КОМПЬЮТЕРНАЯ МАТЕМАТИКА

Экспертные системы, методы индуктивного вывода

Досліджено чисті першопорядкові логіки часткових однозначних, тотальних неоднозначних та часткових неоднозначних предикатів. Розглянуто низку розширень цих логік за допомогою узагальнених реномінацій та спеціальних предикатів-індикаторів наявності значення для змінних. Описано мови та семантичні моделі таких логік, досліджено їх семантичні властивості, для різних класів цих логік запропоновано числення секвенційного типу.

УДК 004.42:510.69

С.С. ШКІЛЬНЯК

КОМПОЗИЦІЙНО-НОМІНАТИВНІ ЛОГІКИ ЧАСТКОВИХ ТА НЕОДНОЗНАЧНИХ ПРЕДИКАТІВ

Вступ. Розвиток інформаційних технологій та їх проникнення в усі сфери діяльності людини роблять особливо актуальною задачу створення ефективних і надійних програмних систем. Успішне вирішення цієї задачі неможливе без широкого використання понять і методів математичної логіки.

Логіка тісно пов'язана з програмуванням із самого початку його виникнення. В рамках математичної логіки запропоновано перші формалізації поняття алгоритму, мови програмування базуються на тих чи інших уточненнях цього поняття. Апарат математичної логіки (алгебра логіки) лежить в основі схемотехніки комп'ютерів. Подальший розвиток програмування та пов'язана з цим поява нових задач і проблем характеризуються залученням до їх розв'язку все нових понять і засобів математичної логіки (теорія доведень, модальні, темпоральні, епістемічні, динамічні, алгоритмічні, програмні логіки тощо).

На даний момент створено [1] багато різноманітних логічних систем, які успішно використовуються в програмуванні. Такі системи зазвичай базуються на класичній логіці предикатів. Проте поява нових застосувань логіки в інформатиці та програмуванні висвітлила принципові обмеження класичної логіки, які ускладнюють її використання. Ця логіка базується на традиційних математичних структурах однозначних тотальних скінченно-арних відображень, тому недостатньо враховує неповноту, частковість, структу-рованість інформації про предметну область.

Таким чином, на перший план висувається проблема побудови нових, програмно-орієнтованих логік. Природною основою такої побудови є спільний для логіки й програмування композиційно-номінативний підхід (КНП). На його базі розроблено низку різноманітних логічних систем, що знаходяться на різних рівнях абстрактності й загальності (див., напр., [2–7]). Логіки, збудовані на основі КНП, названо композиційно-номінативними (КНЛ). Вони базуються на загальних класах часткових відображень, заданих на довільних наборах іменованих значень – квазіарних відображень.

Мета даної роботи – дослідження різних класів чистих першопорядкових КНЛ (ЧКНЛ) часткових однозначних, тотальних неоднозначних і часткових неоднозначних предикатів. Поряд із ЧКНЛ базового рівня розглянуто їх розширення: ЧКНЛРР – це ЧКНЛ із розширеними реномінаціями; ε-ЧКНЛ – це ЧКНЛ із предикатами-індикаторами наявності значення для змінних; ε-ЧКНЛРР – це логіки, які поєднують можливості ЧКНЛРР та ε-ЧКНЛ. Описано мови та семантичні моделі таких логік, досліджено їх семантичні властивості. Для розглянутих класів ЧКНЛ запропоновано числення секвенційного типу.

Поняття, які тут не визначаються, тлумачимо в сенсі робіт [2, 4, 5].

Основи композиційно-номінативного підходу. КНП задає принципи визначення і дослідження формальних мов програм та логічних систем (див. [2]). Він опирається на принцип розвитку як сходження від абстрактного до конкретного і базується на принципах композиційності та номінативності. Принцип композиційності трактує засоби побудови програм (функцій, предикатів) як алгебраїчні операції. Для логіки це означає зведення логічних зв'язок і кванторів до композицій предикатів. Принцип номінативності означає необхідність використання відношень іменування для побудови семантичних моделей програм і даних.

Згідно КНП програмні поняття формалізуємо за допомогою композиційно-номінативних систем. Центральним поняттям логіки є поняття предиката. З математичного погляду предикати – це спеціальні функції вигляду $D\to\{T,F\}$, де $\{T,F\}$ – множина істиннісних значень. Тому класи предикатів теж можна задавати за допомогою композиційно-номінативних систем. Це дозволяє подавати і вивчати логічні та програмні системи в єдиному стилі.

Логіки, збудовані на основі КНП, названо композиційно-номінативними. Передумовою їх виникнення стала необхідність посилення можливостей класичної логіки для вирішення нових задач програмування й моделювання.

КНЛ будуємо за семантико-синтаксичною схемою. Це означає наступне.

1. Задаємо інтенсіональні (змістовні) моделі логік. Такі моделі найперше визначаються рівнями розгляду даних, тому для їх задання фіксуємо рівень абстракції розгляду. Інтенсіональні моделі індукують мову логіки відповідного рівня.

2. Будуємо відповідні розглянутому рівню екстенсіональні семантичні моделі – предикатні композиційні системи. Це трійки вигляду (D, Pr, C), де D – мно-

жина (клас) даних, *Pr* – множина (клас) предикатів, заданих на *D*, *C* – множина (клас) композицій (операцій) породження нових предикатів, вона задається множиною базових композицій відповідного рівня. Така система задає алгебру (алгебраїчну систему) даних (*D*, *Pr*) та алгебру предикатів (*Pr*, *C*), терми якої трактуються як формули мови логіки. Композиції визначають універсальні методи побудови предикатів, виступаючи ядром логіки певного типу.

3. Будуємо формально-аксіоматичні числення, які задають синтаксичні аспекти логік. Основні їх класи – формальні системи гільбертівського типу і системи ґенценівського типу (секвенційні числення, системи натурального виведення).

Побудову КНЛ починаємо з гранично-абстрактних рівнів, поступово їх конкретизуючи. На пропозиційному рівні дані трактуються гранично абстрактно. Предикати мають вигляд $A \to \{T, F\}$, де *A* – сукупність абстрактних даних.

На номінативних рівнях дані будуються із більш простих на базі відношень іменування. Найважливішими з номінативних є рівень іменних множин та ієрархічно-номінативний рівень. Іменні множини (ІМ) – це множини пар, перша компонента яких – ім’я, а друга – його значення. Предикати, задані на ІМ, названо квазіарними. На ієрархічно-номінативному рівні дані будуються індуктивно із множин предметних імен та предметних значень.

На рівні ІМ виділяємо реномінативний та першопорядкові (кванторний, кванторно-екваційний, функціональний, функціонально-екваційний) рівні. Визначальною для першопорядкових КНЛ є наявність композицій квантифікації (кванторів). Характерні особливості першопорядкових КНЛ проявляються вже на кванторному рівні, за аналогією з класичною логікою його називають рівнем чистих КНЛ першого порядку. Тому дана робота присвячена дослідженню саме ЧКНЛ.

Іменні множини. *V*-іменна множина (*V*-ІМ) над *A* – це довільна однозначна часткова функція $\delta : V \to A$. Тут *V* і *A* – множини предметних імен і предметних значень. *V*-ІМ подаємо у вигляді $[v_1 \mapsto a_1,...,v_n \mapsto a_n,...]$, де $v_i \in V$, $a_i \in A$, $v_i \neq v_j$ при $i \neq j$. Введемо функцію $asn : {}^V\!A \to 2^V$ так: $asn(\delta) = \{v \in V \mid v \mapsto a \in \delta$ для деякого $a \in A\}$. Операцію $\|_{-x}$ видалення компоненти з іменем *x* для *V*-ІМ вводимо таким чином: $\delta\|_{-x} = \{v \mapsto a \in \delta \mid v \neq x\}$. Поширимо її на множини $X \subseteq V$: $\delta\|_{-X} = \{v \mapsto a \in \delta \mid v \notin X\}$. Операцію ∇ накладки *V*-ІМ δ на *V*-ІМ η задаємо так: $\eta\nabla\delta = \delta \cup (\eta\|_{-asn(\delta)})$.

Операція реномінації $r_{x_1,...,x_n}^{v_1,...,v_n} : {}^V\!A \to {}^V\!A$ визначається [2] так:

$$r_{x_1,...,x_n}^{v_1,...,v_n}(\delta) = \delta\|_{-\{v_1,...,v_n\}} + [v_1 \mapsto \delta(x_1),...,v_n \mapsto \delta(x_n)].$$

Узагальненням операції реномінації є операція розширеної реномінації, яка дає змогу явно задавати відсутність значення для предметних імен, тобто вилучати компоненти з певними іменами. Відсутність значення для імені *x* задаємо парою, де верхнє ім'я – *x*, а відповідне нижнє ім'я – спеціальний символ ⊥.

Операція розширеної реномінації $r_{x_1,...,x_n,\perp,...,\perp}^{v_1,...,v_n,u_1,...,u_m} : {}^V\!A \to {}^V\!A$ визначається [5] так:

$$r_{x_1,...,x_n,\perp,...,\perp}^{v_1,...,v_n,u_1,...,u_m}(\delta) = \delta\|_{-\{v_1,...,v_n,u_1,...,u_m\}} + [v_1 \mapsto \delta(x_1),...,v_n \mapsto \delta(x_n)].$$

Ввівши позначення $\overline{y}$ для $y_1,...,y_n$, замість $r^{v_1,...,v_n}_{x_1,...,x_n}$ та $r^{v_1,...,v_n,u_1,...,u_m}_{x_1,...,x_n,\perp,...,\perp}$ скорочено пишемо $r^{\overline{v}}_{\overline{x}}$ та $r^{\overline{v},\overline{u}}_{\overline{x},\perp}$.

Операції $r^{\overline{v}}_{\overline{y}}$ та $r^{\overline{v},\overline{z}}_{\overline{y},\perp}$ монотонні: $d \subseteq d' \Rightarrow r^{\overline{v},\overline{z}}_{\overline{y},\perp}(d) \subseteq r^{\overline{v},\overline{z}}_{\overline{y},\perp}(d')$ та $r^{\overline{v}}_{\overline{y}}(d) \subseteq r^{\overline{v}}_{\overline{y}}(d')$.

Послідовне застосування двох операцій реномінації можна подати у вигляді однієї операції реномінації, яку назвемо згорткою початкових (див. [2, 5]).

Згортку операцій $r^{\overline{v},\overline{t}}_{\overline{x},\perp}$ (застосовується першою) та $r^{\overline{z},\overline{u}}_{\overline{y},\perp}$ (застосовується другою) позначаємо $r^{\overline{z},\overline{u}}_{\overline{y},\perp} \square^{\overline{v},\overline{t}}_{\overline{x},\perp}$. Тоді маємо: $r^{\overline{z},\overline{u}}_{\overline{y},\perp}(r^{\overline{v},\overline{t}}_{\overline{x},\perp}(d)) = r^{\overline{z},\overline{u}}_{\overline{y},\perp} \square^{\overline{v},\overline{t}}_{\overline{x},\perp}(d)$.

Згортку операцій $r^{\overline{v}}_{\overline{x}}$ та $r^{\overline{z}}_{\overline{y}}$ позначаємо $r^{\overline{z}}_{\overline{y}} \square^{\overline{v}}_{\overline{x}}$. Маємо: $r^{\overline{z}}_{\overline{y}}(r^{\overline{v}}_{\overline{x}}(d)) = r^{\overline{z}}_{\overline{y}} \square^{\overline{v}}_{\overline{x}}(d)$.

Квазіарні предикати та їх композиції. V-квазіарним предикатом на A назвемо довільну (часткову неоднозначну, взагалі кажучи) функцію вигляду $P : {}^VA \to \{T, F\}$. Часткові неоднозначні предикати на множині ${}^VA$ ми трактуємо як відношення між ${}^VA$ та $\{T, F\}$. Такі предикати назвемо предикатами реляційного типу, вони формалізують найпростіше уточнення поняття часткового неоднозначного предиката. У цьому випадку $P(d)$ позначає множину тих значень, які предикат $P : {}^VA \to \{T, F\}$ може прийняти на $d \in {}^VA$.

Областю істинності та областю хибності предиката P назвемо множини

$$T(P) = \{d \in {}^VA \mid T \in P(d)\} \text{ та } F(P) = \{d \in {}^VA \mid F \in P(d)\}.$$

Кожний квазіарний предикат однозначно задається своїми областями істинності та хибності.

V-квазіарний предикат $P : {}^VA \to \{T, F\}$ назвемо:

– неспростовним, якщо $F(P) = \varnothing$;
– виконуваним, якщо $T(P) \neq \varnothing$;
– тотально істинним, якщо $T(P) = {}^VA$;
– тотально хибним, якщо $F(P) = {}^VA$;
– тотожно істинним, якщо $T(P) = {}^VA$ та $F(P) = \varnothing$ (позначаємо його як T);
– тотожно хибним, якщо $T(P) = \varnothing$ та $F(P) = {}^VA$ (позначаємо його як F);
– всюди невизначеним, якщо $T(P) = \varnothing$ та $F(P) = \varnothing$ (позначаємо його як $\perp$);
– тотально насиченим, якщо $T(P) = {}^VA$ та $F(P) = {}^VA$.

Квазіарний предикат P монотонний, якщо $d \subseteq d' \Rightarrow P(d) \subseteq P(d')$.

Квазіарний предикат P антитонний, якщо $d \subseteq d' \Rightarrow P(d) \supseteq P(d')$.

Ім'я $z \in V$ неістотне для предиката P, якщо $d_1\|_{-x} = d_2\|_{-x} \Rightarrow P(d_1) = P(d_2)$.

Базовими композиціями ЧКНЛ є логічні зв'язки $\neg$ і $\vee$, реномінації $\mathrm{R}^{\overline{v}}_{\overline{x}}$, квантори $\exists x$. Задамо їх через області істинності та хибності відповідних предикатів:

$T(\neg P) = F(P)$; $F(\neg P) = T(P)$;

$T(P \vee Q) = T(P) \cup T(Q)$; $F(P \vee Q) = F(P) \cap F(Q)$;

$T(\mathrm{R}^{\overline{v}}_{\overline{x}}(P)) = \{d \in {}^VA \mid r^{\overline{v}}_{\overline{x}}(d) \in T(P)\}$; $F(\mathrm{R}^{\overline{v}}_{\overline{x}}(P)) = \{d \in {}^VA \mid r^{\overline{v}}_{\overline{x}}(d) \in F(P)\}$;

$T(\exists xP) = \{d \in {}^VA \mid T \in P(d \nabla x \mapsto a)$ для деякого $a \in A\}$;

$F(\exists xP) = \{d\in {}^VA \mid F\in P(d\nabla x\mapsto a)$ для всіх $a\in A\}$.

Подібним чином можна задати [2] логічні зв'язки $\rightarrow$, &, $\leftrightarrow$ та квантори $\forall x$.

Логічні зв'язки $\rightarrow$, &, $\leftrightarrow$ є похідними, вони виражаються $\neg$ та $\vee$.

Композиція $\forall x$ є похідною: кожний предикат вигляду $\forall xP$ подамо як $\neg\exists x\neg P$.

Основні властивості наведених пропозиційних композицій (логічних зв'язок) $\neg$, $\vee$, $\rightarrow$, &, $\leftrightarrow$ в цілому аналогічні властивостям відповідних класичних [8] логічних зв'язок. Основні властивості композицій $\exists x$ та $\forall x$ теж аналогічні властивостям відповідних кванторів класичної логіки (див. [2, 8]).

Теорема 1. 1) ім'я $x\in V$ неістотне для предикатів $\exists xP$ та $\forall xP$;

2) ім'я $x\in V$ неістотне для $P \Leftrightarrow P = \forall xP \Leftrightarrow P = \exists xP$.

ЧКНЛ із узагальненими (розширеними) реномінаціями запропоновано в [5], вони названі ЧКНЛРР. Базовими композиціями ЧКНЛРР є $\neg$, $\vee$, $\exists x$ та розширені реномінації $\mathrm{R}^{\bar v,\bar u}_{\bar x,\perp}$. Композиції $\mathrm{R}^{\bar v,\bar u}_{\bar x,\perp}$ визначаються так:

$$T(\mathrm{R}^{\bar v,\bar u}_{\bar x,\perp}(P)) = \{d\in {}^VA \mid \mathrm{r}^{\bar v,\bar u}_{\bar x,\perp}(d)\in T(P)\};\ F(\mathrm{R}^{\bar v,\bar u}_{\bar x,\perp}(P)) = \{d\in {}^VA \mid \mathrm{r}^{\bar v,\bar u}_{\bar x,\perp}(d)\in F(P)\}.$$

Композиції $\mathrm{R}^{\bar v}_{\bar x}$ та $\mathrm{R}^{\bar v,\bar u}_{\bar x,\perp}$ можна визначити через операції $r^{\bar v}_{\bar x}$ та $r^{\bar v,\bar u}_{\bar x,\perp}$ традиційним чином: $\mathrm{R}^{\bar v}_{\bar x}(P)(d) = P(r^{\bar v}_{\bar x}(d))$; $\mathrm{R}^{\bar v,\bar u}_{\bar x,\perp}(P)(d) = P(r^{\bar v,\bar u}_{\bar x,\perp}(d))$.

За допомогою композицій розширеної реномінації визначаємо похідні композиції розширеної квантифікації (розширені квантори).

$$\exists_\perp xP = \exists xP \vee \mathrm{R}^{x}_{\perp}(P);\quad \forall_\perp xP = \forall xP \,\&\, \mathrm{R}^{x}_{\perp}(P).$$

Основні властивості розширених кванторів наведено в [5, 6].

Характерною особливістю логік квазіарних предикатів є те, що значення предиката $P(d)$ може бути різним залежно від того, входить чи не входить до d компонента з певним іменем. Це веде до того, що для цих логік вже невірні деякі важливі закони класичної логіки (див. [2, 4]). Наприклад, не завжди неспростовні предикати вигляду $\forall xP\rightarrow P$ та $P\rightarrow\exists xP$, існують виконувані предикати вигляду $\neg\exists xP\&P$. Тому доцільно явно вказувати означені й неозначені предметні імена. Для цього використовуємо спеціальні 0-арні композиції – предикати-індикатори εz, які визначають наявність у даних компоненти з відповідним іменем (змінною) z, тобто наявність значення для z. Предикати-індикатори εz визначаємо так:

$$T(\varepsilon z) = \{d \mid d(z)\uparrow\} = \{d\in {}^VA \mid z\notin asn(d)\};\ F(\varepsilon z) = \{d \mid d(z)\downarrow\} = \{d\in {}^VA \mid z\in asn(d)\}.$$

Предикати-індикатори εz не є монотонними та не є антитонними.

Кожне $x\in V$ таке, що $x \neq z$, неістотне для предиката εz.

ЧКНЛ з виділеними предикатами-індикаторами розглянуто в [7], такі логіки названі ε-ЧКНЛ. Базовими композиціями ε-ЧКНЛ є $\neg$, $\vee$, $\mathrm{R}^{\bar v}_{\bar x}$, $\exists x$ та εz.

Можливості ЧКНЛРР та ε-ЧКНЛ поєднують ε-ЧКНЛРР. Такі логіки запропоновані в [9]. Базовими композиціями ε-ЧКНЛРР є $\neg$, $\vee$, $\mathrm{R}^{\bar v,\bar u}_{\bar x,\perp}$, $\exists x$ та εz.

ЧКНЛРР, ε-ЧКНЛ та ε-ЧКНЛРР утворюють окремі підрівні ЧКНЛ.

Теорема 2. 1) композиції $\neg$, $\vee$, $\mathrm{R}_{\bar{x}}^{\bar{v}}$, $\mathrm{R}_{\bar{x},\perp}^{\bar{v},\bar{u}}$, $\exists x$ зберігають монотонність і антитонність предикатів;

2) композиції $\neg$, $\vee$, $\mathrm{R}_{\bar{x}}^{\bar{v}}$, $\mathrm{R}_{\bar{x},\perp}^{\bar{v},\bar{u}}$, $\exists x$, εz зберігають тотальність предикатів.

Наслідок 1. Всюди невизначений предикат $\perp$ не може бути виражений предикатами εy за допомогою $\neg$, $\vee$, $\mathrm{R}_{\bar{x}}^{\bar{v}}$, $\mathrm{R}_{\bar{x},\perp}^{\bar{v},\bar{u}}$, $\exists x$.

Отже, можна отримати нетривіальні розширення ЧКНЛ, ЧКНЛРР, ε-ЧКНЛ та ε-ЧКНЛРР шляхом додавання $\perp$ як спеціальної 0-арної композиції. Дослідження таких розширень буде зроблено в наступних роботах.

Семантичні моделі та мови ЧКНЛ. Семантичними моделями ЧКНЛ є [2] композиційні системи квазіарних предикатів $({}^{V}A, Pr^{A}, C)$, де Pr^{A} – клас V-квазіарних предикатів на A, C визначається базовими композиціями відповідного підрівня. Терми композиційної алгебри (Pr^{A}, C) трактуємо як формули мови ЧКНЛ. Алфавіт мови: символи базових композицій, множина Ps предикатних символів (сигнатура мови), множина V предметних імен (змінних). Символи базових композицій такі: $\neg$, $\vee$, $R_{\bar{x}}^{\bar{v}}$, $\exists x$ для ЧКНЛ базового рівня; $\neg$,$\vee$, $R_{\bar{x},\perp}^{\bar{v},\bar{u}}$, $\exists x$ для ЧКНЛРР; $\neg$, $\vee$, $R_{\bar{x}}^{\bar{v}}$, $\exists x$, εz для ε-ЧКНЛ; $\neg$, $\vee$, $R_{\bar{x},\perp}^{\bar{v},\bar{u}}$, $\exists x$, εz для ε-ЧКНЛРР.

Множина Fr формул мови ε-ЧКНЛРР визначається індуктивно:

– $Ps \subseteq Fr$ та $\{\varepsilon z \mid z \in V\} \subseteq Fr$; формули вигляду $p \in Ps$ та εz – атомарні;

– $\Phi, \Psi \in Fr \Rightarrow \neg\Phi, \vee\Phi\Psi, R_{\bar{x},\perp}^{\bar{v},\bar{u}}\Phi, \exists x\Phi \in Fr$.

Множини формул мови ЧКНЛ, ε-ЧКНЛ, ЧКНЛРР визначаємо аналогічно.

Інтерпретуємо мову на композиційних системах $({}^{V}A, Pr^{A}, C)$. Відображення інтерпретації формул $I : Fr \to Pr^{A}$ визначаємо за допомогою тотального однозначного відображення $I : Ps \to Pr^{A}$, яке позначає символами із Ps базові предикати. Кожна формула вигляду εz, де $z \in V$, інтерпретується як предикат-індикатор εz.

Для складних формул відображення $I : Fr \to Pr^{A}$ задається згідно побудови формул із простіших за допомогою символів базових композицій:

– $I(\neg\Phi) = \neg(I(\Phi))$; $I(\vee\Phi\Psi) = \vee(I(\Phi), I(\Psi))$;

– $I(R_{\bar{x},\perp}^{\bar{v},\bar{u}}\Phi) = \mathrm{R}_{\bar{x},\perp}^{\bar{v},\bar{u}}(I(\Phi))$; $I(\exists x\Phi) = \exists x(I(\Phi))$.

Відображення I пов'язує алгебру даних (A, Pr) із мовою. Отримуємо об'єкт $((A, Pr^{A}), I)$ – алгебраїчну систему (АС) з доданою сигнатурою, яка визначає композиційну систему $({}^{V}A, Pr^{A}, C)$. АС з доданою сигнатурою є інтегрованими семантичними моделями, які пов'язують мови КНЛ із алгебрами даних. Називаємо їх моделями мови та скорочено позначаємо $\boldsymbol{A} = (A, I)$.

Предикат $I(\Phi)$ – значення формули Φ при інтерпретації на $\boldsymbol{A}$, – далі позначаємо Φ_{A}. Формули εz завжди інтерпретуються однаково, тому предикати-індикатори, які є їх значенням, ми теж позначаємо εz, опускаючи індекс моделі мови.

Формула Φ частково істинна при інтерпретації на $\boldsymbol{A} = (A, I)$, або $\boldsymbol{A}$-неспростовна, якщо Φ_{A} – неспростовний предикат.

Формула Φ неспростовна, якщо Φ ***A***-неспростовна на кожній моделі мови ***A***.

Формула Φ виконувана при інтерпретації на моделі мови ***A***, або ***A***-виконувана, якщо Φ_A – виконуваний предикат.

Формула Φ виконувана, якщо Φ ***A***-виконувана на кожній моделі мови ***A***.

Характерним для програмування і моделювання є широке використання часткових та необов'язково однозначних відображень над складними даними. Тому постає проблема дослідження КНЛ із нетрадиційними семантиками.

Класична логіка – це логіка тотальних однозначних предикатів. КНЛ однозначних часткових предикатів – це логіки з неокласичною семантикою, КНЛ тотальних неоднозначних предикатів – логіки з пересиченою семантикою, КНЛ часткових неоднозначних предикатів – логіки із загальною семантикою.

Модель мови $\boldsymbol{B} = (A, I_B)$ дуальна до моделі мови $\boldsymbol{A} = (A, I_A)$, якщо для кожного $p \in Ps$ маємо $F(p_B) = \overline{T(p_A)}$.

Якщо ***B*** дуальна до ***A***, то $T(p_A) = \overline{F(p_B)}$ та $F(p_A) = \overline{T(p_B)}$, тобто ***A*** дуальна до ***B***. Якщо $\boldsymbol{A} = (A, I_A)$ – АС з частковими однозначними предикатами, то дуальна $\boldsymbol{B} = (A, I_B)$ – АС з тотальними неоднозначними предикатами та навпаки.

Теорема 3. Якщо $\boldsymbol{B} = (A, I_B)$ дуальна до $\boldsymbol{A} = (A, I_A)$, то для кожної формули Φ:

1) $T(\Phi_B) = \overline{F(\Phi_A)}$ та $F(\Phi_B) = \overline{T(\Phi_A)}$;

2) Φ_A монотонний $\Rightarrow \Phi_B$ антитонний; Φ_A антитонний $\Rightarrow \Phi_B$ монотонний.

Наслідок 2. Φ_A неспростовний на ***A*** із частковими однозначними предикатами (неокласична семантика) $\Leftrightarrow \Phi_B$ тотально істинний на дуальній ***B*** із тотальними неоднозначними предикатами (пересичена семантика).

Це означає: неокласична семантика та пересичена семантика дуальні.

Відношення логічного наслідку. Введемо відношення наслідку для двох формул при інтерпретації на фіксованій моделі мови ***A***. Це робиться однаково для ЧКНЛ базового рівня (див. [3, 4]) та для їх розширень:

– неспростовнісний наслідок ${}_A|\!=_{Cl}$: $\Phi\ {}_A|\!=_{Cl}\ \Psi \Leftrightarrow T(\Phi_A) \cap F(\Psi_A) = \varnothing$;

– насичений наслідок ${}_A|\!=_{Cm}$: $\Phi\ {}_A|\!=_{Cm}\ \Psi \Leftrightarrow F(\Phi_A) \cup T(\Psi_A) = {}^V\!A$;

– істиннісний наслідок ${}_A|\!=_T$: $\Phi\ {}_A|\!=_T\ \Psi \Leftrightarrow T(\Phi_A) \subseteq T(\Psi_A)$;

– хибнісний наслідок ${}_A|\!=_F$: $\Phi\ {}_A|\!=_F\ \Psi \Leftrightarrow F(\Psi_A) \subseteq F(\Phi_A)$;

– сильний наслідок ${}_A|\!=_{TF}$: $\Phi\ {}_A|\!=_{TF}\ \Psi \Leftrightarrow T(\Phi_A) \subseteq T(\Psi_A)$ та $F(\Psi_A) \subseteq F(\Phi_A)$.

Відповідні відношення логічного наслідку $|\!=_{Cl}$, $|\!=_{Cm}$, $|\!=_T$, $|\!=_F$, $|\!=_{TF}$ визначаємо за наступною схемою: $\Phi\ |\!=_*\ \Psi \Leftrightarrow \Phi\ {}_A|\!=_*\ \Psi$ для кожної моделі мови ***A***.

Відношення логічного наслідку індукують на множині формул відношення логічної еквівалентності. Відношення еквівалентності ${}_A\!\sim_{Cl}$, ${}_A\!\sim_{Cm}$, ${}_A\!\sim_T$, ${}_A\!\sim_F$, ${}_A\!\sim_{TF}$ в моделі мови ***A*** визначаємо за такою схемою: $\Phi\ {}_A\!\sim_*\ \Psi$, якщо $\Phi\ {}_A|\!=_*\ \Psi$ та $\Psi\ {}_A|\!=_*\ \Phi$.

Звідси: $\Phi\ {}_A\!\sim_{TF}\ \Psi \Leftrightarrow T(\Phi_A) = T(\Psi_A)$ та $F(\Phi_A) = F(\Psi_A)$, тобто $\Phi\ {}_A\!\sim_{TF}\ \Psi \Leftrightarrow \Phi_A = \Psi_A$.

Відношення логічної еквівалентності $\sim_{Cl}$, $\sim_{Cm}$, $\sim_T$, $\sim_F$, $\sim_{TF}$ визначаємо за такою схемою: $\Phi \sim_* \Psi$, якщо $\Phi\ |\!=_*\ \Psi$ та $\Psi\ |\!=_*\ \Phi$.

Зрозуміло, що $\Phi \sim_* \Psi \Leftrightarrow \Phi\ {}_A\!\sim_*\ \Psi$ для кожної моделі мови ***A***.

Для відношень $\sim_{Cl}$, $\sim_{Cm}$ та $\sim_{TF}$ справджується (тут $*$ – це одне з Cl, Cm, TF):

Теорема 4 (семантичної еквівалентності). Нехай Φ' отримана з Φ заміною деяких входжень $\Phi_1,..., \Phi_n$ на $\Psi_1,..., \Psi_n$. Якщо $\Phi_1 \sim_* \Psi_1$, ..., $\Phi_n \sim_* \Psi_n$, то $\Phi \sim_* \Phi'$.

Для відношень $\sim_T$ та $\sim_F$ теорема 4, взагалі кажучи, неправильна (див. [3, 4]).

Семантичні властивості формул мови ЧКНЛ в різних семантиках досліджено в [3, 4]. Для розширень ЧКНЛ додаються властивості, пов'язані з розширеними реномінаціями та взаємодією предикатів-індикаторів із кванторами та реномінаціями (див. [5–7]). Наведемо основні з цих властивостей:

$R_\perp T$) $R^{z,\bar{v},\bar{u}}_{z,\bar{x},\perp}(\Phi) \sim_{TF} R^{\bar{v},\bar{u}}_{\bar{x},\perp}(\Phi)$; зокрема, $R^{z,\bar{u}}_{z,\perp}(\Phi) \sim_{TF} R^{\bar{u}}_{\perp}(\Phi)$;

$R_\perp U$) нехай $z \in V$ неістотне для Φ, тоді $R^{z,\bar{v},\bar{u}}_{y,\bar{x},\perp}(\Phi) \sim_{TF} R^{\bar{v},\bar{u}}_{\bar{x},\perp}(\Phi)$;

Ren) нехай $z \in V$ неістотне для Φ, тоді $\exists x\Phi \sim_{TF} \exists z R^{x}_{z}(\Phi)$;

$R_\perp\neg$) $R^{\bar{v},\bar{u}}_{\bar{x},\perp}(\neg\Phi) \sim_{TF} \neg R^{\bar{v},\bar{u}}_{\bar{x},\perp}(\Phi)$;

$R_\perp\vee$) $R^{\bar{v},\bar{u}}_{\bar{x},\perp}(\Phi \vee \Psi) \sim_{TF} R^{\bar{v},\bar{u}}_{\bar{x},\perp}(\Phi) \vee R^{\bar{v},\bar{u}}_{\bar{x},\perp}(\Psi)$;

$R_\perp R$) $R^{\bar{v},\bar{z}}_{\bar{y},\perp}(R^{\bar{u},\bar{t}}_{\bar{x},\perp}(\Phi)) \sim_{TF} R^{\bar{v},\bar{z}}_{\bar{y},\perp} \circ^{\bar{u},\bar{t}}_{\bar{x},\perp}(\Phi)$; тут $R^{\alpha}_{\beta} \circ^{\sigma}_{\eta}(\Phi)_A(d) =_{df} \Phi_A(r^{\sigma}_{\eta} \circ^{\alpha}_{\beta}(d))$;

$R_\perp\exists$) $R^{\bar{v},\bar{u}}_{\bar{x},\perp}(\exists y\Phi) \sim_{TF} \exists y R^{\bar{v},\bar{u}}_{\bar{x},\perp}(\Phi)$ за умови $y \notin \{\bar{v},\bar{x},\bar{u}\}$;

$R_\perp\exists\exists$) $R^{\bar{v},\bar{u}}_{\bar{x},\perp}(\exists y\Phi) \sim_{TF} \exists z R^{\bar{v},\bar{u}}_{\bar{x},\perp} \circ^{y}_{z}(\Phi)$ за умови $z \in V_T$ та $z \notin nm(R^{\bar{v},\bar{u}}_{\bar{x},\perp}(\exists x\Phi))$;

$\varepsilon R_\perp$) $R^{\bar{v},\bar{u}}_{\bar{x},\perp}(\varepsilon z) \sim_{TF} \varepsilon z$ за умови $z \notin \{\bar{v},\bar{u}\}$; $R^{\bar{v},\bar{u},z}_{\bar{x},\perp,y}(\varepsilon z) \sim_{TF} \varepsilon y$, $R^{z}_{y}(\varepsilon z) \sim_{TF} \varepsilon y$;

$\varepsilon\exists$) $\exists x\, \varepsilon z \sim_{TF} \varepsilon z$; $\exists x \neg\varepsilon z \sim_{TF} \neg\varepsilon z$;

$\vee\varepsilon\exists$) $\exists x(\varepsilon x \vee \Phi) \sim_{TF} \exists x\Phi$; $\exists x\neg(\varepsilon x \vee \Phi) \sim_{TF} \exists x\neg\Phi$;

CnT) $\exists x \neg\varepsilon x_A = \neg\exists x\, \varepsilon x_A = T$; $\exists x(\neg\varepsilon x \vee \Phi)_A = \neg\exists x\neg(\neg\varepsilon x \vee \Phi)_A = T$;

CnF) $\exists x\, \varepsilon x_A = \neg\exists x \neg\varepsilon x_A = F$; $\exists x\neg(\neg\varepsilon x \vee \Phi)_A = \neg\exists x(\neg\varepsilon x \vee \Phi)_A = F$.

Тепер задамо відношення логічного наслідку для множин формул.

Нехай $\Gamma \subseteq Fr$ та $\Delta \subseteq Fr$, $\boldsymbol{A}$ – модель мови. У випадку $\Gamma\,{}_A|\!= \Delta$ позначаємо:

$\bigcap_{\Phi\in\Gamma} T(\Phi_A)$ як $T(\Gamma_A)$, $\bigcup_{\Psi\in\Delta} T(\Psi_A)$ як $T(\Delta_A)$, $\bigcup_{\Phi\in\Gamma} F(\Phi_A)$ як $F(\Gamma_A)$, $\bigcap_{\Psi\in\Delta} F(\Psi_A)$ як $F(\Delta_A)$.

Відношення ${}_A|\!=_{Cl}$, ${}_A|\!=_{Cm}$, ${}_A|\!=_T$, ${}_A|\!=_F$, ${}_A|\!=_{TF}$ наслідку для пари множин формул в моделі мови $\boldsymbol{A}$ задаємо подібно тому, як це робиться для пар формул:

$\Gamma\,{}_A|\!=_{Cl}\Delta$, якщо $T(\Gamma_A) \cap F(\Delta_A) = \varnothing$; $\Gamma\,{}_A|\!=_{Cm}\Delta$, якщо $F(\Gamma_A) \cup T(\Delta_A) = {}^{V}\!A$; $\Gamma\,{}_A|\!=_T\Delta$, якщо $T(\Gamma_A) \subseteq T(\Delta_A)$; $\Gamma\,{}_A|\!=_F\Delta$, якщо $F(\Delta_A) \subseteq F(\Gamma_A)$; $\Gamma\,{}_A|\!=_{TF}\Delta$, якщо $\Gamma\,{}_A|\!=_T\Delta$ і $\Gamma\,{}_A|\!=_F\Delta$.

Відповідні відношення $|\!=_{Cl}$, $|\!=_{Cm}$, $|\!=_T$, $|\!=_F$, $|\!=_{TF}$ логічного наслідку для пари множин формул вводимо за схемою: $\Gamma |\!=_* \Delta \Leftrightarrow \Gamma\,{}_A|\!=_* \Delta$ для кожної моделі мови $\boldsymbol{A}$.

Теорема 5. Нехай моделі мови $\boldsymbol{A} = (A, I_A)$ та $\boldsymbol{B} = (A, I_B)$ дуальні. Тоді:

1) $\Gamma\,{}_A|\!=_T\Delta \Leftrightarrow \Gamma\,{}_B|\!=_F\Delta$ та $\Gamma\,{}_A|\!=_F\Delta \Leftrightarrow \Gamma\,{}_B|\!=_T\Delta$;

2) $\Gamma\,{}_A|\!=_{Cl}\Delta \Leftrightarrow \Gamma\,{}_B|\!=_{Cm}\Delta$ та $\Gamma\,{}_A|\!=_{Cm}\Delta \Leftrightarrow \Gamma\,{}_B|\!=_{Cl}\Delta$.

Наслідок 3. У випадку загальної семантики $\Gamma |\!=_T \Delta \Leftrightarrow \Gamma |\!=_F \Delta \Leftrightarrow \Gamma |\!=_{TF} \Delta$.

Наслідок 4. 1) $\Gamma |\!=_{Cl} \Delta$ в неокласичній семантиці $\Leftrightarrow$ $\Gamma\,{}_B|\!=_{Cm}\Delta$ в пересиченій;

2) $\Gamma |=_T \Delta$ в неокласичній семантиці $\Leftrightarrow$ $\Gamma |=_F \Delta$ в пересиченій;
3) $\Gamma |=_F \Delta$ в неокласичній семантиці $\Leftrightarrow$ $\Gamma |=_T \Delta$ в пересиченій.

Теорема 6 (заміни еквівалентних). Нехай $\Phi \sim_{TF} \Psi$, тоді $\Phi, \Gamma |=_* \Delta \Leftrightarrow \Psi, \Gamma |=_* \Delta$ та $\Gamma |=_* \Delta, \Phi \Leftrightarrow \Gamma |=_* \Delta, \Psi$ ($*$ – одне з *Cl*, *Cm*, *T*, *F*, *TF* у відповідних семантиках).

Властивості відношень логічного наслідку для множин формул ЧКНЛ у різних семантиках наведено в [3, 4], для випадків їх розширень – в [5–7, 10]. Властивості, пов'язані з (розширеними) реномінаціями, кванторами та предикатами-індикаторами, індуковані відповідними властивостями для формул.

Секвенційні числення. Для розв'язання низки задач, що виникають у сучасних інформаційних і програмних системах, необхідний ефективний пошук виведень. Потужним апаратом побудови виведень є числення секвенційного типу. Такі числення формалізують відношення логічного наслідку для множин формул. Ми пропонуємо спектр секвенційних числень для різних відношень логічного наслідку в різних семантиках для ЧКНЛ та їх розширень (таблиця).

Секвенційні числення ЧКНЛ, зокрема, ЧКНЛ монотонних предикатів та ЧКНЛ антитонних предикатів, описано в [11]. Секвенційні числення ε-ЧКНЛ та ЧКНЛРР описано відповідно в [7] та [10]. Детальний опис числень ε-ЧКНЛРР буде зроблено в наступних роботах.

ТАБЛИЦЯ. Секвенційні числення ЧКНЛ, ЧКНЛРР, ε-ЧКНЛ, ε-ЧКНЛРР

	$\models_{Cl}$	$\models_{Cm}$	$\models_T$	$\models_F$	$\models_{TF}$
Неокласична семантика ЧКНЛ	*QSC*	–	*QSL*	*QSR*	*QSR*
Неокласична семантика ЧКНЛРР	$Q_\perp C$	–	$Q_\perp L$	$Q_\perp R$	$Q_\perp LR$
Неокласична семантика ε-ЧКНЛ	$Q\varepsilon C$	–	$Q\varepsilon L$	$Q\varepsilon R$	$Q\varepsilon LR$
Неокласична семантика ε-ЧКНЛРР	$Q_\perp\varepsilon C$	–	$Q_\perp\varepsilon L$	$Q_\perp\varepsilon R$	$Q_\perp\varepsilon LR$
Пересичена семантика ЧКНЛ	–	*QSC*	*QSR*	*QSL*	*QSLR*
Пересичена семантика ЧКНЛРР	–	$Q_\perp C$	$Q_\perp R$	$Q_\perp L$	$Q_\perp LR$
Пересичена семантика ε-ЧКНЛ	–	$Q\varepsilon C$	$Q\varepsilon R$	$Q\varepsilon L$	$Q\varepsilon LR$
Пересичена семантика ε-ЧКНЛРР	–	$Q_\perp\varepsilon C$	$Q_\perp\varepsilon R$	$Q_\perp\varepsilon L$	$Q_\perp\varepsilon LR$
Загальна семантика ЧКНЛ	–	–	*QSG*	*QSG*	*QSG*
Загальна семантика ЧКНЛРР	–	–	$Q_\perp G$	$Q_\perp G$	$Q_\perp G$
Загальна семантика ε-ЧКНЛ	–	–	$Q\varepsilon G$	$Q\varepsilon G$	$Q\varepsilon G$
Загальна семантика ε-ЧКНЛРР	–	–	$Q_\perp\varepsilon G$	$Q_\perp\varepsilon G$	$Q_\perp\varepsilon G$

Для пропонованих секвенційних чисел справджуються теореми коректності та повноти. Для різних числень та логічних наслідків ці теореми формулюються однотипно. Поєднуючи теореми коректності та повноти, маємо:

Теорема 7. $\Gamma |= \Delta$ у семантиці α $\Leftrightarrow$ секвенція ${}_{\vdash}\Gamma{}_{\dashv}\Delta$ вивідна в численні β.

Назву β числення читаємо на перетині стовпця |= та рядка α (таблиця).

Висновки. Досліджено чисті першопорядкові композиційно-номінативні логіки часткових однозначних, тотальних неоднозначних та часткових неоднозначних предикатів. Розглянуто розширення цих логік за допомогою уза-

гальнених реномінацій та предикатів-індикаторів наявності значення для змінних. Описано мови та семантичні моделі таких логік, досліджено їх семантичні властивості, розглянуто різні формалізації відношення логічного наслідку. Для різних класів досліджених логік запропоновано числення секвенційного типу.

С.С. Шкильняк

КОМПОЗИЦИОННО-НОМИНАТИВНЫЕ ЛОГИКИ
ЧАСТИЧНЫХ И НЕОДНОЗНАЧНЫХ ПРЕДИКАТОВ

Исследованы чистые первопорядковые логики частичных однозначных, тотальных неоднозначных и частичных неоднозначных предикатов. Рассмотрен ряд расширений этих логик с помощью обобщенных реноминаций и специальных предикатов-индикаторов наличия значения для переменных. Описаны языки и семантические модели таких логик, для разных классов этих логик предложены исчисления секвенциального типа.

S.S. Shkilniak

COMPOSITION-NOMINATIVE LOGICS OF PARTIAL AND MULTI-VALUED PREDICATES

We study pure fisrt-order logics of partial single-valued, total multi-valued and partial multi-valued predicates. Various extensions of the introduced logics with generalized renominations and special variable definedness predicates are considered. For such logics, we define languages and semantic models, investigate their semantic properties and specify sequent calculi.

1. *Handbook* of Logic in Computer Science. Edited by S. Abramsky, Dov M. Gabbay and T. S. E. Maibaum. – Oxford Univ. Press. – Vol. 1–5, 1993–2000.
2. *Нікітченко М.С.*, *Шкільняк С.С.* Математична логіка та теорія алгоритмів. – К., 2008. – 528 с.
3. *Шкільняк С.С.* Відношення логічного наслідку в композиційно-номінативних логіках // Проблеми програмування. – 2010. – № 1. – С. 15–38.
4. *Нікітченко М.С.*, *Шкільняк С.С.* Композиційно-номінативні логіки квазіарних предикатів: семантичні аспекти // Вісник Київ. ун-ту. Серія: фіз.-мат. науки. – 2012. – Вип. 4. – С. 165–172.
5. *Нікітченко М.С.*, *Шкільняк О.С.*, *Шкільняк С.С.* Логіки часткових предикатів з розширеними реномінаціями та кванторами // Там само. – 2013. – Вип. 2. – С. 210 – 215.
6. *Шкільняк С.С.* Семантичні властивості логік часткових предикатів з розширеними реномінаціями // Там само. – 2013. – Вип. 3. – С. 297–302.
7. *Нікітченко М.С.*, *Шкільняк С.С.* Композиційно-номінативні логіки із спеціальними предикатами наявності значення для змінних // Там само. – 2013. – Спецвипуск. – С. 128–133.
8. *Клини С.* Математическая логика. – М., 1973. – 480 с.
9. *Нікітченко М.С.*, *Шкільняк О.С.*, *Шкільняк С.С.* Першопорядкові логіки, розширені реномінаціями з невизначеним значенням змінних та предикатами-індикаторами наявності значення // PDMU-2013: int. conf.: abstracts. – Yalta-Foros, Ukraine, 2013. – С. 116 –1 17.
10. *Шкільняк О.С.* Секвенційні числення логік часткових предикатів з розширеними реномінаціями // Вісник Київ. ун-ту. Серія: фіз.-мат. науки. – 2013. – Спецвипуск. – С. 199 –204.
11. *Шкільняк С.С.* Спектр секвенційних числень першопорядкових композиційно-номінативних логік // Проблеми програмування. – 2013. – № 3 – С. 22 – 37.

Одержано 30.01.2014

Про автора:

Шкільняк Степан Степанович,
доктор фізико-математичних наук, професор кафедри теорії та технології програмування факультету кібернетики Київського національного університету імені Тараса Шевченка.