УДК 519.85

В. В. Семкин, А. М. Чугай

Нормализованная Ф-функция сферических сегментов

(Представлено членом-корреспондентом НАН Украины Ю. Г. Стояном)

Для аналитического описания отношений включения, пересечения и касания двух сферических сегментов строится нормализованная Ф-функция. Данная функция может быть использована для математического моделирования задач оптимального размещения трехмерных объектов, образованных с помощью произвольных сферических сегментов.

Теория Ф-функций [1, 2] позволила создать фундаментальные основы построения адекватных математических моделей задач размещения геометрических объектов. Целью данной работы является построение нормализованной Ф-функции сферических сегментов.

Рассмотрим следующие типы сегментов:

$$\breve{G} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \colon x^2 + y^2 + (z - \tau)^2 \leqslant \rho^2, z \leqslant 0\},$$

$$G = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \colon x^2 + y^2 + (z + \tau)^2 \leqslant \rho^2, -z \leqslant 0\},$$

где $\tau = \rho - w$, w — высота сегмента. Обозначим через S_i шар, с помощью которого образован сегмент G_i (или $\breve{G}_i$). Радиус окружности в основании сегмента G_i (или $\breve{G}_i$) обозначим через $r_i = w_i\sqrt{\dfrac{2}{w_i}\rho_i - 1}$, а сечения S_i и G_i плоскостью YOZ — через S_i^* и G_i^* соответственно, $i = 1, 2$. Сегменты допускают лишь аффинные преобразования трансляции. Сегмент G_i (или $\breve{G}_i$), транслированный на вектор $u_i = (x_i, y_i, z_i)$, обозначим $G_i(u_i)$ (или $\breve{G}_i(u_i)$).

Построим нормализованную Ф-функцию для $\breve{G}_1$ и G_2. Координаты точки P на S_1^*, в которой касательная к S_1^* совпадает с касательной к S_2^* в точке $(y_2 - r_2, z_2)$, равны $\left(\rho_1\dfrac{r_2}{\rho_2}, \rho_1\left(\dfrac{\tau_1}{\rho_1} - \dfrac{\tau_2}{\rho_2}\right)\right)$. Введем функцию $f(\nu) = \dfrac{\tau_1}{\rho_1} - \dfrac{\tau_2}{\rho_2}$, где $\nu = (\nu_1, \nu_2)$, $\nu_i = (\rho_i, w_i)$, $i = 1, 2$, значение которой будет определять вид искомой Ф-функции. Рассмотрим следующие случаи.

1. Если $f(\nu) > 0$, то $P \notin \breve{G}_1^*$ и сечение плоскостью YOZ поверхности d-уровня Ф-функции для $\breve{G}_1(0, 0, 0)$ и $G_2(0, y_2, z_2)$ будет иметь вид, представленный на рис. 1.

Введем следующие функции:

$$\omega_1(x, y, z) = \sqrt{\left(\sqrt{x^2 + y^2} - R_{12}\right)^2 + z^2};$$

$$\omega_2(x, y, z) = \sqrt{\left(\sqrt{x^2 + y^2} - r_1\right)^2 + (z - \tau_2)^2} - \rho_2;$$

$$\theta_1(x, y, z) = \frac{r_2}{w_2}\sqrt{x^2 + y^2} + z - \frac{r_2}{w_2}R_{12};$$

$$\theta_2(x, y, z) = \frac{2}{k}\left(\left(\frac{r_1}{\rho_1} + \frac{r_2}{\rho_2}\right)\sqrt{x^2 + y^2} - \left(\frac{\tau_1}{\rho_1} + \frac{\tau_2}{\rho_2}\right)z - \left(\frac{r_1}{\rho_1} + \frac{r_2}{\rho_2}\right)R_{12}\right),$$

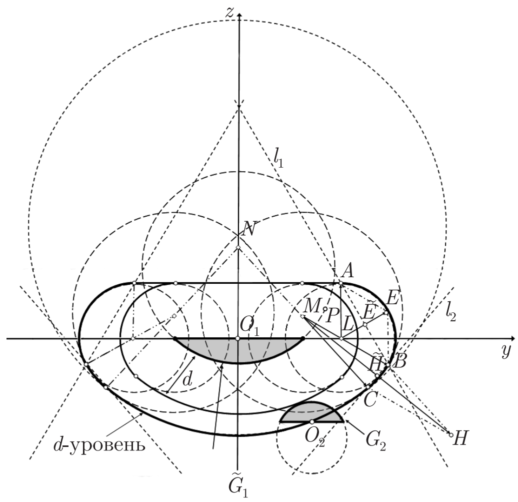

Рис. 1. Сечение поверхности d-уровня Ф-функции для $\breve{G}_1(0,0,0)$ и $G_2(0,y_2,z_2)$ при $f(\nu)>0$

где

$$k=\left(\frac{r_1}{\rho_1}+\frac{r_2}{\rho_2}\right)^2+\left(\frac{\tau_1}{\rho_1}+\frac{\tau_2}{\rho_2}\right)^2, \qquad R_{12}=r_1+r_2.$$

Для определения коэффициентов функции $\theta_1(x,y,z)$ осуществим следующие построения. Вначале построим нормальное уравнение прямой l_1, проходящей через точки с координатами $A(R_{12},d)$ и $B\left(R_{12}+d\dfrac{r_2}{\rho_2},-d\dfrac{\tau_2}{\rho_2}\right)$ (рис. 1). Поскольку $L(R_{12},0)$, то $LE=LA+LB=$ $=d\left(\dfrac{r_2}{\rho_2},\dfrac{w_2}{\rho_2}\right)$, где $LA=(0,d)$ и $LB=d\left(\dfrac{r_2}{\rho_2},-\dfrac{\tau_2}{\rho_2}\right)$, и $\|LE\|=d\sqrt{\dfrac{2w_2}{\rho_2}}$. Поэтому нормальное уравнение прямой l_1 будет иметь вид

$$\frac{r_2}{\sqrt{2\rho_2 w_2}}y+\frac{w_2}{\sqrt{2\rho_2 w_2}}z+\widehat{C}=0.$$

Далее, $L\widetilde{E}=d\cos\dfrac{\mu_1}{2}$, $\cos\mu_1=-\dfrac{\tau_2}{\rho_2}$, $\cos\dfrac{\mu_1}{2}=\sqrt{\dfrac{1+\cos\mu_1}{2}}=\dfrac{w_2}{\sqrt{2\rho_2 w_2}}$, где $\mu_1=\angle ALB$, $\dfrac{\mu_1}{2}=\angle ALE$. Поэтому $d=\dfrac{L\widetilde{E}}{\cos(\mu_1/2)}$. Отсюда коэффициенты $\widetilde{A}$, $\widetilde{B}$, $\widetilde{C}$ в уравнении конуса $\theta_1(x,y,z)=\widetilde{A}\sqrt{x^2+y^2}+\widetilde{B}z-\widetilde{C}=0$ равны $\widetilde{A}=\dfrac{r_2}{\sqrt{2\rho_2 w_2}}\dfrac{\sqrt{2\rho_2 w_2}}{w_2}=\dfrac{r_2}{w_2}$, $\widetilde{B}=$ $=\dfrac{w_2}{\sqrt{2\rho_2 w_2}}\dfrac{\sqrt{2\rho_2 w_2}}{w_2}=1$. Коэффициент $\widetilde{C}=\dfrac{r_2}{w_2}R_{12}+1\cdot 0=\dfrac{r_2}{w_2}R_{12}$ получается из необходимости прохождения прямой l_1 на 0-уровне через точку $(R_{12},0)$.

Аналогичным образом определяются коэффициенты функции $\theta_2(x,y,z)$. Для этого строится нормальное уравнение прямой l_2, проходящей через точки с координатами $B\left(R_{12}+d\dfrac{r_2}{\rho_2},-d\dfrac{\tau_2}{\rho_2}\right)$ и $C\left(r_1+(\rho_2+d)\dfrac{r_1}{\rho_1},\tau_2-(\rho_2+d)\dfrac{\tau_1}{\rho_1}\right)$ (см. рис. 1). Так как $M(r_1,\tau_2)$ и $MH=MB+MC$, то $MH=(\rho_2+d)\left(\dfrac{r_1}{\rho_1}+\dfrac{r_2}{\rho_2},-\left(\dfrac{\tau_1}{\rho_1}+\dfrac{\tau_2}{\rho_2}\right)\right)$, где $MC=(\rho_2+d)\left(\dfrac{r_1}{\rho_1},-\dfrac{\tau_1}{\rho_1}\right)$

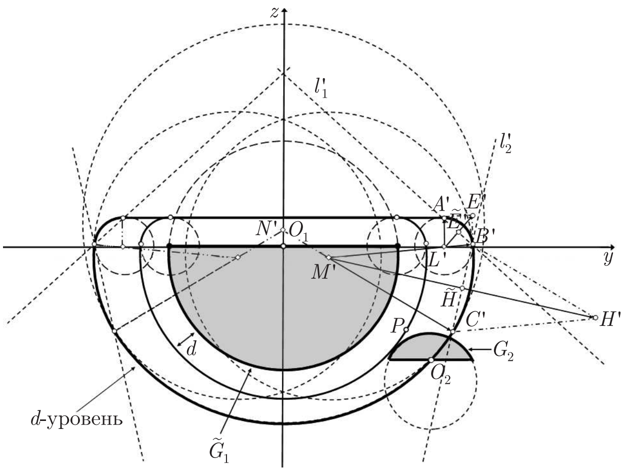

Рис. 2. Сечение поверхности d-уровня Ф-функции для $\breve{G}_1(0,0,0)$ и $G_2(0,y_2,z_2)$ при $f(\nu)<0$

и $MB=(\rho_2+d)\left(\dfrac{r_2}{\rho_2},-\dfrac{\tau_2}{\rho_2}\right)$, $\|MH\|=(\rho_2+d)\sqrt{\left(\dfrac{r_1}{\rho_1}+\dfrac{r_2}{\rho_2}\right)^2+\left(\dfrac{\tau_1}{\rho_1}+\dfrac{\tau_2}{\rho_2}\right)^2}=(\rho_2+d)c$, $c=\sqrt{k}$. Отсюда нормальное уравнение прямой l_2 примет вид

$$\frac{1}{c}\left(\left(\frac{r_1}{\rho_1}+\frac{r_2}{\rho_2}\right)y-\left(\frac{\tau_1}{\rho_1}+\frac{\tau_2}{\rho_2}\right)z+\widehat{C}\right)=0.$$

Далее, $M\widetilde{H}=(\rho_2+d)\cos\dfrac{\mu_2}{2}$, $\cos\mu_2=\dfrac{r_1}{\rho_1}\dfrac{r_2}{\rho_2}+\dfrac{\tau_1}{\rho_1}\dfrac{\tau_2}{\rho_2}=\dfrac{c^2}{2}-1$, $\cos\dfrac{\mu_2}{2}=\sqrt{\dfrac{1+\cos\mu_2}{2}}=\dfrac{c}{2}$, где $\mu_2=\angle BMC$, $\dfrac{\mu_2}{2}=\angle BMH$. Поэтому $\rho_2+d=\dfrac{MH'}{\cos(\mu_2/2)}$. Отсюда коэффициенты в уравнении конуса равны $\widetilde{A}=\dfrac{2}{k}\left(\dfrac{r_1}{\rho_1}+\dfrac{r_2}{\rho_2}\right)$, $\widetilde{B}=-\dfrac{2}{k}\left(\dfrac{\tau_1}{\rho_1}+\dfrac{\tau_2}{\rho_2}\right)$. Коэффициент $\widetilde{C}=$ $=\dfrac{2}{k}\left(\dfrac{r_1}{\rho_1}+\dfrac{r_2}{\rho_2}\right)R_{12}$ получается из необходимости прохождения прямой l_2 на 0-уровне через точку $(R_{12},0)$.

Положим

$$\varphi_i(x,y,z)=\min\{\theta_i(x,y,z),\omega_i(x,y,z)\},\qquad i=1,2;$$
$$\varphi_3(x,y,z)=\sqrt{x^2+y^2+(z-(\tau_1+\tau_2))^2}-(\rho_1+\rho_2);\qquad \varphi_4(x,y,z)=z.$$

Очевидно, если $\vartheta(x,y,z)=\max\limits_{i=1,2,3,4}\varphi_i(x,y,z)>0$, то $\breve{G}_1\bigcap G_2=\varnothing$. Тогда нормализованная Ф-функция сегментов $\breve{G}_1(u_1)$ и $G_2(u_2)$ для случая $f(\nu)>0$ примет вид $\Phi^{\breve{G}G}(u_1,u_2)=$ $=\vartheta(u_2-u_1)$.

2. Если $f(\nu)<0$, то $P\in\breve{G}_1^*$ и сечение плоскостью YOZ поверхности d-уровня Ф-функции для $\breve{G}_1(0,0,0)$ и $G_2(0,y_2,z_2)$ будет иметь вид, представленный на рис. 2.

Введем следующие функции:

$$\omega_1'(x,y,z)=\sqrt{\left(\sqrt{x^2+y^2}-R_{12}\right)^2+z^2};$$

$$\omega_2'(x,y,z)=\sqrt{\left(\sqrt{x^2+y^2}-r_2\right)^2+(z-\tau_1)^2}-\rho_1;$$

$$\theta_1'(x,y,z)=\frac{r_1}{w_1}\sqrt{x^2+y^2}+z-\frac{r_1}{w_1}R_{12};$$

$$\theta_2'(x,y,z)=\frac{2}{k}\left(\left(\frac{r_1}{\rho_1}+\frac{r_2}{\rho_2}\right)\sqrt{x^2+y^2}-\left(\frac{\tau_1}{\rho_1}+\frac{\tau_2}{\rho_2}\right)z-\left(\frac{r_1}{\rho_1}+\frac{r_2}{\rho_2}\right)R_{12}\right).$$

Коэффициенты в функциях $\theta_i'(x,y,z)$, $i=1,2$, определяются по аналогии с первым случаем. Пусть

$$\varphi_i'(x,y,z)=\min\{\theta_i'(x,y,z),\omega_i'(x,y,z)\},\qquad i=1,2;$$

$$\varphi_3'(x,y,z)=\sqrt{x^2+y^2+(z-(\tau_1+\tau_2))^2}-(\rho_1+\rho_2);\qquad \varphi_4'(x,y,z)=z.$$

Очевидно, если $\vartheta'(x,y,z)=\max\limits_{i=1,2,3,4}\varphi_i'(x,y,z)>0$, то $\breve{G}_1\bigcap G_2=\varnothing$. Тогда нормализованная Ф-функция сегментов $\breve{G}_1(u_1)$ и $G_2(u_2)$ для случая $f(\nu)<0$ будет иметь вид $\Phi^{\breve{G}G}(u_1,u_2)=\vartheta'(u_2-u_1)$.

3. Если $f(\nu)=0$, то $P\in\breve{G}_1^*$. В этом случае действует любая из Ф-функций, полученных для предыдущих случаев. При этом функции $\omega_2(x,y,z)$ и $\theta_2(x,y,z)$ в данном случае будут отсутствовать.

Таким образом, на основании описанных случаев Ф-функция для сегментов $\breve{G}_1(u_1)$ и $G_2(u_2)$ может быть записана в виде

$$\Phi^{\breve{G}G}(u_1,u_2,\nu)=\max_{i=1,2,3,4}\varphi_i(u_2-u_1,\nu),$$

где

$$\varphi_1(u,\nu)=\min\{\theta_1(u,\nu),\omega_1(u,\nu)\};\qquad \varphi_2(u,\nu)=\min\{\theta_2(u,\nu),\omega_2(u,\nu),\zeta(\nu)\};$$

$$\varphi_3(u,\nu)=\sqrt{x^2+y^2+(z-(\tau_1+\tau_2))^2}-(\rho_1+\rho_2);\qquad \varphi_4(u,\nu)=z;$$

$$\omega_1(u,\nu)=\sqrt{\left(\sqrt{x^2+y^2}-R_{12}\right)^2+z^2};$$

$$\omega_2(u,\nu)=\sqrt{\left(\sqrt{x^2+y^2}-r_{3-t}\right)^2+(z-\tau_t)^2}-\rho_t;$$

$$\theta_1(u,\nu)=\frac{r_t}{w_t}\sqrt{x^2+y^2}+z-\frac{r_t}{w_t}R_{12};$$

$$\theta_2(u,\nu)=\frac{2}{k}\left(\left(\frac{r_1}{\rho_1}+\frac{r_2}{\rho_2}\right)\sqrt{x^2+y^2}-\left(\frac{\tau_1}{\rho_1}+\frac{\tau_2}{\rho_2}\right)z-\left(\frac{r_1}{\rho_1}+\frac{r_2}{\rho_2}\right)R_{12}\right);$$

$$f=\frac{\tau_1}{\rho_1}-\frac{\tau_2}{\rho_2},\qquad t=\begin{cases}1, & \text{если}\quad f(\nu)<0,\\ 2, & \text{если}\quad f(\nu)\geqslant 0,\end{cases}\qquad k=\left(\frac{r_1}{\rho_1}+\frac{r_2}{\rho_2}\right)^2+\left(\frac{\tau_1}{\rho_1}+\frac{\tau_2}{\rho_2}\right)^2,$$

$$R_{12}=r_1+r_2,\qquad \zeta(\nu)=\begin{cases}-\lambda, & \text{если}\quad f(\nu)=0,\\ \lambda, & \text{если}\quad |f(\nu)|>0,\end{cases}$$

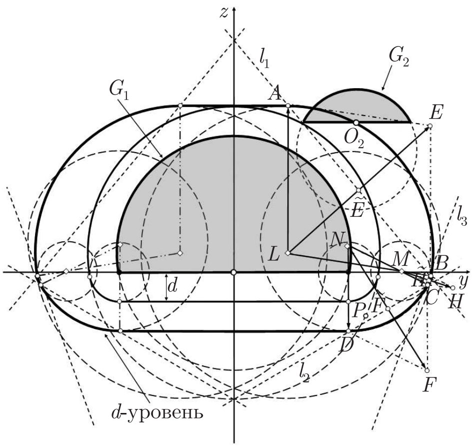

Рис. 3. Сечение поверхности d-уровня Ф-функции для G_1 $(0, 0, 0)$ и $G_2(0, y_2, z_2)$ при $f(\nu) > 0$

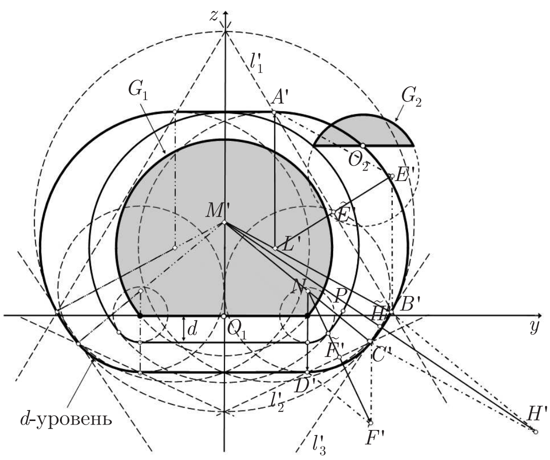

Рис. 4. Сечение поверхности d-уровня Ф-функции для $G_1(0, 0, 0)$ и $G_2(0, y_2, z_2)$ при $f(\nu) < 0$

λ — сколь угодно большое положительное число, не влияющее на значение Ф-функции, $u \in R^3$.

Построим нормализованную Ф-функцию для $G_1(u_1)$ и $G_2(u_2)$. При этом воспользуемся рассуждениями, изложенными выше. Как и в случае с Ф-функцией для $\breve{G}_1(u_1)$ и $G_2(u_2)$, вид Ф-функции для $G_1(u_1)$ и $G_2(u_2)$ будет зависеть от значения функции $f(\nu) = \tau_1/\rho_1 + \tau_2/\rho_2$. На рис. 3, 4 представлены сечения плоскостью YOZ поверхности d-уровня Ф-функции сегментов $G_1(0, 0, 0)$ и $G_2(0, y_2, z_2)$ для случаев $f(\nu) > 0$ и $f(\nu) < 0$.

Основываясь на рассуждениях, приведенных выше, введем следующие функции:

$$\omega_i(u, \nu) = \sqrt{\left(\sqrt{x^2 + y^2} - r_{3-i}\right)^2 + (z + (-1)^{i-1}\tau_i)^2} - \rho_i, \qquad i = 1, 2;$$

$$\omega_3(u, \nu) = \begin{cases} \sqrt{\left(\sqrt{x^2 + y^2} - R_{12}\right)^2 + z^2}, & \text{если} \quad f(\nu) > 0, \\ \sqrt{x^2 + y^2 + (z - (\tau_2 - \tau_1))^2} - (\rho_1 + \rho_2), & \text{если} \quad f(\nu) < 0, \end{cases}$$

$$\theta_i(u,\nu)=\begin{cases}\dfrac{w_i}{r_i}\sqrt{x^2+y^2}+(-1)^{i-1}z+\dfrac{w_i}{r_i}R_{12}, & \text{если}\quad f(\nu)\geqslant 0,\\ \dfrac{r_{3-i}}{w_{3-i}}\sqrt{x^2+y^2}+(-1)^{i-1}z+2\rho_{3-i}-w_{3-i}+w_i, & \text{если}\quad f(\nu)<0,\end{cases}\qquad i=1,2,$$

$$\theta_3(u,\nu)=\frac{2}{k}\left(\left(\frac{r_1}{\rho_1}+\frac{r_2}{\rho_2}\right)\sqrt{x^2+y^2}+\left(\frac{\tau_1}{\rho_1}-\frac{\tau_2}{\rho_2}\right)z-\left(\frac{r_1}{\rho_1}+\frac{r_2}{\rho_2}\right)R_{12}\right),$$

где

$$k=\left(\frac{r_1}{\rho_1}+\frac{r_2}{\rho_2}\right)^2+\left(\frac{\tau_1}{\rho_1}-\frac{\tau_2}{\rho_2}\right)^2,\qquad u\in R^3.$$

Пусть

$$\varphi_i(u,\nu)=\min\{\theta_i(u,\nu),\omega_i(u,\nu)\},\qquad i=1,2,$$

$$\varphi_3(u,\nu)=\min\{\theta_3(u,\nu),\omega_3(u,\nu),\zeta(\nu)\};\qquad \varphi_4(u,\nu)=z-w_1;\qquad \varphi_5(u,\nu)=-z-w_2.$$

Тогда нормализованную Ф-функцию для сферических сегментов $G_1(u_1)$ и $G_2(u_2)$ можно записать в следующем виде:

$$\Phi^{GG}(u_1,u_2,\nu)=\max_{i=1,2,3,4,5}\varphi_i(u_2-u_1,\nu).$$

На основании построенных Ф-функций легко можно получить Ф-функции для трехмерных объектов, сформированных с использованием различных сферических сегментов. В качестве примера такой Ф-функции приведем вид Ф-функции для дисков L, образованных объединением двух сегментов $\breve{G}$ и G, высота которых не превышает радиус шара.

Пусть даны диски L_j, $j=1,2$, с параметрами: r_j — радиус основания; $\rho_{j,j}$ — радиус верхнего шара; $\rho_{3-j,j}$ — радиус нижнего шара; $w_{j,j}$ — высота верхнего сегмента; $w_{3-j,j}$ — высота нижнего сегмента, причем $\rho_{i,j}=\dfrac{r_j^2+w_{i,j}^2}{2w_{i,j}^2}$, $i=1,2$; $\nu_{s,i}=(\rho_{s,i},w_{s,i})$, $\nu_s=(\nu_{s,1},\nu_{s,2})$, $i,s=1,2$; $\nu=(\nu_1,\nu_2)$.

Введем две функции:

$$f_s(\nu_s)=\frac{\tau_{s,1}}{\rho_{s,1}}-\frac{\tau_{s,2}}{\rho_{s,2}},\qquad s=1,2,$$

а также зададим функции

$$\omega_s(u,\nu)=\sqrt{\left(\sqrt{x^2+y^2}-r_{3-t_s}\right)^2+(z+(-1)^{s-1}\tau_{s,t_s})^2}-\rho_{s,t_s}, s=1,2,$$

$$\omega_3(u,\nu)=\sqrt{\left(\sqrt{x^2+y^2}-R_{12}\right)^2+z^2},$$

$$\theta_s(u,\nu)=\frac{2}{k_s}\left(\left(\frac{r_1}{\rho_{s,1}}+\frac{r_2}{\rho_{s,2}}\right)\sqrt{x^2+y^2}+(-1)^{s-1}\left(\frac{\tau_{s,1}}{\rho_{s,1}}+\frac{\tau_{s,2}}{\rho_{s,2}}\right)z-\left(\frac{r_1}{\rho_{s,1}}+\frac{r_2}{\rho_{s,2}}\right)R_{12}\right),$$

$$s=1,2,$$

$$\theta_3(u,\nu)=\frac{2}{\mu}\left(\left(\frac{r_2}{\rho_{1,2}}+\frac{r_2}{\rho_{2,2}}\right)\sqrt{x^2+y^2}+\left(\frac{\tau_{1,2}}{\rho_{1,2}}-\frac{\tau_{2,2}}{\rho_{2,2}}\right)z-\left(\frac{r_2}{\rho_{1,2}}+\frac{r_2}{\rho_{2,2}}\right)R_{12}\right),$$

$$\omega_{s,1}(x,y,z) = \sqrt{x^2+y^2+(z+(-1)^{s-1}(\tau_{s,1}+\tau_{s,2}-H_{12}))^2} - (\rho_{s,1}+\rho_{s,2});$$

$$\omega_{s,2}(x,y,z) = \sqrt{\left(\sqrt{x^2+y^2}-r_{3-t_s}\right)^2+(z+(-1)^{s-1}(\tau_{s,t_s}-H_{12}))^2} - \rho_{s,t_s};$$

$$\omega_{s,3}(x,y,z) = \sqrt{\left(\sqrt{x^2+y^2}-R_{12}\right)^2+z^2};$$

$$\theta_{s,1}(x,y,z) = (-1)^{s-1}z - \left(w_{s,t_s} - \frac{\rho_{s,t_s}}{\rho_{s,3-t_s}} w_{s,3-t_s} + H_{12}\right);$$

$$\theta_{s,2}(x,y,z) = \frac{2}{k_s}\left(\left(\frac{r_1}{\rho_{s,1}}+\frac{r_2}{\rho_{s,2}}\right)\sqrt{x^2+y^2} + (-1)^{s-1}\left(\frac{\tau_{s,1}}{\rho_{s,1}}+\frac{\tau_{s,2}}{\rho_{s,2}}\right)z - \right.$$
$$\left. - \left(\frac{r_1}{\rho_{s,1}}+\frac{r_2}{\rho_{s,2}}\right)R_{12} + \left(\frac{\tau_{s,1}}{\rho_{s,1}}+\frac{\tau_{s,2}}{\rho_{s,2}}\right)H_{12}\right);$$

$$\theta_{s,3}(x,y,z) = \frac{2}{\mu}\left(\left(\frac{r_2}{\rho_{1,2}}+\frac{r_2}{\rho_{2,2}}\right)\sqrt{x^2+y^2} + \left(\frac{\tau_{1,2}}{\rho_{1,2}}-\frac{\tau_{2,2}}{\rho_{2,2}}\right)z - \left(\frac{r_2}{\rho_{1,2}}+\frac{r_2}{\rho_{2,2}}\right)R_{12}\right),$$

где

$$k_s = \left(\frac{r_1}{\rho_{s,1}}+\frac{r_2}{\rho_{s,2}}\right)^2 + \left(\frac{\tau_{s,1}}{\rho_{s,1}}+\frac{\tau_{s,2}}{\rho_{s,2}}\right)^2; \qquad \mu = \left(\frac{r_2}{\rho_{2,2}}+\frac{r_2}{\rho_{1,2}}\right)^2 + \left(\frac{\tau_{1,2}}{\rho_{1,2}}-\frac{\tau_{2,2}}{\rho_{2,2}}\right)^2;$$

$$t_s = \begin{cases} 1, & \text{если} \quad f_s(\nu_s) < 0, \\ 2, & \text{если} \quad f_s(\nu_s) \geqslant 0 \end{cases} \qquad u \in R^3.$$

Пусть

$$\varphi_{s,1}(u,\nu) = \min\{\theta_s(u,\nu), \omega_s(u,\nu), \zeta(\nu_s)\}, \qquad s = 1,2,$$

$$\varphi_{s,2}(u,\nu) = \sqrt{x^2+y^2+(z+(-1)^{s-1}(\tau_{s,1}+\tau_{s,2}))^2} - (\rho_{s,1}+\rho_{s,2}), \qquad s = 1,2,$$

$$\varphi_s(u,\nu) = \max\{\varphi_{s,1}(u,\nu), \varphi_{s,2}(u,\nu)\}, \qquad s = 1,2,$$

$$\varphi_3(u,\nu) = \min\{\theta_3(u,\nu), \omega_3(u,\nu)\}.$$

Тогда нормализованная Ф-функция для рассматриваемых объектов будет иметь вид

$$\Phi^{LL}(u_1,u_2,\nu) = \max_{i=1,2,3} \varphi_i(u_2-u_1,\nu).$$

Представленные в работе Ф-функции позволяют строить математические модели оптимизационных задач размещения трехмерных объектов, образованных с помощью сферических сегментов. Аппарат Ф-функций дает возможность применять для решения прикладных оптимизационных задач упаковки трехмерных объектов современные методы локальной и глобальной оптимизации [3].

1. *Stoyan Yu. G.* Φ-function and its basic properties // Доп. НАН України. – 2001. – No 8. – С. 112–117.
2. *Стоян Ю. Г., Романова Т. Е., Шайтхауэр Г.* Математическое моделирование взаимодействий базовых геометрических 3D объектов // Кибернетика и системн. анализ. – 2005. – № 3. – С. 19–31.

3. *Chernov N., Stoyan Y., Romanova T.* Mathematical model and efficient algorithms for object packing problem // Computational Geometry: Theory and Applications. – 2010. – **43**, No 5. – P. 535–553.

Институт проблем машиностроения им. А. Н. Подгорного НАН Украины, Харьков

Поступило в редакцию 03.05.2012

В. В. Сьомкін, А. М. Чугай

Нормалізована Φ-функція сферичних сегментів

Для аналітичного опису відношень включення, перетинання та торкання двох сферичних сегментів будується нормалізована Φ-функція. Ця функція може бути використана для математичного моделювання задач оптимального розміщення тривимірних об'єктів, утворених за допомогою довільних сферичних сегментів.

V. V. Semkin, A. M. Chugay

The normalized Φ-function for spherical segments

For the analytical description of the relations of inclusion, intersection, and contact for spherical segments, the normalized Φ-function is constructed. The Φ-function can be used for the mathematical modeling of problems of optimal packing of three-dimensional objects, which are formed by arbitrary spherical segments.