УДК 519.8

КРИТЕРИИ И МЕТОДЫ СРАВНЕНИЯ НЕЧЁТКИХ МНОЖЕСТВ

Ю.А. ЗАК

Предложены критерии и методы определения относительного предпочтения, сравнения и ранжирования показателей эффективности принимаемого решения, представленных нечёткими множествами. Выбор конкретного алгоритма сравнения и ранжирования диктуется содержательной постановкой прикладной задачи и субъективными предпочтениями лица, принимающего решение. Развиваются подходы на основе сравнения некоторой группы показателей, определяющих гарантию получения желаемого результата, а также многокритериальные модели решения сформулированной проблемы. Разработанные модели и методы могут найти широкое применение в задачах выбора портфеля инвестиций, в перспективном планировании производства, в решении задач нечёткого регрессионного анализа и математического программирования с нечёткими данными.

ВВЕДЕНИЕ

Во многих практических приложениях, связанных с принятием решений, значение показателя эффективности может быть выражено некоторым нечётким множеством, что наиболее характерно для стратегических проблем и задач перспективного планирования. В качестве наиболее ярких примеров таких ситуаций могут быть рассмотрены: ожидаемый через определенный период времени объем прибыли при распределении инвестиций; прогнозируемое время в пути в зависимости от состояния дорог, погоды, времени суток и напряженности движения транспорта; предполагаемые объемы продаж и ожидаемой прибыли, выполненные на основе маркетинговых исследований и многие другие. Во всех выше рассмотренных случаях отсутствие достаточных объемов статистических данных, а также невозможность на основе предыстории процессов достаточно точно предсказать поведение системы в будущем, приводит к необходимости корректировки построенных на основе используемых математических моделей законов распределения значений анализируемых показателей с учетом опыта, знаний и интуиции экспертов, преобразуя их в ряде случаев в нечёткие множества.

При анализе двух альтернативных решений, показатели эффективности которых выражены соответственно двумя Fuzzy-числами (нечёткими множествами), лицу, принимающему решение, зачастую очень трудно определить, какому из этих значений отдать предпочтение.

Известны и широко используются в практике соотношения эквивалентности и включения для непрерывных и дискретных нечётких множеств $A = \{x, \mu_A(x)\}$, $B = \{x, \mu_B(x)\}$ в виде

$$A = B \text{, если } \mu_A(x) = \mu_B(x) \quad \forall x \in X, \tag{1}$$

$$A \subseteq B \text{, если } \mu_A(x) \le \mu_B(x) \quad \forall x \in X. \tag{2}$$

Однако в целом ряде случаев соотношения (1), (2) не выполняются, и возникают проблемы сравнения, упорядочения или ранжирования нечётких множеств, аналогичные проблемам сравнения и упорядочения действительных или целых чисел по их возрастанию или убыванию.

Упорядочение нечётких множеств в соответствии с увеличением или уменьшением средневзвешенной оценки M_A или координаты центра тяжести C_A, где

$$M_A = \int_{x \in X} x \mu_A(x) dx, \quad C_A = \frac{\int_{x \in X} x \mu_A(x) dx}{\int_{x \in X} \mu_A(x) dx}, \tag{3}$$

также во многих практических приложениях не всегда обосновано.

Общая концепция сравнения или ранжирования нечётких множеств заключается в том, чтобы каждому размытому множеству можно было поставить в соответствие некоторую характеристику, выраженную конкретным действительным числом, по возрастанию или убыванию которых (в зависимости от содержательной постановки задачи) можно было бы упорядочить эти множества.

В литературе [3, 5] предложены правила абсолютного предпочтения

$$\inf \operatorname{supp}(\mathrm{A}) > \sup \operatorname{supp}(\mathrm{B}) \text{, где } \operatorname{supp}(\mathrm{A}) = \{x \in X \mid \mu_A(x) > 0\}, \tag{4}$$

а также различные правила абсолютного и относительного предпочтения, основанные на сравнении интервалов области изменения переменной $x \in X$ [1–3].

Пусть $[h_A^1, h_A^2]$ — интервал изменения значения x нечёткого множества A, где

$$h_A^1 = \{\min x \mid x \in X, \mu_A(x) > 0\}, \quad h_A^2 = \{\max x \mid x \in X, \mu_A(x) > 0\}. \tag{5}$$

Если $A = \{x, \mu_A(x)\}$ и $B = \{x, \mu_B(x)\}$ — два выпуклых нечётких множества, определённые на одном и том же множестве значений X, для которых выполняются соотношения

$$h_A^1 \ge h_B^2, \tag{6}$$

то $A \succ B$, т.е. нечёткое множество A является строго более предпочтительным нечёткого множества B.

В практических приложениях правила абсолютного предпочтения (5), (6), как правило, не выполняются, т.е. $h_A^1 \ge h_B^1$, $h_A^2 \ge h_B^2$, но $h_A^1 < h_B^2$. В этом случае используются условия нестрогого предпочтения. Каждое из этих правил является субъективным и использует специфику решаемой задачи, а также предпочтения лица, принимающего решения.

В литературе наиболее широкое распространение получили методы, основанные на анализе различного уровня α-сечений нечётких множеств [3, 4], которые для случая нечётких множеств, представленных LR-интервалами, развиты в работах автора [6, 7]; методы Chen и Jain (см. например, [3, 4]), основанные на вычислении некоторых функций ранга, методы Dubois, Prade [5], в которых был предложен многокритериальный подход, основанный на вычислении 4 показателей. Авторы Tong и Bonissone предложили подходы, сочетающие применение количественных и лингвистических правил при ранжировании нечётких множеств. Эти подходы подробно описаны в монографии [3].

Следует отметить, что в настоящее время в сложных случаях не существует методов сравнения, одинаково эффективных для различных практических приложений. Поэтому выбор того или иного конкретного алгоритма сравнения и ранжирования диктуется содержа тельной постановкой конкретной прикладной задачи.

Во многих практических приложениях необходимо установить правила относительного предпочтения нечётких множеств из условий сравнения некоторой вычисленной меры гарантии получения желаемого результата. С этой целью в 1-й части данной работы вводятся некоторые характеристики нечётких множеств (Z-сечения), аналогичные следующим известным и широко применяемым в теории вероятности и математической статистике показателям:

- вероятность того, что значение данного показателя, заданного некоторой функцией распределения вероятностей, будет не меньше (или не больше) некоторой установленной величины;
- некоторая величина, значение показателя не ниже (или не выше) которой гарантируется с некоторой наперед заданной вероятностью.

Эти подходы рассматриваются автором в следующем разделе работы. Во второй части работы предлагаются многокритериальные подходы решения проблемы, основанные на ведении некоторого обобщенного критерия эффективности в виде линейной свертки частных критериев, оценивающих риск получения неблагоприятного результата и перспективы достижения поставленных целей. Формулируется задача выбора наиболее эффективного решения из множества рассматриваемых альтернатив, в процессе которой может быть произведен отсев нечётких множеств, не удовлетворяющих поставленной системе ограничений.

Z–СЕЧЕНИЯ НЕЧЁТКИХ МНОЖЕСТВ

Пусть условия «$\bar{\le}_{\mathrm{Re}}$» или «$\bar{\ge}_{\mathrm{Re}}$» определяют условия доминирования (предпочтения) двух нечётких множеств соответственно в сторону уменьшения или увеличения их значений.

Рассмотрим два нечётких множества $A = (x,\ \mu_A(x))$ и $B = (x,\ \mu_B(x))$.

1. Z^1 и Z^2 — сечения непрерывных нечётких множеств

Для непрерывных нечётких множеств $A = \{x, \mu_A(x)\}$, заданных на множестве значений $x \in X$, в диапазоне значений $x \in [H_{\min}, H_{\max}]$, определим следующие условия нормирования

$$\lambda_A(x) = \frac{\mu_A(x)}{L_A}, \; x \in X \text{, где } L_A = \int\limits_{x \in X} \mu_A(x)dx, \quad \int\limits_{x \in X} \lambda_A(x)dx = 1. \tag{7}$$

На рис. 1 приведены примеры нечёткого множества $A = \{x, \mu_A(x)\}$ и соответствующего ему нормированного множества $\{x, \lambda_A(x)\}$.

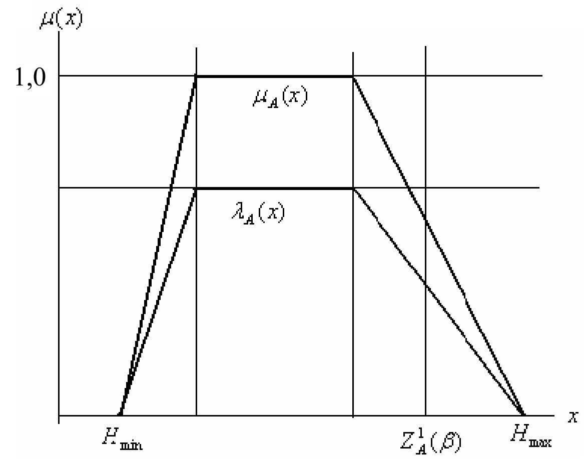

Рис. 1. Примеры нечётких множеств $\{x, \mu_A(x)\}$ и $\{x, \lambda_A(x)\}$

Определим для Z^1-сечений

$$Z_A^1(\beta) = \left\{ \min x \,|\, \int\limits_{H_{\min}}^{x} \lambda_A(x)dx \geq \beta, \; x \in X \right\}, \; 0 < \beta \leq 1; \tag{8}$$

$$\mu^1_{Z_A^1(\beta)} = \begin{cases} \mu_A(x), & \text{если} \quad x \leq Z_A^1(\beta), \\ 0, & \text{если} \quad x > Z_A^1(\beta); \end{cases} \quad \mu^2_{Z_A^1(\beta)} = \begin{cases} \mu_A(x), & \text{если} \quad x > Z_A^1(\beta), \\ 0, & \text{если} \quad x \leq Z_A^1(\beta); \end{cases} \tag{9}$$

$$\mu^3_{Z_A^1(\beta)} = \begin{cases} 1 & \text{если} \quad x \leq Z_A^1(\beta), \\ 0 & \text{если} \quad x > Z_A^1(\beta); \end{cases} \quad \mu^4_{Z_A^1(\beta)} = \begin{cases} 1, & \text{если} \quad x > Z_A^1(\beta), \\ 0, & \text{если} \quad x \leq Z_A^1(\beta). \end{cases} \tag{10}$$

На рис. 2 приведены примеры функций принадлежности $\mu^1_{Z_A^1(\beta)}(x_k)$ – $\mu^4_{Z_A^1(\beta)}(x_k)$.

Для Z^2-сечений введем следующие показатели:

$$Z_A^2(\beta) = \left\{ \max x \,|\, \int\limits_{x}^{H_{\max}} \lambda_A(x)dx \geq \beta, \; x \in X \right\}, \; 0 < \beta \leq 1; \tag{11}$$

$$\mu^1_{Z_A^2(\beta)} = \begin{cases} \mu_A(x), & \text{если} \quad x \geq Z_A^2(\beta), \\ 0, & \text{если} \quad x < Z_A^2(\beta); \end{cases} \quad \mu^1_{Z_A^2(\beta)} = \begin{cases} \mu_A(x), & \text{если} \quad x \leq Z_A^2(\beta), \\ 0, & \text{если} \quad x > Z_A^2(\beta); \end{cases} \tag{12}$$

$$\mu^3_{Z_A^2(\beta)} = \begin{cases} 1, & \text{если} \quad x \geq Z_A^2(\beta), \\ 0, & \text{если} \quad x < Z_A^2(\beta); \end{cases} \quad \mu^4_{Z_A^2(\beta)} = \begin{cases} 1, & \text{если} \quad x \leq Z_A^2(\beta), \\ 0, & \text{если} \quad x > Z_A^2(\beta). \end{cases} \tag{13}$$

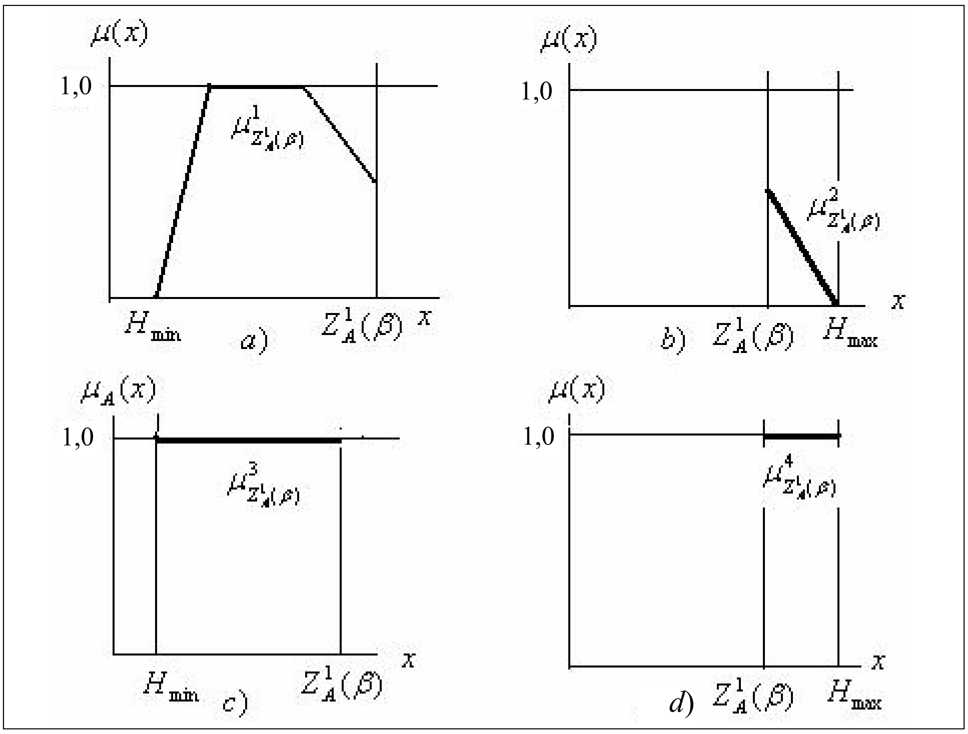

Рис. 2. Примеры функций принадлежности $\mu^1_{Z^1_A(\beta)}(x_k) - \mu^4_{Z^1_A(\beta)}(x_k)$.

На рис. 3 приведены примеры функций принадлежности $\mu^1_{Z^2_A(\beta)}(x_k) - \mu^4_{Z^2_A(\beta)}(x_k)$.

Введем также следующие показатели

$$\beta^1_A(z_p) = \int\limits_{H_{\min}}^{z_p} \lambda_A(x)dx\,, \quad \beta^2_A(z_p) = \int\limits_{z_p}^{H_{\max}} \lambda_A(x)dx\,, \quad p = 1,\ldots,P, \qquad (14)$$

где z_p, $p = 1,\ldots,P$ — некоторые значения параметра $x \in [H_{\min}, H_{\max}]$.

Аналогичным образом параметры Z^1 и Z^2-сечений могут быть вычислены для различных t- и S-норм нечётких множеств.

2. Z^1 и Z^2 — сечения дискретных нечётких множеств

Для дискретных Fuzzy-множеств $A = \sum_{k=1}^{K} \left(\mu_A(x_k) \big/ x_k \right)$ значения L_A и $\lambda_A(x_k)$ вычисляются соответственно по формулам:

$$L_A = \sum_{k=1}^{K} \mu_A(x_k)\,, \ \lambda_A(x_k) = \frac{\mu_A(x_k)}{L_A}, \ k = 1,\ldots,K; \ \sum_{k=1}^{K} \lambda_A(x_k) = 1. \qquad (15)$$

Значения $Z^1_A(\beta)$ и $Z^2_A(\beta)$ определяются по формулам:

$$Z^1_A(\beta) = \left\{ \min_{1\le k\le K} x_k \mid \sum_{q=1}^{k} \lambda(x_q) \ge \beta;\ x_q \in X \right\};$$

$$Z_A^2(\beta)=\left\{\max_{1\le k\le K} x_k \mid \sum_{q=K}^{k}\lambda(x_q)\ge\beta;\ x_q\in X\right\}. \qquad (16)$$

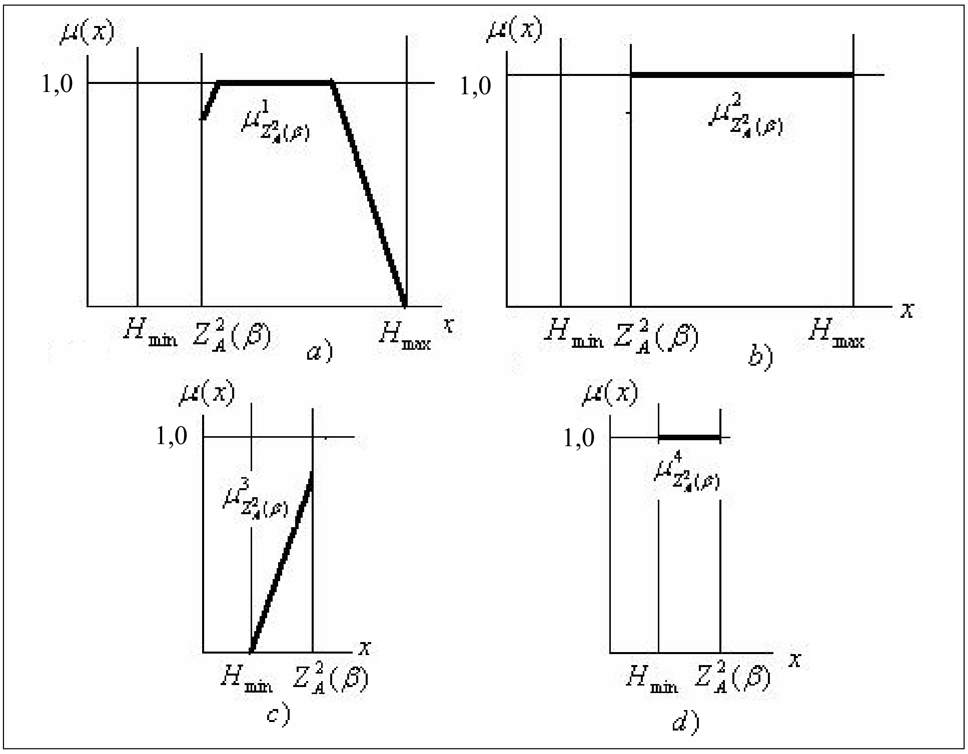

Рис. 3. Примеры функций принадлежности $\mu^1_{Z^2_A(\beta)}(x_k)-\mu^4_{Z^2_A(\beta)}(x_k)$

Значения $\mu^1_{Z^1_A(\beta)}(x_k)-\mu^4_{Z^1_A(\beta)}(x_k)$ и $\mu^1_{Z^2_A(\beta)}(x_k)-\ \mu^4_{Z^2_A(\beta)}(x_k)$ вычисляются аналогично выше приведенным формулам для непрерывных нечётких множеств.

Поясним вышеизложенное на простом числовом примере:

$$A=\sum_{k=1}^{K}\left(\mu_A(x_k)\big/x_k\right)=0{,}1\big/2+0{,}3\big/3+0{,}35\big/4+0{,}4\big/5+$$

$$+0{,}4\big/6+0{,}7\big/7+0{,}8\big/8+0{,}6\big/9+0{,}5\big/10+0{,}3\big/11+0{,}12\big/12;$$

$$L_A=0{,}1+0{,}3+0{,}35+0{,}4+0{,}4+0{,}7+0{,}8+0{,}6+0{,}5+0{,}3+0{,}12=4{,}57,$$

$$\lambda_A(x_k)=(0{,}022;\ 0{,}0656;\ 0{,}0766;\ 0{,}0875;\ 0{,}0875;\ 0{,}1532;$$

$$0{,}1751;\ 0{,}1313;\ 0{,}1094;\ 0{,}0656;\ 0{,}0262).$$

Зададим значение $\beta=0{,}75$. Для этого значения получим: $Z_A^1(\beta=$ $=0{,}75)=8$, $Z_A^2(\beta=0{,}75)=4$. Далее получим:

$$A^1\{Z^1(\beta=0{,}75)\}=\left(\frac{0{,}1}{2}+\frac{0{,}3}{3}+\frac{0{,}35}{4}+\frac{0{,}4}{5}+\frac{0{,}4}{6}+\frac{0{,}7}{7}+\frac{0{,}8}{8}+\frac{0{,}6}{9}\right);$$

$$A^2\{Z^1(\beta=0{,}75)\}=\left(\frac{0{,}5}{10}+\frac{0{,}3}{11}+\frac{0{,}12}{12}\right);$$

$$A^3\{Z^1(\beta=0{,}75)\}=(\frac{1{,}0}{2}+\frac{1{,}0}{3}+\frac{1{,}0}{4}+\frac{1{,}0}{5}+\frac{1{,}0}{6}+\frac{1{,}0}{7}+\frac{1{,}0}{8}+\frac{1{,}0}{9});$$

$$A^4\{Z^1(\beta=0{,}75)\}=\left(\frac{1{,}0}{10}+\frac{1{,}0}{11}+\frac{1{,}0}{12}\right).$$

$$A^1\{Z^2(\beta=0{,}75)\}=$$

$$=\left(\frac{0{,}4}{5}+\frac{0{,}4}{6}+\frac{0{,}7}{7}+\frac{0{,}8}{8}+\frac{0{,}6}{9}+\frac{0{,}5}{10}+\frac{0{,}3}{11}+\frac{0{,}12}{12}\right);$$

$$A^2\{Z^2(\beta=0{,}75)\}=\left(\frac{0{,}1}{2}+\frac{0{,}3}{3}+\frac{0{,}35}{4}\right);$$

$$A^3\{Z^2(\beta=0.75)\}=\left(\frac{1{,}0}{5}+\frac{1{,}0}{6}+\frac{1{,}0}{7}+\frac{1{,}0}{8}+\frac{1{,}0}{9}+\frac{1{,}0}{10}+\frac{1{,}0}{11}+\frac{1{,}0}{12}\right);$$

$$A^2\{Z^2(\beta=0{,}75)\}=\left(\frac{1{,}0}{2}+\frac{1{,}0}{3}+\frac{1{,}0}{4}\right).$$

3. Правила относительного предпочтения на основе Z-сечений нечётких множеств

На основе вычисленных значений параметров $Z_A^1(\beta)$ и $Z_A^2(\beta)$ могут быть сформулированы следующие правила относительного предпочтения нечётких множеств.

Определение 1. $A \succ B$ в смысле $A \geq_{\mathrm{Re}} B$, если выполняется система неравенств

$$\int\limits_{Z_A^2(\beta)}^{H_{\max}} \mu^1_{Z_A^2(\beta)}(x)dx \geq \int\limits_{Z_B^2(\beta)}^{H_{\max}} \mu^1_{Z_B^2(\beta)}(x)dx\,, \quad \int\limits_{H_{\min}}^{Z_A^1(\beta)} \mu^1_{Z_A^1(\beta)}(x)\,dx \leq \int\limits_{H_{\min}}^{Z_A^1(\beta)} \mu^1_{Z_A^1(\beta)}(x)dx\,. \quad (17)$$

Определение 2. $A \succ B$ в смысле $A \geq_{\mathrm{Re}} B$, если выполняется система неравенств

$$Z_A^2(\beta) \leq Z_B^2(\beta) \text{ и } Z_A^1(\beta) \geq Z_B^1(\beta)\,.$$

Определение 3. $A \succ B$ в смысле $A \leq_{\mathrm{Re}} B$, если выполняется система неравенств

$$\int\limits_{Z_A^2(\beta)}^{H_{\max}} \mu^1_{Z_A^2(\beta)}(x)dx \leq \int\limits_{Z_B^2(\beta)}^{H_{\max}} \mu^1_{Z_B^2(\beta)}(x)dx \text{ и } \int\limits_{H_{\min}}^{Z_A^1(\beta)} \mu^1_{Z_A^1(\beta)}(x)\,dx \geq \int\limits_{H_{\min}}^{Z_A^1(\beta)} \mu^1_{Z_A^1(\beta)}(x)dx\,. \quad (18)$$

Определение 4. $A \succ B$ в смысле $A \leq_{\mathrm{Re}} B$, если выполняется система неравенств

$$Z_A^2(\beta) \geq Z_B^2(\beta) \text{ и } Z_A^1(\beta) \leq Z_B^1(\beta). \quad (19)$$

Определение 5. $A \succ B$ в смысле $A \geq_{\mathrm{Re}} B$, если выполняется система неравенств

$$\beta_A^1(z_p) \leq \beta_B^1(z_p), \quad p = 1, \ldots, P_1; \;\; \beta_A^2(z_l) \geq \beta_B^p(z_l), \; l = 1, \ldots, P_2. \qquad (20)$$

$A \succ B$ в смысле $A \leq_{\mathrm{Re}} B$, если выполняется система неравенств

$$\beta_A^1(z_p) \geq \beta_B^1(z_p), \quad p = 1, \ldots, P_1; \;\; \beta_A^2(z_l) \leq \beta_B^p(z_l), \; l = 1, \ldots, P_2. \qquad (21)$$

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ СРАВНЕНИЯ И ОПРЕДЕЛЕНИЯ ПРЕДПОЧТЕНИЙ НЕЧЁТКИХ МНОЖЕСТВ

В литературе предложено большое количество критериев и методов относительного предпочтения одного нечёткого множества перед другим, и выбор какого-то определенного среди них связан с субъективным предпочтением лица, принимающего решения. Широко используемые в практических приложениях, а также новые, не рассматриваемые раннее в литературе и предложенные автором методы, рассмотрены в предыдущих разделах данной главы. Ниже рассматриваются многокритериальные подходы решения этой задачи.

Рассмотрим n различных нечётких множеств $A_i = (x, \mu_{A_i}(x))$, $i = 1, \ldots, n$, $[H_{1i}, H_{2i}]$— диапазон изменения переменной нечёткого множества A_i. Определим

$$H_{\min} = \min_{1 \leq i \leq n} H_i, \;\; H_{\max} = \max_{1 \leq i \leq n} H_i. \qquad (22)$$

Разобьем весь диапазон изменения $x \in [H_{\min}, H_{\max}]$ на m лингвистических термов (интервалов). Длина каждого k -го интервала равна

$$X_1 \in [H_{\min}, h_1 = H_{\min} + \Delta_k), \; X_k \in [h_{k-1}, h_k = h_{k-1} + \Delta_k),$$

$$X_m \in [h_{m-1}, H_{\max}], \qquad (23)$$

где $\Delta_k = \dfrac{H_{\max} - H_{\min}}{m}$.

Среди выделенных m лингвистических термов определим подмножество Q_1, включающее $m_1 < m$ термов, $k = 1, \ldots, m_1$, и подмножество Q_2, состоящее из $m_2 = m - m_1$ — значение переменной в пределах которых является соответственно нежелательным и благоприятным для лица, принимающего решение $Q_1 \bigcup Q_2 = Q = \{1, \ldots, k, \ldots, m\}$, $Q_1 \bigcap Q_2 = \varnothing$.

Определим средневзвешенные оценки $M_{A_i}^k$ нечётких множеств A_i в каждом из лингвистических интервалов:

$$M_{A_i}^k = \int_{x \in X_k} x \cdot \mu_{A_i}(x) dx, \;\; k = 1, \ldots, m, \; i = 1, \ldots, n. \qquad (24)$$

Введем комплексный критерий эффективности для каждого из нечётких множеств в виде

$$F_{A_i} = \sum_{k \in Q_2} \alpha_i^k M_{A_i}^k - \sum_{k \in Q_1} \alpha_i^k M_{A_i}^k, \qquad (25)$$

где $0 \le \alpha_i^k \le 1$, $i = 1,...,n$, — весовые коэффициенты, удовлетворяющие условиям нормировки $\sum_{k=1}^{m} \alpha_i^k = 1$.

Нечёткое множество A_i является эффективнее нечёткого множества A_j, т.е. $A_i \succ A_j$, если $F_{A_i} \ge F_{A_J}$.

Сравнение двух нечётких множеств на основе средневзвешенной оценки M_A или координаты x или центра тяжести C_A нечёткого множества

$$M_A = \int_{x \in X} x \mu_A(x) dx, \quad C_A = \frac{\int_{x \in X} x \mu_A(x) dx}{\int_{x \in X} \mu_A(x) dx} \qquad (26)$$

не учитывает степень риска получения значений хуже этих значений, что при принятии решений является очень важным.

Вычислим следующие два показателя:

$$M_A^- = \int_{x = X_{\min}}^{x = M_A} x \mu_A(x) dx, \quad M_A^+ = \int_{x = M_A}^{x = X_{\max}} x \mu_A(x) dx; \qquad (27)$$

$$C_A^- = \frac{\int_{x = H_{\min}}^{x = C_A} x \mu_A(x) dx}{\int_{x = H_{\min}}^{x = C_A} \mu_A(x) dx}, \quad C_A^+ = \frac{\int_{x = C_A}^{x = H_{\max}} x \mu_A(x) dx}{\int_{x = C_A}^{x = H_{\max}} \mu_A(x) dx}. \qquad (28)$$

Тогда комплексный показатель эффективности нечёткого множества $A = \{x, \mu_A(x)\}$ может быть представлен в виде:

$$F_1(A) = \lambda_1 M_A - \lambda_2 M_A^- + \lambda_3 M_A^+, \; F_2(A) = \lambda_1 C_A - \lambda_2 C_A^- + \lambda_3 C_A^+. \qquad (29)$$

В качестве других видов комплексных критериев эффективности нечётких множеств могут быть предложены линейные свертки, учитывающие большее количество локальных показателей эффективности

$$F_3(A) = \lambda_1 M_A - \lambda_2 M_A^- + \lambda_3 M_A^+ - \sum_{p=1}^{P_1} \gamma_p D_p^1 \{Z_A^1(\beta)\} + \sum_{q=1}^{P_1} \mu_q D_q^2 \{Z_A^1(\beta)\}, \qquad (30)$$

$$F_4(A) = \lambda_1 M_A - \lambda_2 M_A^- + \lambda_3 M_A^+ +$$
$$+ \sum_{p=1}^{P_1} \gamma_p D_p^1 \{Z_A^2(\beta_p)\} - \sum_{q=1}^{P_1} \mu_q D_q^2 \{Z_A^1(\beta_p)\} \qquad (31)$$

или

$$F_5(A) = \lambda_1 C_A - \lambda_2 C_A^- - \sum_{p=1}^{P_1} \gamma_p \beta_A^1(z_p) + \lambda_3 C_A^+ + \sum_{p=1}^{P_2} \mu_q \beta_A^2(z_q). \qquad (32)$$

Здесь

$$D^1\{Z_A^1(\beta_p)\} = \int_{H_{\min}}^{Z_A^1(\beta_p)} \mu^1_{Z_A^1(\beta_p)}(x)dx\,,\; D^2\{Z_A^1(\beta_p)\} = \int_{Z_A^1(\beta_p)}^{H_{\max}} \mu^1_{Z_A^1(\beta_p)}(x)dx, \quad (33)$$

$$D^1\{Z_A^2(\beta_p)\} = \int_{Z_A^2(\beta)}^{H_{\max}} \mu^1_{Z_A^2(\beta_p)}(x)dx\,,\; D^2\{Z_A^1(\beta_p)\} = \int_{H_{\min}}^{Z_A^1(\beta_p)} \mu^1_{Z_A^2(\beta_p)}(x)dx, \quad (34)$$

где $\lambda_k \ge 0$, $k = 1,2,3$; $\gamma_p \ge 0$, $p = 1,...,P_1$; $\mu_q \ge 0$, $q = 1,...,P_2$ — весовые коэффициенты, удовлетворяющие условиям нормировки

$$\sum_{k=1}^{3}\lambda_k + \sum_{p=1}^{P_1}\gamma_p + \sum_{q=1}^{P_2}\mu_q = 1.$$

Следует отметить, что каждый из интервалов $x \in [H_{\min}, M_A]$ и $x \in$ $\in [M_A, H_{\max}]$ (или $x \in [H_{\min}, C_A]$ и $x \in [C_A, H_{\max}]$) в свою очередь может быть разбит на несколько интервалов, и количество членов в выражениях (29)–(32) будет увеличено.

Значения весовых коэффициентов и параметры β_p выбираются в зависимости от содержательной постановки задачи и в соответствии с предпочтениями экспертов.

Задача выбора наилучшего значения показателя эффективности $(A_i \succ A_j \;\rightarrow F(A_i) \ge_{\text{Re}} F(A_j))$ из множества возможных альтернатив, которые заданы n различными нечёткими множествами $A_i = (x, \mu_{A_i}(x))$, $i = 1,...,n$, может быть сформулирована в виде многокритериальной следующей многокритериальной задачи в условиях ограничений

$$F_l(A_{i^*}) = \max_{1 \le i \le n} F_l(A_i) \quad (35)$$

в условиях следующих ограничений

$$Z^1_{A_i}(\beta_p) \le b_{1p}\,,\; p = 1,...,P_1\,;\; Z^2_{A_i}(\beta_q) \ge b_{2q}\,,\; q = 1,...,P_2\,; \quad (36)$$

$$\beta^1_{A_i}(z_p) \le \xi_{1p}\,,\; p = 1,...,P_1\,;\; \beta^2_{A_i}(z_q) \le \xi_{2q}\,,\; q = 1,...,P_2\,, \quad (37)$$

где $0 \le \xi_{1p} \le 1$, $0 \le \xi_{2q} \le 1$ — некоторые значения.

Так как выбор наиболее перспективной альтернативы всегда связан со спицификой конкретной проблемы, выбор конкретного выражения в (35) (индекса l), а также пороговых значений b_{1p}, b_{2q} в выражении (36), и ξ_{1p}, ξ_{2q} в выражении (36) осуществляется лицом, принимающем решение. При увеличении степени допускаемого риска пороговые значения b_{1p} и ξ_{2q} могут быть увеличены и корректироваться в процессе решения задачи.

Альтернативы, которые не удовлетворяют системе ограничений (36)–(37), отбрасываются как неперспективные. Среди оставшихся допустимых альтернатив выбирается такая, которая обеспечивает максимальное значение показателя эффективности.

ВЫВОДЫ

Предложенные критерии и методы определения предпочтений, сравнения и анжирования нечётких множеств могут найти широкое применение в задачах выбора наиболее эффективного портфеля инвестиций на перспективу, выборе наиболее эффективных альтернатив в задачах перспетивного планирования производства, в решении задач нечёткого регрессионного анализа, математического программирования в условиях, когда значения коэффициентов математических моделей, критериев оптимальности и левых частей ограничений представлены нечёткими множествами, а также в решении многих транспортных проблем и других приложениях. В зависимости от соотношений желаемого объема получения прибыли или допустимого уровня возможных затрат и степени допускаемого риска, экспертами может быть выбран один из предлагаемых в работе групп критериев, соответствующие им количество и величины значений $Z_A^1(\beta)$ и (или) $Z_A^2(\beta)$, M_A, M_A^-, M_A^+ (или C_A, C_A^-, C_A^+), а также значения весовых коэффициентов. На основе предложенных в работе критериев и подходов могут быть разработаны и другие комплексные показатели и методы сравнения и ранжирования нечётких множеств.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Борисов В.В., Круглов В.В., Федулов Ф.С.* Нечеткие цели и сети. — М.: Горячая линия, Телеком, 2007. — 284 с.
2. *Лю Б.* Теория и практика неопределенного программирования. Пер. с англ. — М.: БИНОМ, Лаборатория знаний, 2005. — 416 с.
3. *Rommelfanger H.J.* Entscheiden bei Unscharfe: Fuzzy Decision Support-Systeme. — Berlin-Heidelberg: Springer-Verlag, Secondedition, 1994. — 328 s.
4. *Rommelfanger H.J.* Fuzzy-Optimierungsmodelle in praktischen Anwendungen. — W. Habenicht, B. Scheubrein, R. Scheubrein (Hrsg.) «Multi-Criteria und Fuzzy-Systeme in Theorie und Praxis». — Wiesbaden: Deutscher Universitäts-Verlag, 2003. — 325 s.
5. *Duboi D., Prade H.* Fuzzy Sets and Systems: Theorir and Applications. — New York, London, Toronto: Academie Press, 1980. — 326 p.
6. *Зак Ю.А.* Принятие многокритериальных решений. — М.: Экономика, 2011. — 236 с.
7. *Zack Yu.A.* A Determined Equivalent and Algorithms of Solving a Fuzzy-linaer Programming Problem // Journal of Automation and Information Sciences. — 2011. — **43**, № 2. — P. 7–22.

Поступила 16.01.2012