSP задач. Більшість задач про узагальнену виконуваність є NP-складними і їх точне розв'язання за допустимий час навряд чи можливе. Тому розглядаються ефективні наближені алгоритми розв'язання таких задач. Кажуть, що для задачі максимізації алгоритм є C-наближеним, якщо за допомогою нього для довільного екземпляра знаходиться розв'язок із значенням цільової функції, не меншим, ніж $(1/C) \cdot OPT$, де OPT — глобальний оптимум. При цьому C називають відношенням апроксимації.

Вважається, що для задачі Q встановлена верхня оцінка відношення апроксимації C, якщо існує поліноміальний C-наближений алгоритм її розв'язання. Для цієї задачі встановлена нижня оцінка відношення апроксимації c, якщо для довільного $\varepsilon > 0$ не існує поліноміального наближеного алгоритму її розв'язання, на якому досягається відношення апроксимації $c-\varepsilon$. Якщо $C = c$, то для задачі Q встановлено поріг відношення апроксимації $C = c$. Відповідний алгоритм називається оптимальним, або пороговим.

Задача встановлення нижніх оцінок відношення апроксимації (як і довільна задача отримання нижніх оцінок складності) є дуже важкою. Для неї існує назва неапроксимованість або складність апроксимації. Значний вплив на розвиток методів одержання нижніх оцінок мали відома PCP теорема [1] і дискретний аналіз Фур'є для тестування властивостей задач [2].

Починаючи з роботи [3], що стосується задачі Max-Cut, напіввизначене програмування (SDP) стало основним інструментом у побудові наближених алгоритмів для CSP задач. Для багатьох задач побудовані SDP релаксації і застосовуються відповідні процедури ймовірнісного округлення отриманих розв'язків.

Проблема неапроксимованості була успішно розв'язана для багатьох задач завдяки PCP теоремі. Зокрема, Хастад [5] показав, що Max-E3-Lin-2 і Max-3-Sat є NP-складними для апроксимації з відношеннями $2-\varepsilon$ і $8/7-\varepsilon$ відповідно. Це означає, що найпростіший випадковий алгоритм приписування є найкращим (оптимальним) для цих задач, якщо $P \neq NP$, або що відношення 2 і 8/7 є пороговими. Таким чином, іноді випадковий алгоритм приписування є оптимальним. Задачі (зокрема і предикати), для яких це має місце, називають апроксимаційно-стійкими.

Останнім часом встановлено тісний зв'язок між поняттями апроксимаційне відношення, відношення неапроксимованості та цілочисловий розрив простої SDP релаксації (що визначається як максимальне відношення значення SDP розв'язку до значення оптимуму). Унікальна ігрова гіпотеза (UGC) була введена Кхотом [7] як можливий спосіб одержання нових сильних результатів з неапроксимованості. Її можна сформулювати в термінах унікальної ігрової задачі, UGC є посиленням PCP теореми. Якщо виходити з UGC, отримаємо неапроксимованість, основану на UGC, або умовну неапроксимованість.

З істинності UGC випливає, що проста SDP релаксація дає оптимальне відношення апроксимації для CSP задачі. Вперше зв'язок між схемами округлення для SDP релаксації і результатами з неапроксимованості, що випливають з UGC, було встановлено в [9] для булевих CSP задач від двох змінних.

Поняття реоптимізації [10, 11] полягає в наступному. Нехай Q — деяка NP-складна (можливо NP-повна) задача, I — її початковий екземпляр, оптимальний розв'язок якого відомий. Пропонується новий екземпляр I' задачі Q, отриманий деякими незначними змінами екземпляра I. Мета реоптимізації при використанні наближених методів — застосування знань про розв'язок початкового екземпляра I для досягнення кращої якості наближення (апроксимаційного відношення) екземпляра I'.

У [11] встановлено порогове відношення апроксимації для задачі Ins-Max-EkCSP-P (реоптимізація Max-EkCSP-P) з апроксимаційно-стійкими предикатами P. У даній роботі досліджується відношення апроксимації оптимальних наближених алгоритмів реоптимізації задач про узагальнену виконуваність з предикатами обмеженої розмірності, які не є апроксимаційно-стійкими.

Основні означення і позначення [5, 12]. Під предикатом P розмірності k розумітимемо відображення $P\colon \{-1,1\}^k \to \{0,1\}$. Для зручності позначень вхідні дані зі значенням -1 інтерпретуємо як "істина", зі значенням 1 — як "хибність". Якщо предикат P набуває вхідного значення y, то $P(y)=1$, інакше — $P(y)=0$. Таким чином, множина значень, що приймається предикатом P, позначається як $P^{-1}(1)$. Літерал — це булева змінна або її заперечення.

Означення 1. Нехай $P\colon \{-1,1\}^k \to \{0,1\}$ — предикат. Екземпляр задачі Max-CSP-P складається з m обмежень з вагами, кожне з яких є k-кортеж літералів $(z_{i_1},\ldots,z_{i_k})$ з множини $\{x_1,\ldots,x_n,\overline{x}_1,\ldots,\overline{x}_n\}$. Всі змінні в цьому кортежі вважаються різними. Обмеження виконано тоді і тільки тоді, коли P приймає цей кортеж. Розв'язком екземпляра є приписування значень істинності до $\{x_1,\ldots,x_n\}$. Значення розв'язку є $\sum\limits_{i=1}^{m} P(z_{i_1},\ldots,z_{i_k})$, де w_i — невід'ємна вага i-го обмеження. Задача полягає в максимізації цього значення. Коли P залежить не більше ніж від k літералів Max-CSP-P, будемо називати Max-kCSP-P, якщо в P є k літералів, то — Max-EkCSP-P.

Нехай $w_{\mathrm{opt}}(I)$ — значення оптимального розв'язку екземпляра I.

Означення 2. Алгоритм A є C-наближеним для задачі максимізації, якщо для всіх екземплярів I задачі $w(A, I) \geqslant (1/C)\, w_{\text{opt}}(I)$, де $w(A, I)$ — значення розв'язку алгоритму A на вході I. При цьому кажуть, що A має апроксимаційне відношення C. Для ймовірнісних алгоритмів $w(A, I)$ — очікуване значення (математичне сподівання).

Введемо предикат $XOR(x_1, x_2) = x_1 \oplus x_2$. В подальшому як приклад будемо розглядати задачу Max-Cut.

Означення 3 (Max-Cut). Для даного неорієнтованого графу $G = (V, E)$ із множинами вершин V і ребер E Max-Cut є задачею знаходження розбиття $C = (V_1, V_2)$ вершин $V(V = V_1 \bigcup V_2, V_1 \bigcap V_2 = \varnothing)$, яке максимізує число елементів множини $(V_1 \times V_2) \bigcap E$. Для заданої вагової функції $w\colon E \to R^+$ Max-Cut зважена задача полягає в максимізації $\sum e \in (V_1 \times V_2) \bigcap E^{w(e)}$.

Розглянемо більш детально задачу Max-Cut. Для графу $G = (V, E)$ ця задача (максимальний розріз в графі) визначається так: знайти таке розбиття множини вершин V на підмножини V_1 і V_2, щоб максимізувати число ребер, які утворюють розріз. Якщо кожній вершині поставити у відповідність булеву змінну $x_i (x_i = 1, i \in V_1, x_i = -1, i \in V_2)$, то дану задачу можна розглядати як Max-E2CSP-XOR або Max-E2-LIN з рівняннями вигляду $x_i x_j = -1$.

Поліноміальні оптимальні (порогові) наближені алгоритми для Max-EkCSP-P задач. Визначимо цілочисловий розрив α_{MC} SDP релаксації Max-Cut: $\alpha_{MC} = \sup\limits_G \left\{\dfrac{SDP(G)}{OPT(G)}\right\}$, де $SDP(G)$ — оптимум релаксації. У роботах [4, 6] показано, що $\alpha_{MC} = \dfrac{\pi}{2} \dfrac{1 - \cos\theta_c}{\theta_c} \approx 1{,}138$ (θ_c — "критичний кут", на якому досягається максимум).

Розглянемо довільну невиважену Max-EkCSP-P задачу Z (означення 1, всі ваги дорівнюють 1). Нехай $V = \{x_1, \ldots, x_n, \overline{x}_1, \ldots, \overline{x}_n\}$ — множина змінних, E — множина обмежень. Обмеження $e \in E$ позначимо як $e = (x_{e_1}, \ldots, x_{e_k}), e_i \in [2n]$ зі спеціальним порядком на змінні (відносно V). Приписування є відображення $\rho\colon V \to \{0, 1\}$, відображення виконує обмеження e, якщо $P(\rho(x_{e_1}), \ldots, \rho(x_{e_k})) = 1$. Позначимо $OPT(I)$ оптимальний розв'язок для екземпляра I задачі Z. Нехай $SDP(I)$ — оптимум напіввизначеної релаксації (SDP релаксації) Рагхавендри [12]. Визначимо цілочисловий розрив $\alpha_Z = \sup\limits_{I \in Z} \left\{\dfrac{SDP(I)}{OPT(I)}\right\}$. У [13] показано, як округлити розв'язок і знайти приписування з апроксимаційним відношенням, близьким до α_Z. Результат Рагхавендри [12] в даному випадку можна навести у вигляді теореми.

Теорема 1 [8]. *Припустимо, існує екземпляр I^* Max-EkCSP-P задачі Z такий, що $SDP(I) \geqslant c$ й $OPT(I) \leqslant s (\alpha_Z = c/s)$. Тоді для будь-якого $\gamma > 0$ існують $\varepsilon, \delta > 0$ і поліноміальна зведеність від екземпляра унікальної ігрової задачі до екземпляра I задачі Z така, що:*

(випадок-так): якщо $OPT(U) \geqslant 1 - \varepsilon$, то $OPT(I) \geqslant c - \gamma$;

(випадок-ні): якщо $OPT(U) \leqslant \delta$, то $OPT(I) \leqslant s + \gamma$.

Зокрема, припускаючи UGC є NP-складним, апроксимувати Z з відношенням, строго меншим α_Z.

Наслідок. *Для будь-якої Max-EkCSP-P задачі Zпри виконанні UGC існує поліноміальний пороговий (оптимальний) α_Z-наближений алгоритм.*

Зауважимо, що теорема 1 трансформує цілочисловий розрив у розрив неапроксимованості. Цінність результату Рагхавендри полягає в тому, що навіть не знаючи явно точного значення цілочислового розриву, можна встановити оптимальність відповідного поліноміального наближеного алгоритму (використовуючи екземпляри цілочислового розриву).

Поліноміальні оптимальні (порогові) наближені алгоритми для реоптимізації Max-EkCSP-P задач. Розглянемо довільну невиважену Max-EkCSP-P задачу Z (означення 1).

Нехай $V = \{x_1, \ldots, x_n, \overline{x}_1, \ldots, \overline{x}_n\}$ — множина змінних, екземпляр I задачі Z такий, що $E = \{e^{(1)}, \ldots, e^{(m)}\}$ — множина з m обмежень. Обмеження $e^{(j)} \in E$ позначимо як $e^{(j)} = (x_{e_1^{(j)}}, \ldots, x_{e_k^{(j)}}), e_i^{(j)} \in [2n](1 \leqslant j \leqslant m, 1 \leqslant i \leqslant k)$ зі спеціальним порядком на змінні (відносно V). Екземпляр I' задачі отримується з екземпляра I додаванням довільного $(m+1)$-го обмеження $e^{(m+1)}$ (такої самої структури, як і $e^{(j)}, 1 \leqslant j \leqslant m$). Визначимо реоптимізаційний варіант задачі Max-EkCSP-P.

Задача Ins-Max-EkCSP-P. Вхідні дані. Довільний екземпляр I задачі Max-EkCSP-P, x^* — оптимальний розв'язок екземпляра I.

Результат. Знайти оптимальний розв'язок екземпляра I' (отриманого, виходячи з I, як описано вище) задачі Max-EkCSP-P, використовуючи x^*.

Мета. Знайти x, яке максимізує число виконаних обмежень екземпляра I'.

Оскільки задача Max-EkCSP-P є NP-складною, то можна показати, що такою буде і Ins-Max-EkCSP-P.

Теорема 2. *Якщо $k = O(\log n)$ і для задачі Max-EkCSP-P існує поліноміальний ρ-наближений алгоритм, то для задачі Ins-Max-EkCSP-P (реоптимізація Max-EkCSP-P) існує поліноміальний $\psi(\rho)$-наближений алгоритм, де $\psi(\rho) = 2 - 1/\rho$.*

Теорема 3. *Нехай для задачі Max-EkCSP-P існує поліноміальний оптимальний (пороговий) ρ-наближений алгоритм, а для задачі Ins-Max-EkCSP-P (реоптимізація Max-EkCSP-P) — поліноміальний γ-наближений алгоритм, тоді $\gamma \geqslant \psi(\rho)$.*

Теорема 4. *Якщо для задачі Max-EkCSP-P існує поліноміальний оптимальний (пороговий) ρ-наближений алгоритм і $k = O(\log n)$, то для задачі Ins-Max-EkCSP-P (реоптимізація Max-EkCSP-P) існує поліноміальний оптимальний (пороговий) $\psi(\rho)$- наближений алгоритм, де $\psi(\rho) = 2 - 1/\rho$.*

Теорема 5. *Припустимо, що має місце унікальна ігрова гіпотеза UGC. Нехай Z — довільна невиважена Max-EkCSP-P задача з цілочисловим розривом $\alpha_Z = \sup\limits_{I \in Z} \left\{ \dfrac{SDP(I)}{OPT(I)} \right\}$ і $k = \mathrm{const}$. Тоді для задачі Ins-Max-EkCSP-P (реоптимізація Max-EkCSP-P) існує поліноміальний оптимальний (пороговий) $\psi(\alpha_Z)$-наближений алгоритм, де $\psi(\alpha_Z) = 2 - 1/\alpha_Z$.*

Приклад. Розглянемо задачу Max-Cut. В наших позначеннях це буде задача Max-E2CSP-XOR, а реоптимізаційний варіант — задача Ins-Max-E2CSP-XOR, отримана додаванням довільного ребра до Max-Cut. Згідно з [4, 6], цілочисловий розрив SDP релаксації задачі Max-Cut дорівнює $\alpha_{MC} = \dfrac{\pi}{2} \dfrac{1 - \cos\theta_c}{\theta_c} \approx 1{,}138$. Тоді з теореми 5 випливає

Теорема 6. *Якщо має місце унікальна ігрова гіпотеза UGC, то для задачі Ins-Max-E2CSP-XOR (реоптимізація Max-Cut) існує поліноміальний оптимальний (пороговий) $\psi(\alpha_{MC})$-наближений алгоритм, де $\psi(\alpha_{MC}) = 2 - 1/\alpha_{MC} \approx 1{,}121$.*

Таким чином, результати цієї роботи істотно залежать від істинності унікальної ігрової гіпотези UGC. Поряд із задачами взаємовідношень класів складності задач за включенням (наприклад, $P \overset{?}{\neq} NP$) це одна з основних відкритих проблем сучасної теоретичної інформатики.

1. *Arora S., Lund C., Motwani R. et al.* Proof verification and intractability of approximation problems // J. of the ACM. – 1998. – **45**, No 3. – P. 501–555.
2. *Goldreich O., Goldwasser S., Ron D.* Property testing and its connection to learning and approximation abstract // Ibid. – 1998. – **45**, No 4. – P. 653–750.
3. *Goemans M. X., Williamson D. P.* Improved approximation algorithms for maximum cut and satisfiability problems using semidefinite programming // Ibid. – 1995. – **42**. – P. 1115–1145.
4. *Goemans M. X., Williamson D. P.* P. 0.878 approximation algorithms for MAX-CUT and MAX-2SAT // STOC. – 1994. – P. 422–431.
5. *Hastad J.* Some optimal inapproximability results // J. of the ACM. – 2001. – **48**, No 4. – P. 798–859.
6. *Feige U., Schechtman G.* On the integrality ratio of semidefinite relaxations of max cut // STOC. – 2001. – P. 433–442.
7. *Khot S.* On the power of unique 2-prover 1-round games // Ibid. – 2002. – P. 767–775.
8. *Khot S.* On the unique games conjecture // Proc. of the 25-th Annual IEEE Conf. on Computational Complexity. – 2010. – P. 99–121.
9. *Khot S., Kindler G., Mossel E., O'Donnell R.* Optimal inapproximability results for Max-Cut and other 2-variable CSPs? // FOCS. – 2004. – P. 146–154.
10. *Archetti C., Bertazzi L., Speranza M. G.* Reoptimizing the travelling salesman problem // Networks. – 2003. – **42**(**3**). – P. 154–159.
11. *Михайлюк В. А., Сергиенко И. В.* Реоптимизация обобщенных задач о выполнимости с аппроксимационно-устойчивыми предикатами // Кибернетика и систем. анализ. – 2012. – **47**, № 1. – С. 89–104.
12. *Raghavendra P.* Optimal algorithms and inapproximability results for every csp? // Proc. ACM Symp. on the Theory of Computing (STOC). – 2008. – P. 245–254.
13. *Raghavendra P., Steurer D.* How to round any csp? // Proc. Annual IEEE Symposium on Foundations of Computer Science (FOCS). – 2009. – P. 586–594.

Інститут кібернетики ім. В. М. Глушкова
НАН України, Київ

Надійшло до редакції 21.05.2012

В. А. Михайлюк

Полиномиальная пороговая реоптимизация задач об обобщенной выполнимости с предикатами ограниченной размерности

При выполнении уникальной игровой гипотезы для решения задачи Ins-Max-EkCSP-P (реоптимизация Max-EkCSP-P при добавлении произвольного ограничения) при $k = \mathrm{const}$ существует полиномиальный оптимальный (пороговый) $\psi(\alpha_Z)$-приближенный алгоритм, где $\psi(\alpha_Z) = 2 - 1/\alpha_Z$ и α_Z — целочисленный разрыв полуопределенной (SDP) релаксации Max-EkCSP-P задачи Z.

V. O. Mikhailyuk

Polynomial threshold reoptimization of generalized satisfiability problems with bounded arity predicates

When the unique game conjecture is hold for the problem Ins-Max-EkCSP-P (reoptimization of Max-EkCSP-P under insertion of any constraint), an polynomial optimal (threshold) $\psi(\alpha_Z)$-approximation algorithm exists, where $\psi(\alpha_Z) = 2 - 1/\alpha_Z$, $k = \mathrm{const}$, and α_Z is the integrality gap of a semidefinite relaxation of the Max-EkCSP-P problem Z.