Рассматривается подход, который может быть полезным при решении задачи о раскраске плоских графов четырьмя красками.

УДК 519.1

В.Б. ПАВЛЕНКО

ПРОГРАММНАЯ РЕАЛИЗАЦИЯ МЕТОДА РЕШЕНИЯ СИСТЕМ УРАВНЕНИЙ В КЛАССАХ ВЫЧЕТОВ ПО МОДУЛЮ 3

Введение. Рассматривается подход, который может быть полезным при решении задачи о раскраске плоских графов четырьмя красками. Также в статье делается программная реализация, подтверждающая расчеты и демонстрирующая работу алгоритма.

Рассмотрим максимальный четырехсвязный планарный граф G. Если он правильно раскрашен четырьмя цветами, то его ребра можно так раскрасить тремя цветами, что в каждой его треугольной грани все ребра будут окрашены по разному. Обозначим номера цветов цифрами 0, 1, 2, в двоичной записи имеем: (00), (01), (10). Обозначим x_i и $y_i, i = 1, 2, 3$ соответственно первый и второй разряды. Тогда, раскраска ребер будет эквивалентна решению системы уравнений для каждого треугольника в кольце вычетов по модулю 2 – Z_2:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 \equiv 1(\text{mod } 2), \\ y_1 + y_2 + y_3 \equiv 1(\text{mod } 2), \\ y_1x_1 \equiv y_2x_2 \equiv y_3x_3 \equiv 0(\text{mod } 2). \end{cases}$$

Назовем y_i двойственными переменными к x_i [1]. По теореме Татта [2] рассматриваемый граф G будет гамильтоновым. Гамильтонов цикл делит граф на две области R_1 и R_2. Если для G построить двойственный граф G', то областям R_1 и R_2 будут соответствовать два произвольных дерева со степенью ветвления 3, которые будут соединяться друг с другом ребрами, двойственными к ребрам гамильтонова цикла.

Пусть оба этих дерева являются простыми цепями [3]. Занумеруем ребра гамильтонова цикла последовательно по часовой стрелке. Как видно из рис. 1, внутренние ребра области R_1 естественным образом упорядочиваются.

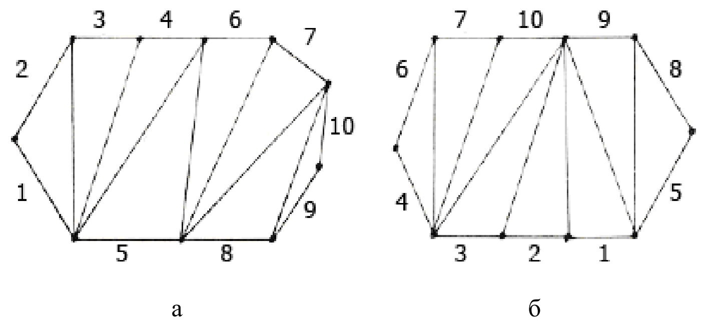

РИС. 1. Пронумерованные области R_1 и R_2

Любой правильной раскраске вершин графа G соответствует такая раскраска в три цвета его ребер, что в каждом треугольнике все три ребра имеют разные цвета, которые обозначим 0, 1, –1. Пусть x_i – цвет ребра под номером i гамильтонова цикла. Тогда, для первых двух ребер справедливо $x_1 \equiv x_2 (\mathrm{mod}\ 3)$.

Пусть a_j, (j=1,2,.., n – 2) – переменные, соответствующие цветам внутренних ребер. Тогда, для правильной раскраски $a_1 \equiv (-x_1 - x_2)(\mathrm{mod}\ 3)$. В следующем треугольнике $x_3 \not\equiv a_1 (\mathrm{mod}\ 3)$ и тогда $x_1 + x_2 + x_3 \not\equiv 0 (\mathrm{mod}\ 3)$.

Продолжая те же рассуждения, получим систему неравенств, дополненную одним равенством [4]:

$$\left.\begin{aligned}
&x_1 - x_2 \not\equiv 0\\
&x_1 + x_2 + x_3 \not\equiv 0\\
&x_1 + x_2 - x_3 - x_4 \not\equiv 0\\
&x_1 + x_2 - x_3 + x_4 + x_5 \not\equiv 0\\
&x_1 + x_2 - x_3 + x_4 - x_5 - x_6 \not\equiv 0\\
&x_1 + x_2 - x_3 + x_4 - x_5 + x_6 + x_7 \not\equiv 0\\
&x_1 + x_2 - x_3 + x_4 - x_5 + x_6 - x_7 - x_8 \not\equiv 0\\
&x_1 + x_2 - x_3 + x_4 - x_5 + x_6 - x_7 + x_8 + x_9 \not\equiv 0\\
&x_1 + x_2 - x_3 + x_4 - x_5 + x_6 - x_7 + x_8 - x_9 - x_{10} \equiv 0
\end{aligned}\right\} (\mathrm{mod}\, 3)\,. \qquad (1)$$

Для области R_2 получается аналогичная система, которую назовем двойственной к данной.

$$\left.\begin{array}{l} x_4 - x_6 \not\equiv 0 \\ x_4 + x_6 + x_7 \not\equiv 0 \\ x_4 + x_6 - x_7 - x_{10} \not\equiv 0 \\ x_4 + x_6 - x_7 + x_{10} + x_3 \not\equiv 0 \\ x_4 + x_6 - x_7 + x_{10} - x_3 - x_2 \not\equiv 0 \\ x_4 + x_6 - x_7 + x_{10} - x_3 + x_2 + x_1 \not\equiv 0 \\ x_4 + x_6 - x_7 + x_{10} - x_3 + x_2 - x_1 - x_9 \not\equiv 0 \\ x_4 + x_6 - x_7 + x_{10} - x_3 + x_2 - x_1 + x_9 + x_8 \not\equiv 0 \\ x_4 + x_6 - x_7 + x_{10} - x_3 + x_2 - x_1 + x_9 - x_8 - x_5 \equiv 0 \end{array}\right\} (\operatorname{mod} 3). \qquad (2)$$

Превратим данные неравенства в равенства и запишем их в виде матрицы A. Пусть $\alpha = (x, (-1)^{\alpha_7}, (-1)^{\alpha_6}, ..., (-1)^{\alpha_0}, 0)^T$, $\beta = (x, (-1)^{\beta_7}, (-1)^{\beta_6}, ..., (-1)^{\beta_0}, 0)^T$. Перестановочная матрица P соответствует перестановке:

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 4 & 6 & 7 & 10 & 3 & 2 & 1 & 9 & 8 & 5 \end{pmatrix}$$

или в циклическом виде (1, 4, 10, 5, 3, 7)(2, 6)(8, 9). Система (1 – 2) имеет вид:

$$A \cdot X = \overline{\alpha}; \;\; P \cdot A \cdot P^{-1} \cdot X = \overline{\beta}. \qquad (3)$$

Лемма. Для матрицы A системы (3) справедливо $A \equiv A^{-1} (\operatorname{mod} 3)$.

Учитывая это систему (3) можно переписать в виде

$$X = A \cdot \overline{\alpha}; \;\; P \cdot A \cdot P^{-1} \cdot A \cdot \overline{\alpha} = \overline{\beta}. \qquad (4)$$

Если найдутся соответствующие значения $\overline{\alpha}, \overline{\beta}$, то можно найти решение исходной системы (1 – 2) и соответствующую раскраску графа G. Рассмотрим систему (1). Определитель матрицы A отличен от нуля, поэтому задавая различные значения вектора $\overline{\alpha}$, всегда можно получить решения данной системы, которых будет $3 \cdot 2^{n-2}$ в соответствии с размерностью вектора $\overline{\alpha}$. Поставим задачу упорядочить решения системы (1) таким образом, чтобы параметру u пробегающему значения от 0 до $3 \cdot 2^{n-2} - 1$, соответствовало только одно такое решение. Рассмотрим параметры вектора $\overline{\alpha}$ в виде $\alpha_i = \left\lfloor \frac{u}{2^i} \right\rfloor$.

Теорема. Решением системы (1) является вектор X, у которого $x_1 = 1 - \alpha_{n-2}$, $x_i = (-1)^i (\alpha_{n-i} - \alpha_{n-i-1})$, $\left(i = \overline{1, n-1}\right)$.

Доказательство. Согласно (4) получаем решение

$x_1 = x$;

$x_2 = x - (-1)^{a_7}$;

$x_3 = x - (-1)^{a_7} + (-1)^{a_6}$;

…;

$$x_9 = x - (-1)^{a_7} + (-1)^{a_6} - (-1)^{a_5} + (-1)^{a_4} - (-1)^{a_3} + (-1)^{a_2} - (-1)^{a_1}; \qquad (5)$$

$x_{10} = x + (-1)^{a_0}$.

Докажем равенство.

$$(-1)^{a_i} \equiv (1 + \alpha_i + \alpha_{i+1})(\mathrm{mod}\,3). \qquad (6)$$

Если $\alpha_i = 2p$, то $\alpha_{i+1} = p$ и тогда $(-1)^{2p} = 1 = (1 + 2p + p) \equiv 1(\mathrm{mod}\,3)$. Если $\alpha_i = 2p + 1$, то $\alpha_{i+1} = p$ и тогда $(-1)^{2p+1} = -1 = (1 + 2p + 1 + p) \equiv -1(\mathrm{mod}\,3)$. Подставляя эти значения в (5) при $\alpha_0 = u$, получаем решение системы в виде:

$x_1 = x$, $x_2 = x - 1 + a_8$, $x_3 = x - 1 + a_8 - a_7$, …,

$$x_9 = x - 1 + a_8 - a_7 + a_6 - a_5 + a_4 - a_3 + a_2 - a_1 + u, \; x_{10} = x - 1 + a_8 - u + 1. \qquad (7)$$

Вместо x можно подставлять любое значение, которое для u равно 0, 1, – 1 с одинаковой частотой. Пусть $x_1 = 1 - a_8$, тогда: $x_2 = a_8 - a_7$, $x_3 = -a_7 + a_6$, $x_4 = a_6 - a_5$, $x_5 = -a_5 + a_4$, $x_6 = a_4 - a_3$, $x_7 = -a_3 + a_2$, $x_8 = a_2 - a_1$, $x_9 = -a_1 + u$, $x_{10} = -u + 1$.

Что и требовалось доказать.

Аналогичные формулы с помощью вектора $\bar{\beta}$ можно получить и для системы (2), полагая $\beta_j = \left\lfloor \dfrac{\upsilon}{2^j} \right\rfloor$. Решением системы (1) – (2) будет такая пара (u, υ), для которой справедливы соотношения: $-1 + a_8 = -\beta_3 + \beta_2$, $a_8 - a_7 = \beta_4 - \beta_3$, $-a_7 + a_6 = -\beta_5 + \beta_4$, $a_6 - a_5 = 1 - \beta_8$, $-a_5 + a_4 = 1 - \upsilon$, $a_4 - a_3 = \beta_8 - \beta_7$, $-a_3 + a_2 = -\beta_7 + \beta_6$, $a_2 - a_1 = -\beta_1 + \upsilon$.

Докажем формулу $\alpha_i - \alpha_{i+1} = \left\lfloor \dfrac{u + 2^i}{2^{i+1}} \right\rfloor$. Для этого представим $u = k \cdot 2^{i+1} + l$. Если $l \le 2^i$, то $\alpha_i - \alpha_{i+1} = 2k - k = k$. Если $l \ge 2^i$, то $\alpha_i - \alpha_{i+1} = 2k + 1 - k = k + 1$. И в том, и в другом случае это равно выражению в правой части. Первое уравнение преобразуется в

$$1 - \left\lfloor \frac{u}{2^8} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{u + 2^2}{2^3} \right\rfloor. \qquad (8)$$

Рассмотрим плоскую систему координат (u,υ) и отметим на ней целочисленные точки, удовлетворяющие этому уравнению. Для левой части равенства $0 \in [2^8, 2^9);\ 1 \in [0, 2^8);\ -1 \in [2^9, 3\cdot 2^8)$. Для правой части равенства: $0 \in [-4, -4);\ 1 \in [4, 12);\ -1 \in [12, 20)$. Концы данных интервалов повторяются с периодом $t = 24$, при этом круглые скобки означают, что правые границы не включаются в область определения. Областям, где левые и правые части уравнения равны 0, соответствуют прямоугольники, левая нижняя вершина которых имеет координаты $(2^8, -4)$, $(2^8, 20)$, $(2^8, 44)$ и т. д. Рассмотрим теперь второе уравнение (7):

$$-\left\lfloor \frac{u+2^7}{2^8} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{u+2^3}{2^4} \right\rfloor. \tag{9}$$

Для левой части равенства имеем:

$$0 \in [-2^7, 2^7);\ 1 \in [2^7, 3\cdot 2^7);\ -1 \in [3\cdot 2^7, 5\cdot 2^7).$$

Для правой части равенства:

$$0 \in [-8, 8);\ 1 \in [8, 24);\ -1 \in [24, 40).$$

Здесь границы интервалов повторяются с периодом $t = 48$. Для этого уравнения будут свои прямоугольники, где совпадают значения правой и левой частей уравнения. Решение системы необходимо искать на пересечении прямоугольников, построенных для первого уравнения и соответствующих прямоугольников второго уравнения.

В результате этих операций получим прямоугольники пересечений с основанием, равным 2^7 и разной высотой, но все с периодом $t = 48$. Имеем $(0, 2^7)\times(-4, 4)$; $(2^7, 2^8)\times(20, 24)$; $(2^8, 3\cdot 2^7)\times(8, 12)$; $(3\cdot 2^7, 2^9)\times(28, 36)$; $(2^9, 5\cdot 2^7)\times(36, 40)$; $(5\cdot 2^7, 3\cdot 2^8)\times(40, 44)$. Вычисляя последовательно прямоугольники пересечений решений для последующих уравнений, получим в конце решение системы (1) – (2).

Поставим задачу программной реализации данного алгоритма. Пусть дан граф G, для которого построен двоистый, аналогично рис. 1. Для реализации поставленной задачи воспользуемся средой программирования Visual Basic 2010 Express [5]. В верхней части программы для удобства восприятия выведены обе области R_1 и R_2. В нижнем поле выводятся результаты расчетов и пояснения программы по ним. Нажав на кнопку «Провести расчеты», в директории с программой создается файл «Record.txt», в котором хранятся расчеты программы, которые могут быть использованы в других расчетах. При последующих выполнениях программы, файл будет перезаписываться (рис. 2).

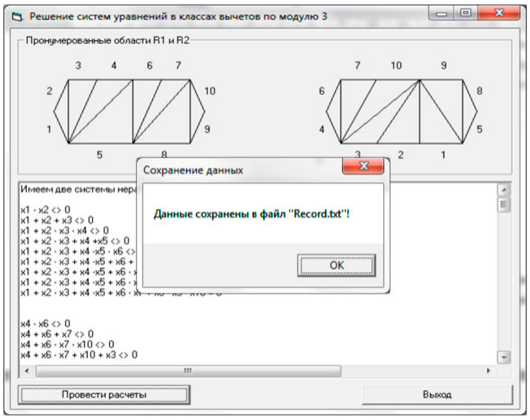

РИС. 2. Рабочая область программы

Заключение. Обработка данных, которые получаются в результате решения очередного уравнения, с каждым шагом по объему увеличивается относительно переменной u, но еще быстрее уменьшается относительно переменной υ, так как часть прямоугольников по высоте пропадает. Разработанная программа дает решение лишь для частного случая и в дальнейшем следовало бы расширить функционал программы и добавить возможность изменения параметров.

В.Б. Павленко

ПРОГРАМНА РЕАЛІЗАЦІЯ МЕТОДУ РІШЕННЯ СИСТЕМ РІВНЯНЬ
У КЛАСАХ ВІДРАХУВАНЬ ЗА МОДУЛЕМ 3

Розглядається підхід, який може бути корисним при вирішенні задачі про розфарбовування плоских графів чотирма фарбами.

V.B. Pavlenko

SOFTWARE IMPLEMENTATION FOR SYSTEMS OF EQUATIONS IN THE CLASS OF RESIDUES MODULO 3

The article proposes an approach that can be useful in solving the problem of coloring planar graphs with four colors.

1. *Харари Ф.* Теория графов. – М.: Мир, 1973. – 300 с.
2. *Tutte W.T., Whitney H.* Kempe chains and the four color problem. – Studies in Graph Theory, Studies in Math., Math. Assoc. Amer., 1976. – С. 241 – 281.
3. *Кристофидес Н.* Теория графов. Алгоритмический подход. – М.: Мир, 1978. – 432 с.
4. *Донец А.П.* Теоретико-числовой подход к решению некоторых задач теории графов. Дис. ... д-ра физ.-мат. наук. – К., 1997. – 162 с.
5. *Зиборов В.В.* Visual Basic 2010 на примерах. – БХВ-Петербург, 2010. – 336 с.

Получено 11.03.2013