УДК 519.8

В.И. БИЛЕЦКИЙ, Г.А. ДОНЕЦ, Э.И. НЕНАХОВ

ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ НЕОГРАНИЧЕННОГО КОМБИНАТОРНОГО РАСПОЗНАВАНИЯ

Рассматривается задача, которая относится к неограниченным комбинаторным задачам распознавания. С помощью минимального количества тестов на радиацию произвольной выборки из множества шаров необходимо обнаружить два радиоактивных. Доказывается ряд утверджений, необходимых для построения оптимальной стратегии. Приводятся решения задачи для 15 и 22 шаров.

В теории комбинаторного распознавания рассматриваются алгоритмы решения задач распознавания свойств отдельных предметов из всего их множества с помощью тестов, или экспериментов, которые можно трактовать достаточно широко. Эти задачи делятся на два типа.

К первому типу относятся задачи, где основной операцией есть подсчет и построение конкретных комбинаторных конфигураций на множестве заданных чисел. Такие задачи возникают в разного рода лотереях, банковской сфере, страховых компаниях и относятся к классу ограниченных задач комбинаторного распознавания. В работе [1] приводится одна из таких задач и описывается стратегия нахождения оптимального решения, которая заключается в разбиении исходного множества из n элементов на группы из m ($m \leq n$) элементов таким образом, чтобы потом, проделав эксперименты с помощью k-выборок ($k \leq m$) в каждой из них, найти необходимое количество определенных элементов.

К другому типу задач относятся задачи, где нужно из множества однородных предметов определить с помощью каких-то средств (измерительных приборов, химических реактивов и т. д.) отдельные специфические предметы. Такая проблема может возникнуть на таможне, контрольно-пропускных пунктах разных предприятий, в социальной сфере. В отличие от задач, рассмотренных в [1], такие задачи, которые широко встречаются на практике, условно можно назвать неограниченными задачами комбинаторного распознавания. Приведем их формальную постановку.

Задача комбинаторного распознавания (неограниченная). Пусть задано множество из n чисел $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$, которое состоит из m единиц и $n - m$ нулей. Эксперимент заключается в выборе произвольного количества k ($k \leq m$) чисел, после чего становится известным ихнее произведение. Необходимо за минимальное количество проб найти все числа, которые равны 0 (или, что то же самое, равны 1).

Приведем пример одной такой практической задачи.

Задача о радиоактивных элементах. Пусть через таможню проходит некоторый груз из n элементов (предметов). Известно, что k из них ($k < n$) радиоактивные. Для проверки на радиоактивность можно выбирать произвольное количество элементов. В результате эксперимента получаем ответ всего лишь на вопрос, есть ли в данном количестве элементов радиоактивный. Необходимо за минимальное число проверок найти все радиоактивные элементы.

Очевидно, что эту задачу легко решить за n проверок, выбирая каждый раз по одному элементу (предмету). Но так как каждая проверка связана с определенными материальными расходами, то такое решение будет наихудшим. Это особенно относится к транспортным перевозкам, где проверка проводится в больших по размеру специально оборудованных помещениях. Доставка к ним всего груза по одному элементу (предмету) связана с большими расходами энергоресурсов, сложным маневрированием средств доставки (локомотивов, тягачей, буксиров) и, самое главное, потерей времени.

Рассмотрим более конкретную задачу. Пусть задано n бильярдных шаров, среди которых два шара радиоактивные. Необходимо их обнаружить за минимальное число проверок.

Очевидно, что данная задача может возникнуть в различных практических направлениях. И в тех ситуациях, где каждая проверка связана с существенными материальными потерями, такая задача является важной и актуальной.

Методы решения задачи.

Сформулируем общие принципы, применяемые при решении подобных задач.

1. Если из 2^s шаров радиоактивный (далее активный) один, то его можно найти за s проверок (испытаний): первым шагом проверить половину шаров, затем методом дихотомии проверить то множество шаров, где находится активный шар.

2. Если шаров больше, чем 2^s, то за s шагов нельзя обеспечить отыскание одного активного шара. Предположим противное. Сделаем s испытаний, отмечая наличие радиоактивности плюсом, а ее отсутствие – минусом. По предположению, зная возникшую последовательность знаков, мы можем указать, какой из шаров активный. Но разных последовательностей длины s из двух знаков существует всего 2^s. Указав по каждой из них активный шар, получим нелогичный вывод о том, что те шары, которым не соответствует никакая последовательность знаков, не могут быть активными.

3. Если из n шаров активных 2, то имеется $C_n^2 = \frac{n(n-1)}{2}$ вариантов различных активных пар. Поэтому, если $\frac{n(n-1)}{2} > 2^s$, то за s испытаний не удастся найти активную пару.

4. Если из n шаров мы первым шагом испытываем k шаров, то исход испытания «–» соответствует C_{n-k}^2 вариантам (оба активных шара находятся среди $n-k$ оставшихся), а исход «+» – остальным $C_n^2 - C_{n-k}^2$ вариантам. Если в распоряжении осталось только i испытаний, то обязательно должно быть $C_{n-k}^2 \le 2^i$ и $C_n^2 - C_{n-k}^2 \le 2^i$.

5. Если за s проверок удалось решить задачу для n шаров, то для меньшего количества шаров можно решить задачу также за s проверок. Это вытекает из тех соображений, что тот же результат можно достичь, если дополнить множество шаров до n фиктивными (неактивными) шарами. Это означает, что для двух одинаковых значений s и разных значений n для всех промежуточных значений количества шаров задача решается за те же s проверок.

При решении задачи будем строить стратегию последовательных испытаний. Если очередная проверка (выбор количества и индивидуальных шаров) не зависит от предыдущей проверки, назовем такую стратегию ***независимой***. Если же определение количества шаров и их индивидуальность зависит от исхода предыдущей проверки, то назовем такую стратегию ***пошаговой***.

Для независимой стратегии является определяющим построение разбиения n шаров на m частей $R_n = (k_1, k_2, \ldots, k_m)$, где k_i – количество шаров, испытываемых на i-м шаге ($1 \le i \le m$), и $\sum_{i=1}^{m} k_i = n$. После m испытаний, в зависимости от знаков, задача сводится либо к получению одного множества (с меньшим количеством), содержащего оба активных шара, либо к двум множествам, содержащим по одному активному шару.

Введем обозначения трех функций, которые пригодятся для дальнейших поисков решения задачи: $f_2(n)$ – минимальное число проверок для обнаружения двух активных шаров из n заданных; $f_1(n)$ – минимальное число проверок для обнаружения одного активного шара из n заданных; $g(n_1, n_2)$ – минимальное число проверок для обнаружения двух активных шаров, которые находятся по одному в двух подмножествах из n_1 и соответственно n_2 шаров.

Из принципа 2 вытекает очевидное равенство $f_1(n) = \lceil \log_2 n \rceil$. Однако, как будет показано далее, $g(n_1, n_2) \le f_1(n_1) + f_1(n_2)$, причем возможно и строгое неравенство. В работе [2] доказано ряд утверждений, которые необходимы для построения оптимальных независимых стратегий.

Лемма 1. При независимой стратегии решения задачи

$$f_2(n) \le m + f_2\left(\max_i k_i\right), \ (1 \le i \le m).$$

Это следует из того, что после m проверок знак «+» получит группа с максимальным значением k_i, а остальные получат знак «–».

Лемма 2. $g\left(2^k+1, 2^l+1\right) = k+l+1+\left\lfloor \frac{1}{kl} \right\rfloor (k+l \ge 3)$. Составим таблицу таких пар для $k, l \le 5$, которая пригодится в дальнейшем.

ТАБЛИЦА

n_1, n_2	3,5	3,9	3,17	3,33	5,5	5,9	5,17	5,33	9,9	9,17	9,33	17,17	17,33	33,33
$g(n_1, n_2)$	4	5	6	7	5	6	7	8	7	8	9	9	10	11

Следствие. $g\left[2^\alpha\left(2^k+1\right), 2^\beta\left(2^l+1\right)\right] = \alpha+\beta+k+l+1 \quad (\alpha, \beta \ge 0; k+l \ge 3)$.

Это легко проверить, так как путем деления α раз первой группы и β раз второй группы придем к условию леммы 3. Это дает возможность свести аргументы функции $g(n_1, n_2)$ к нечетным значениям.

Лемма 3. $g\left(2^k+3, 2^l+1\right) = k+l+\left\lfloor \frac{2}{k} \right\rfloor + 1, \ (k, l \ge 2)$.

Лемма 4. $g\left(2^k+5, 2^l+1\right) = k+l+\left\lfloor \frac{3}{k} \right\rfloor + 1, \ (k \ge 3, l \ge 2)$.

Теорема 1. $f_2\left(2^s\right) = 2s \ (s \ge 3)$.

Лемма 5. $f_2(15) = 7$.

Там же доказано, что $f_2(9) = f_2(10) = 6$; $f_2(11) = f_2(12) = f_2(13) = f_2(14) = 7$.

Здесь будет доказана

Теорема 2. $f_2(22) = 8$.

Доказательство проводится путем пошаговой стратегии. Для первой проверки берем 7 шаров. Если первая проверка «–», то $1+f_2(11) = 8$, и задача решена. Если первая проверка «+», то нужно доказать, что $h(7, 15) = 7$. Здесь и далее функция $h(n_1, n_2)$ – минимальное число проверок для обнаружения двух активных шаров в случае, когда один или оба располагаются в подмножестве n_1.

Можно показать, что в сложившейся ситуации к цели приводит только один вариант второй проверки: 3 шара из 7-ми плюс один шар из 15-ти. Если вторая проверка «–», то сравнительно просто можно показать, что $h(4,\ 14) = 6$. В самом деле, теперь для 3-ей проверки берем 8 шаров из 14-ти, и если «+», то очевидно, что $g(4, 8)=5$, если третья проверка «–», то нужно доказать, что $h(4, 6)=5$. Для четвертой проверки берем 4 шара из 6-ти. Если «+», то очевидно, что $g(4, 4)=4$, иначе $h(4, 2)=4$. Последнее верно, так как для пятой проверки остается взять последние 2 шара, и, если «+», то $g(4, 2)=3$, а если «–», то $f_2(4)=3$.

Теперь следует вернуться ко второй проверке и предположить, что она дает, как и первая, положительный результат.

Для дальнейших рассуждений перенумеруем шары числами: 1, 2, …, 22. Пусть первая проверка шаров 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22 дает положительный результат. Точно также дает положительный результат вторая проверка шаров 20, 21, 22, 15.

Теперь для третьей проверки берем шары 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 16, 17.

В случае положительного результата для четвертой проверки берем шары 1, 2, 3, 4, 16. В случае же отрицательного результата третьей проверки для четвертой проверки берем шары 9, 10, 11, 12, 18.

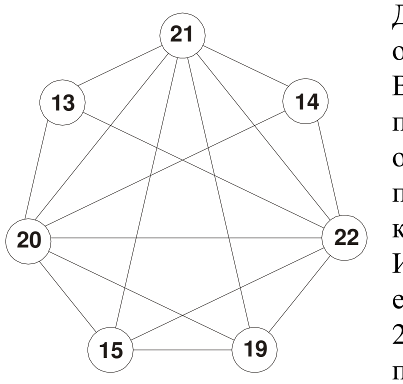
В зависимости от результатов третьей и четвертой проверок возможен один из четырех вариантов, первые три из которых идентичны с точностью до нумерации шаров.

(+, +, +, +). Пятая проверка – шары 16, 20. Если «–», то один активный среди 1, 2, 3, 4, а второй – 21 или 22. Если пятая проверка «+», то шестая проверка – шар 16. Если «+», то один шар – 16, а второй среди 15, 20, 21, 22. Если шестая проверка «–», то один шар – 20, а другой – среди 1, 2, 3, 4.

(+, +, +, –). Пятая проверка – шары 17, 20. Если «–», то один активный среди 5, 6, 7, 8, а второй – 21 или 22. Если пятая проверка «+», то шестая проверка – шар 17. Если «+», то один шар – 17, а второй среди 15, 20, 21, 22. Если шестая проверка «–», то один шар – 20, а другой – среди 5, 6, 7, 8.

(+, +, –, +). Пятая проверка – шары 18, 20. Если «–», то один активный среди 9, 10, 11, 12, а второй – 21 или 22. Если пятая проверка «+», то шестая проверка – шар 18. Если «+», то один шар – 18, а второй среди 15, 20, 21, 22. Если шестая проверка «–», то один шар – 20, а другой – среди 9, 10, 11, 12. В любом из этих трех случаев задача решается либо нахождением одного шара из двух на шестой проверке, либо одного шара из четырех на седьмой и восьмой проверках при условии отрицательного результата пятой проверки. Если же пятая проверка дает положительный результат, то шестая проверка определяет один из активных шаров, а седьмая и восьмая уходят на поиск второго шара среди четырех. Остается рассмотреть случай, когда третья и четвертая проверки дают отрицательный результат (+, +, –, –).

Сложившуюся ситуацию удобно изобразить с помощью графа. Вершины графа – номера шаров. Ребра графа – возможные пары активных шаров (рисунок).

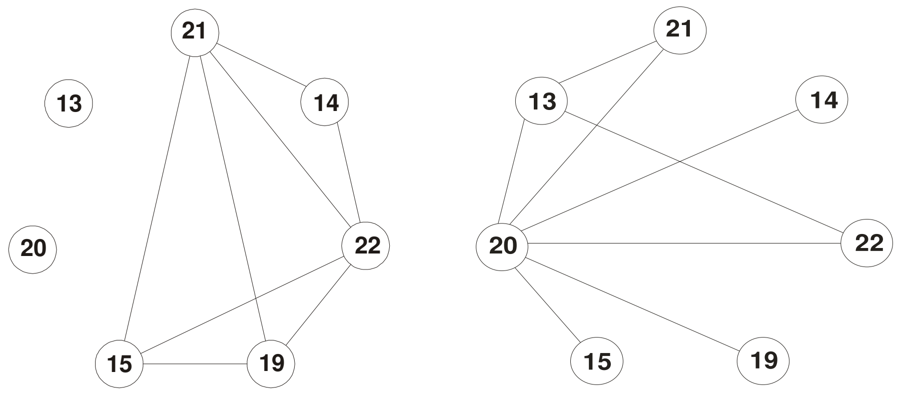


а

Далее покажем, как из 6-ти вариантов выбирается один за четыре проверки (5-я, 6-я, 7-я и 8-я).

В любом случае после пятой проверки из 16-ти подозреваемых пар должно остаться 8. После 6-ой из 8-ми – 4. После 7-ой из 4-х – 2. Восьмая проверка должна определить одну из двух пар, которая и будет решением задачи.

Из анализа графа видно, что для пятой проверки есть шесть вариантов выбора шаров: 13 и 20, 13 и 21, 13 и 22, 14 и 20, 14 и 21, 14 и 22. Пусть пятая проверка – шары 13 и 20.



б в

РИСУНОК

Как при «–», так и при «+» для дальнейшего рассмотрения остается подграф, содержащий по 8 ребер. Теперь несложно спланировать оставшиеся три проверки для выделения одного из 16-ти вариантов. Так при получении «–» в результате первой проверки выбираем для шестой проверки шар 22 (можно было бы 21). При получении «+» в результате пятой проверки для шестой выбираем шары 13 и 14 (можно было бы 13 и 15 или 13 и 19, или 21 и 22). Здесь возможны варианты.

Рассмотрены все возможные варианты, и тем самым доказано, что $f_2(22)=8$. Однако уместно сделать следующее замечание. После получения положительного результата при первой проверке 7-ми шаров число подозреваемых пар $C_h(7,\ 15)=C_7^2+7\cdot 15=21+105=126$. Если для второй проверки выбрать 9 шаров из 15-ти, то $C_g(7,\ 9)=7\cdot 9=63$ и $C_h(7,\ 6)=C_7^2+7\cdot 6=21+42=63$.

Казалось бы, деление подозреваемых пар ровно пополам – залог успеха. Между тем, $h(7, 6) > 6$, так как невозможно выделить группу шаров для текущей третьей проверки, которая разобьет число подозреваемых пар на 63=31+32. Для того чтобы это стало очевидным, достаточно мысленно представить сложившуюся ситуацию с помощью графа с тринадцатью вершинами и шестидесятью ребрами.

Таким образом, единственно перспективным вариантом выбора шаров для второй проверки, в случае положительного результата первой, является предложенный здесь подход. Хотя в данном случае при отрицательном результате остается 62 варианта, а в случае положительного – 64. Этим и объясняется сложность и громоздскость доказательства теоремы. Хотя, по всей видимости, не существует более простого доказательства.

В.І. Білецький, Г.П. Донець, Е.І. Ненахов

ПРО ОДНУ ЗАДАЧУ НЕОБМЕЖЕНОГО КОМБІНАТОРНОГО РОЗПІЗНАВАННЯ

Розглядується одна задача, що відноситься до необмежених комбінаторних задач розпізнавання. За допомогою мінімальної кількості тестів на радіацію довільної вибірки із множини кульок необхідно знайти дві радіоактивних. Доводиться ряд тверджень, які потрібні для побудови оптимальної стратегії. Приводиться розв'язок задачі для 15 і 22 кульок.

V.I. Biletsky, G.A. Donets, E.I. Nenakhov

ONE PROBLEMS OF UNLIMITED COMBINATORIAL RECOGNITION

The problem, concerping unlimited combinatorial problems of recognition, is analyzed. With the help of minimal amount of tests it is necessary to detect 2 radioactive balls from a set of balls. A number of assertions is proved, necessary to construct an optimal strategy. The problem solutions are provided in the cases of 15 and 22 balls.

1. *Білецький В.І., Донець Г.П., Ненахов Е.І.* Комбінаторне розпізнавання. Задачі та їх розв'язування // Теорія оптимальних рішень. – 2012. – С. 21–29.
2. *Донец Г.А., Кузнецов С.Т.* Об одной комбинаторной задаче логического типа // Там само. – 2012. – С. 101–108.

Получено 02.04.2013