Теорія оптимальних рішень

УДК 519.8

А.П. ЛИХОВИД

ПРИМЕНЕНИЕ R-АЛГОРИТМОВ ДЛЯ РЕШЕНИЯ НЕКОТОРЫХ ЗАДАЧ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ С ДИСКРЕТНЫМ ВРЕМЕНЕМ*

Рассматривается исследование эффективности применения r-алгоритмов при решении некоторых практически важных задач оптимального управления с дискретным временем. Приведены результа-ты вычислительных экспериментов для тестовых задач с использованием различных модификаций r-алгоритма.

Как известно, методы недифферен-цируемой оптимизации на основе r-алгоритмов нашли широкое применение при решении разнообразных задач математического программирования (см., например, [1]). Ниже рассматривается решение с помощью r-алгоритма некоторых практически важных задач оптимального управления с дискретным временем.

Постановка задачи. Предположим, что динамический процесс на временном интервале от 0 до Т может быть представлен как многошаговый, т.е. этот интервал может быть разбит на n последовательных шагов длительности которых примем равными $\Delta t_k, k = 0,...,n-1$.

Пусть в евклидовом пространстве R^2 (результаты легко обобщаются и на случай пространства большей размерности) имеется материальная точка массы $m = 1$, динамика которой описывается следующими разностными уравнениями:

$$x_{k+1} = x_k + v_k \Delta t_k + \frac{u_k \Delta t_k^2}{2}, \quad k = 0,...,n-1, \tag{1}$$

$$v_{k+1} = v_k + u_k \Delta t_k, \quad k = 0,...,n-1. \tag{2}$$

* Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Украинского научно-технологического центра (грант №1625).

Здесь вектор $x_k = (x_{k1}, x_{k2})$ имеет значение координат точки после $k-1$-го шага, вектор $v_k = (v_{k1}, v_{k2})$ является вектором скорости после $k-1$-го шага, вектор $u_k = (u_{k1}, u_{k2})$ – искомое управление на k-м шаге. Допустимые управления – произвольные значения в шаре с заданным радиусом r, т.е. $\|u_k\|^2 \le r^2$.

Пусть заданы начальное и конечное состояния объекта, т.е. значения векторов $x_0 = \overline{x}_0$, $x_n = \overline{x}_n$ и $v_0 = \overline{v}_0$, $v_n = \overline{v}_n$. Будем рассматривать следующую постановку оптимизационной задачи: используя допустимые управления необходимо перевести объект за n шагов из начального состояния $\overline{x}_0, \overline{v}_0$ в заданное конечное состояние $\overline{x}_n$, $\overline{v}_n$ с учетом минимизации критерия суммарной экономии топлива, который можно принять пропорциональным значениям $\|u_k\|^2$ (здесь $\|\cdot\|$ – евклидова норма).

Предположим для простоты, что $x_n = 0$, $v_n = 0$, $r = 1$ и $\Delta t_k = 1, k = 0,...,n-1$. Тогда вышеописанную задачу можно представить в следующем виде: найти управления $u_k, k = 0,...,n-1$, которые минимизируют целевую функцию

$$f = \sum_{k=0}^{n-1} \|u_k\|^2 \tag{3}$$

при ограничениях

$$x_{k+1} = x_k + v_k + \frac{u_k}{2}, \quad x_k \in R^2, \quad k = 0,...,n-1, \tag{4}$$

$$v_{k+1} = v_k + u_k, \quad v_k \in R^2, \quad u_k \in R^2, \quad k = 0,...,n-1, \tag{5}$$

$$\|u_k\|^2 \le 1, \quad k = 0,...,n-1, \tag{6}$$

$$x_0 = \overline{x}_0, \tag{7}$$

$$v_0 = \overline{v}_0, \tag{8}$$

$$x_n = 0, \tag{9}$$

$$v_n = 0. \tag{10}$$

Для учета ограничений (6) и (9)–(10) будем применять метод негладких штрафных функций. Тогда задачу (3)–(10) можно представить в следующем виде:

$$f = \sum_{k=0}^{n-1} \|u_k\|^2 + \rho_x \sum_{i=1}^{2} |x_{ni}| + \rho_v \sum_{i=1}^{2} |v_{ni}| + \rho_u \max_k \{0, \|u_k\|^2 - 1\} \qquad (11)$$

при ограничениях

$$x_{k+1} = x_k + v_k + \frac{u_k}{2}, \quad x_k \in R^2, \quad k = 0,...,n-1, \qquad (12)$$

$$v_{k+1} = v_k + u_k, \quad v_k \in R^2, \quad u_k \in R^2, \quad k = 0,...,n-1, \qquad (13)$$

$$x_0 = \bar{x}_0, \qquad (14)$$

$$v_0 = \bar{v}_0. \qquad (15)$$

где $\rho_x > 0, \rho_v > 0, \rho_u > 0$ – штрафные коэффициенты.

Как легко заметить, целевая функция (11) зависит от состояния объекта в конце процесса, которое в свою очередь зависит от начального состояния, и примененных на каждом шаге управлений. Задача (11)–(15) является задачей недифференцируемой оптимизации. Для ее решения можно использовать алгоритмы субградиентного типа, в частности различные модификации *r*-алгоритма [1, 2].

Аналогично можно рассматривать и другие модели, например, оптимальные по времени, с ограничением по скорости и т.п.

Результаты вычислительных экспериментов. Для сравнения были выбраны r-алгоритм с адаптивной регулировкой шага [1], монотонная модификация r-алгоритма [2] и известный пакет LOQO [3]. Эксперименты проводились на персональном компьютере IBM PC/Pentium III/750МГц/256Мгб/Windows98. Исследовательские программы были реализованы на языке программирования С++. Для пакета LOQO, который решал задачу в виде квадратичной модели, входные данные готовились на языке AMPL [4]. В качестве метода поиска минимума по направлению для монотонного алгоритма использовался алгоритм половинного деления. Счет монотонного r-алгоритма прекращался при выполнении условия $\left\|B_{k+1}^T g_f(x_k)\right\| \le 10^{-16}$, а r-алгоритма с адаптивной регулировкой шага – при выполнении $\|x_{k+1} - x_k\| \le 10^{-6}$ (здесь k – номер итерации). Коэффициент растяжения α для обеих модификаций r-алгоритма полагался равным 2. В тестовых примерах значения всех штрафных коэффициентов были равны 1000.

Ниже приводятся результаты вычислительных экспериментов для двух тестовых примеров. В табл. 1 и 4 представлены сравнительные результаты для различных алгоритмов полученного значения функции и времени решения, а в табл. 2–3 и 5 приводятся полученные монотонным r-алгоритмом решения для некоторых задач.

Пример 1. $x_0 = (1,0), v_0 = (0,0), r = 1$.

ТАБЛИЦА 1. Решение тестовых задач для примера 1 при различных n

n	r-алгоритм с адаптивной регулировкой шага		Монотонный r-алгоритм		LOQO	
	f^*	t,c	f^*	t,c	f^*	t,c
2	2.0017744	0.01	2.0000000	0.05	1.9999999	0.01
9	0.0166666	0.06	0.0166666	0.06	0.0166666	0.02
19	0.0017543	0.16	0.0017543	0.22	0.0017543	0.11
29	0.0004926	0.28	0.0004926	0.44	0.0004926	0.22

ТАБЛИЦА 2. Полученное решение для примера 1 при n=2

k	u_k	x_k	v_k
0	-1	1	0
1	1	0.5	-1
2	–	5.59275e-013	-1.97331e-012

ТАБЛИЦА 3. Полученное решение для примера 1 при n=9

k	u_k	x_k	v_k
0	-0.0666667	1	0
1	-0.05	0.966667	-0.0666667
2	-0.0333333	0.875	-0.116667
3	-0.0166667	0.741667	-0.15
4	-2.50272e-010	0.583333	-0.166667
5	0.0166667	0.416667	-0.166667
6	0.0333333	0.258333	-0.15
7	0.05	0.125	-0.116667
8	0.0666667	0.0333333	-0.0666667
9	–	-1.52656e-016	-2.77556e-017

Пример 2. $x_0 = (100,100), v_0 = (-10,-10), r = 10$.

ТАБЛИЦА 4. Решение тестовых задач для примера 2 при различных n

n	*r*-алгоритм с адаптивной регулировкой шага		Монотонный *r*-алгоритм		LOQO	
	f^*	t,c	f^*	t,c	f^*	t,c
9	184.5833333	0.05	184.5833333	0.11	184.5833334	0.05
19	15.9210526	0.11	15.9210526	0.21	15.9210523	0.16
29	13.3374384	0.16	13.3374384	0.33	13.3374384	0.27

ТАБЛИЦА 5. Полученное решение для примера 2 при n=9

k	u_{k1}	x_{k1}	v_{k1}	u_{k2}	x_{k2}	v_{k2}
0	-2.555	100	-10	-2.55556	100	-10
1	-1.6388	88.7222	-12.555	-1.63889	88.7222	-12.5556
2	-0.7222	75.3472	-14.194	-0.72222	75.3472	-14.1944
3	0.1944	60.7917	-14.9167	0.194444	60.7917	-14.9167
4	1.1111	45.9722	-14.7222	1.11111	45.9722	-14.7222
5	2.0277	31.8056	-13.6111	2.02778	31.8056	-13.6111
6	2.9444	19.2083	-11.5833	2.94445	19.2083	-11.5833
7	3.8611	9.09722	-8.63889	3.86111	9.09722	-8.63889
8	4.7777	2.38889	-4.77778	4.77778	2.38889	-4.77778
9	–	9.76e-015	0	–	-3.55e-014	-1.77e-015

Обе модификации *r*-алгоритма нашли оптимальное решение для всех тестовых задач с высокой точностью, при этом время решения сравнимо с полученным для пакета LOQO. Результаты расчетов показывают, что для решения оптимизационных задач управления с дискретным временем можно эффективно использовать различные варианты *r*-алгоритма.

О.П. Лиховид

ВИКОРИСТАННЯ *R*-АЛГОРИТМІВ ДЛЯ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ДЕЯКИХ ЗАДАЧ ОПТИМАЛЬНОГО КЕРУВАННЯ З ДИСКРЕТНИМ ЧАСОМ

Розглядається дослідження ефективності застосування r-алгоритмів при розв'язуванні деяких практично важливих задач оптимального керування з дискретним часом. Наведені результати обчислювальних експериментів для тестових задач з використанням різних модифікацій r-алгоритму.

O.P. Lykhovyd

USING R-ALGORITHMS FOR SOLUTION OF SOME OPTIMAL CONTROL PROBLEMS WITH DISCRETE TIMES

The investigation of efficiency of r-algorithms for solution of some practically important optimal control problems with discrete time is considered. The computational results for test problems with usage of various modifications of r-algorithm are given.

1. *Shor N.Z.* Nondifferentiable Optimization and Polynomial Problems. – Boston-Dordrecht-London: Kluwer Acad. Publ., 1998. – 412 p.
2. *Шор Н.З.* Монотонные модификации r-алгоритмов и их приложения // Кибернетика и системный анализ. – 2002. – № 6. – С. 74-96.
3. *Vanderbei R.J.* LOQO: An interior point code for quadratic programming // Technical Report SOR-94-15, School of Engineering and Applied Science, Department of Civil Engineering and Operations Research, Princeton University. – 1994. – 198 p.
4. *Fourer R., Gay D., Kernighan B.* AMPL: A Modeling Language for Mathematical Programming. Duxbury Press-Brooks-Cole Publishing Company. – 1993. – 351 p.

Получено 19.09.2003