

Рассматриваются и решаются вопросы учета обратного влияния характеристик процесса (концентрации загрязнения жидкости и осадка) на характеристики среды (коэффициенты пористости, диффузии, массообмена и т. п.) при моделировании процессов очистки жидкости от многокомпонентных примесей в n -шаровом сорбционном фильтре. Построен алгоритм численно-асимптотического приближения решения соответствующей модельной задачи, которая описывается системой нелинейных сингулярно возмущенных дифференциальных уравнений типа «конвекция-диффузия-массообмен» и, на этой основе, проведен компьютерный эксперимент.

© А.Я. Бомба, А.П. Сафоник, 2014

УДК 519.63:532.5

А.Я. БОМБА, А.П. САФОНИК

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССОВ ФИЛЬТРОВАНИЯ ЖИДКОСТЕЙ ОТ МНОГОКОМПОНЕНТНОГО ЗАГРЯЗНЕНИЯ В n -ШАРОВЫХ ФИЛЬТРАХ

Введение. Анализ результатов исследований [1 – 12] свидетельствует о наличии сложной структуры взаимозависимости разных факторов, определяющих процессы фильтрации и фильтрования через пористые среды, которые не учитывались в традиционных (классических, феноменологических) моделях таких систем. Учет разных взаимовлияний и дополнительных факторов, внесенных в базовую модель для более глубокого изучения процесса, приводит к необходимости построения громоздких и малоэффективных (относительно численной реализации и практического использования) математических моделей. Тем не менее, во многих практически важных случаях при исследовании таких процессов целесообразно применять моделирование разных возмущений известных (идеализированных, усредненных, базовых) фонов. В частности, при прогнозировании путей повышения эффективности работы фильтров, возникает вопрос об оптимальном подборе характеристик (проводимости, пористости, коэффициентов массообмена) шаров многосферных фильтров, которые, в первую очередь, характеризуются диаметром гранул загрузки [12]. Заметим, что на сегодняшний день, через сложность реализации и эксплуатации в практике фильтрования, не получили широкого распространения даже фильтры с «непрерывно» неоднородными загрузками.

Из этих же причин фактически ограничиваются разными аппроксимациями оптимального гранулометрического состава загрузки шаров, эквивалентный диаметр гранул которых «непрерывно» убывает в направлении фильтрования по определенному закону.

Согласно этому, в работе рассматриваются и решаются вопросы учета обратного влияния характеристик процесса (концентрации загрязнения жидкости и осадка) на характеристики среды (коэффициенты пористости, диффузии, массообмена и т.п.) при моделировании процессов очистки жидкости от многокомпонентных примесей в n -шаровом сорбционном фильтре.

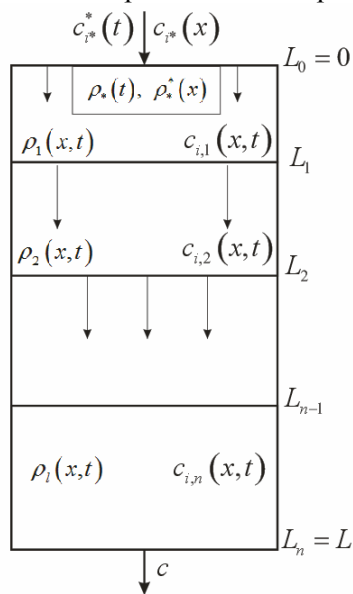


РИС. 1. Схематичное изображение n -шарового фильтра

Постановка задачи. Рассмотрим пространственно одномерный процесс очистки жидкости фильтрованием в n -шаровом фильтре-пласте толщиной L (рис. 1), что отождествляется с отрезком $[0, L]$ оси $0x$. Предположим [12], что частицы загрязнения могут переходить с одного состояния в другое (процессы захвата, отрыва, сорбции, десорбции), при этом концентрация загрязнения влияет на характеристики соответствующих шаров.

Концентрация загрязнения – многокомпонентная, $c = c(x, t) = (c_1, \dots, c_m) = (c_1(x, t), \dots, \dots, c_m(x, t))$, где $c_i(x, t)$ – концентрация i -ой компоненты примеси ($i = \overline{1, m}$) в жидкой фильтрующейся среде. Соответствующую математическую модель процесса фильтрования с учетом обратного влияния характеристик процесса (концентрации загрязнения жидкости и осадка)

на характеристики среды (коэффициенты пористости, диффузии, массообмена и т. п. [9 – 11]) представим в виде следующей задачи:

$$\begin{cases} \frac{\partial(\sigma(\rho)c_i)}{\partial t} + \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(v c_i)}{\partial x} = D_i \frac{\partial^2 c_i}{\partial x^2}, \\ i = \overline{1, m}, (x, t) \in G_n = \{x: L_{n-1} < x < L_n, 0 < t < \infty\}, n = \overline{1, l-1}, \\ \frac{\partial \rho}{\partial t} = \beta(\rho) \left(\sum_{i=1}^m q_i c_i \right) - \alpha(\rho) \rho + D_* \frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2}, \end{cases} \quad (1)$$

$$c_i|_{x=0} = c_i^*(t), \quad \rho|_{x=0} = \rho^*(t), \quad \left. \frac{\partial c_i}{\partial x} \right|_{x=L} = 0, \quad \left. \frac{\partial \rho}{\partial x} \right|_{x=L} = 0,$$

$$c_i|_{t=0} = c_{*i}^*(x), \quad \rho|_{t=0} = \rho^*(x), \tag{2}$$

$$[c_i]_{x=L_n} = 0, \quad [\rho]_{x=L_n} = 0, \quad \left[D_{i,n} \frac{\partial c_i}{\partial x} + v c_i \right]_{x=L_n} = 0, \quad \left[D_{*n} \frac{\partial \rho}{\partial x} \right]_{x=L_n} = 0, \tag{3}$$

где $\rho(x,t)$ – концентрация примесей, захваченных фильтрующей засыпкой; $\beta(\rho)$ – коэффициент, характеризующий объемы осаждения примесей за единицу времени, ($\beta(\rho) = \beta_0 - \varepsilon \beta_* \rho(x,t)$); $\alpha(\rho)$ – коэффициент, характеризующий объем частиц, оторванных за то же время от гранул засыпки, ($\alpha(\rho) = \alpha_0 + \varepsilon \alpha_* \rho(x,t)$); $c_i^*(t)$ – концентрация примесей на входе фильтра; $\sigma(\rho)$ – пористость фильтрующей засыпки, $\sigma(\rho) = \sigma_0 - \varepsilon \sigma_* \rho(x,t)$, где σ_0 – исходная пористость засыпки,

$$(x \in [L_{n-1}, L_n]); \quad D_i = \begin{cases} D_{i,1} = b_1 \varepsilon, \\ \dots \\ D_{i,n} = b_n \varepsilon, \end{cases}, \quad D_* = \begin{cases} D_{*1} = b_{*1} \varepsilon, \\ \dots \\ D_{*n} = b_{*n} \varepsilon, \end{cases},$$

$\beta_0, \beta_*, \alpha_0, \alpha_*, \sigma_*, b_k, b_{*k}, q_i, \varepsilon$ – твердые параметры, характеризующие соответствующие коэффициенты; $\beta(\rho), \alpha(\rho), \sigma(\rho)$, – мягкие параметры, найденные с учетом натуральных экспериментальных данных; ε – малый параметр; v – скорость фильтрования, $[L_{n-1}, L_n]$ – n -й шар фильтра ($n = 1, 2, \dots, l$), l – количество шаров; в уравнениях (3) $[]$ – прирост соответствующей функции в данной точке $x = L_n$.

Асимптотика решения. Асимптотическое приближение решения модельной задачи

$$c_i(x,t) = \begin{cases} c_{i,1}(x,t), & L_0 = 0 \leq x < L_1, \\ c_{i,2}(x,t), & L_1 \leq x < L_2, \\ \dots \\ c_{i,n}(x,t), & L_{n-1} \leq x < L_n = L, \end{cases}, \quad \rho(x,t) = \begin{cases} \rho_1(x,t), & L_0 = L \leq x < L_1, \\ \rho_2(x,t), & L_1 \leq x < L_2, \\ \dots \\ \rho_n(x,t), & L_{n-1} \leq x < L_n = L, \end{cases}$$

находим в виде асимптотических рядов [9 – 11]:

$$c_{i,n}(x,t) = c_{i,n,0}(x,t) + \sum_{j=1}^k \varepsilon^j c_{i,n,j}^*(x,t) + \sum_{j=0}^{k+1} \varepsilon^j M_{i,n,j}(\xi t) + \sum_{j=0}^{k+1} \varepsilon^j \tilde{M}_{i,n,j}(\xi t) + \sum_{j=0}^{m+1} \varepsilon^j A_{i,j}(\xi t) + R_{c_{i,n}}(x,t,\varepsilon),$$

$$\begin{aligned} \rho_n(x,t) = & \rho_{n,0}(x,t) + \sum_{j=1}^k \varepsilon^j \rho_{n,j}(x,t) + \sum_{j=0}^{2k+1} \varepsilon^{j/2} P_{n,j}(\underline{\mu}, t) + \sum_{j=0}^{2k+1} \varepsilon^{j/2} \tilde{P}_{n,j}(\tilde{\underline{\mu}}, t) + \\ & + \sum_{j=0}^{m+1} \varepsilon^{j/2} B_{l,j}(\underline{\mu}, t) + R_{\rho,n}(x,t,\varepsilon), \end{aligned} \quad (4)$$

где $R_{c,j,n}, R_{\rho,n}$ – остаточные члены; $c_{i,n,j}(x,t), \rho_{n,j}(x,t), (i = \overline{1,m}; j = \overline{0,k}; n = \overline{0,l})$ – члены регулярных частей асимптотики; $M_{i,n,j}(\xi, t), \tilde{M}_{i,k,j}(\tilde{\xi}, t), (i = \overline{1,m}, j = \overline{0,k+1}), P_{n,j}(\underline{\mu}, t), \tilde{P}_{n,j}(\tilde{\underline{\mu}}, t), (j = \overline{0,2k+1}, n = \overline{0,l-1})$ – функции типа пограничного шара в окрестности точки $x = L_n$ (поправки на переходе фильтрационного потока из одного данного n -го шара фильтра в следующий), $A_{i,l,j}(\xi, t), B_{l,j}(\underline{\mu}, t) (j = \overline{0,m+1})$ – функции типа пограничного шара в окрестности точки $x = L$ (поправки на выходе фильтрационного течения), $\tilde{\xi} = x \cdot \varepsilon^{-1}, \tilde{\underline{\mu}} = x \cdot \varepsilon^{-1/2}, \xi = (L-x) \cdot \varepsilon^{-1}, \underline{\mu} = (L-x) \cdot \varepsilon^{-1/2}, \xi = (L-x) \cdot \varepsilon^{-1}, \underline{\mu} = (L-x) \cdot \varepsilon^{-1/2}$ – соответствующие регуляризирующие преобразование. После подстановки (4) в (1) и применения стандартной «процедуры приравнивания» для определения функций $c_{i,n,j}, \rho_{n,j}, j = \overline{0,k}$ [9], получаем

$$\begin{cases} \sigma_0 \frac{\partial c_{i,n,0}}{\partial t} + v \frac{\partial c_{i,n,0}}{\partial x} + q_i c_{i,n,0} = 0, \frac{\partial \rho_0}{\partial t} = \beta_0 \left(\sum_{i=1}^m q_i c_{i,n,0} \right) - \alpha_0 \rho_{n,0}, \\ c_{i,n,0}|_{x=0} = \bar{c}_{i,n}(t), \rho_{n,0}|_{x=0} = \bar{\rho}_n(t), c_{i,n,0}|_{t=0} = \bar{c}_{i,n}(x), \rho_{n,0}|_{t=0} = \bar{\rho}_n(x), \end{cases} \quad (5)$$

где

$$\begin{aligned} \bar{c}_{i,n}(t) &= c_i^*(t), \bar{\rho}_n(t) = \rho^*(t), \text{ если } n = 0, \bar{c}_{i,n}(t) = c_{i,n-1,0}(L_{n-1}, t), \\ \bar{\rho}_n(t) &= \rho_{n-1,0}(L_{n-1}, t), \text{ если } n = \overline{1,l}; \end{aligned}$$

$$\begin{cases} -\sigma_* \rho_{n,j-1} \frac{\partial c_{i,n,j}}{\partial t} + v \frac{\partial c_{i,n,j}}{\partial x} - q_i \sigma_* \frac{\partial \rho_{n,j-1}}{\partial t} c_{i,n,j} = g_{i,n,j}, \\ \frac{\partial \rho_{n,j}}{\partial t} = -\beta_* \rho_{n,j-1} \left(\sum_{i=1}^m q_i c_{i,n,j} \right) - \alpha_* \rho_{n,j-1} \rho_{n,j}, \\ c_{1,n,j}|_{x=0} = 0, c_{2,n,j}|_{x=0} = 0, \rho_{n,j}|_{x=0} = 0, c_{1,n,j}|_{t=0} = 0, \\ \rho_{n,j}|_{t=0} = 0, c_{2,n,j}|_{t=0} = 0, i = \overline{1,m}, j = \overline{1,k}, n = \overline{1,l-1}; \end{cases} \quad (6)$$

$$\left\{ \begin{array}{l}
 b_{i,n-1} M''_{i,n,0\xi\xi}(\xi, t) + M'_{i,n,0\xi}(\xi, t) = 0, M_{i,n,0}(\xi, t) \xrightarrow{\xi \rightarrow \infty} 0, \\
 b_{i,n} \tilde{M}''_{i,n,0\xi\xi}(\xi, t) - \tilde{M}'_{i,n,0\xi}(\xi, t) = 0, \tilde{M}_{i,n,0}(\xi, t) \xrightarrow{\xi \rightarrow -\infty} 0, \\
 c_{i,n-1,j}(L_{n-}, t) + M_{i,n,0}(0_-, t) = c_{i,n,j}(L_{n+}, t) + \tilde{M}_{i,n,0}(0_+, t), \\
 \left(c'_{i,n-1,0x}(L_{n-}, t) + M'_{i,n,0\xi}(0_-, t) \right) = \frac{b_{i,n}}{b_{i,n-1}} \left(c'_{i,n,0x}(L_{n-}, t) + \tilde{M}'_{i,n,0\xi}(0_+, t) \right); \\
 b_{*n-1} P''_{n,0\mu\mu}(\mu, t) + P'_{n,0\mu}(\mu, t) = 0, P_{n,0}(\mu, t) \xrightarrow{\mu \rightarrow \infty} 0, \\
 b_{*n} \tilde{P}''_{n,0\mu\mu}(\mu, t) - \tilde{P}'_{n,0\mu}(\mu, t) = 0, \tilde{P}_{n,0}(\mu, t) \xrightarrow{\mu \rightarrow -\infty} 0, \\
 \rho_{n-1,j}(L_{n-}, t) + P_{n,0}(0_-, t) = \rho_{n,j}(L_{n+}, t) + \tilde{P}_{n,0}(0_+, t), \\
 \left(\rho'_{n-1,0x}(L_{n-}, t) + P'_{n,0\mu}(0_-, t) \right) = \frac{b_{*n}}{b_{*n-1}} \left(\rho'_{n,0x}(L_{n-}, t) + \tilde{P}'_{n,0\mu}(0_+, t) \right);
 \end{array} \right. \quad (7)$$

$$\left\{ \begin{array}{l}
 b_{i,n-1} M''_{i,n,0\xi\xi}(\xi, t) + M'_{i,n,0\xi}(\xi, t) = m_{i,n}(\xi, t), M_{n,0}(\xi, t) \xrightarrow{\xi \rightarrow \infty} 0, \\
 b_{i,n} \tilde{M}''_{i,n,0\xi\xi}(\xi, t) - \tilde{M}'_{i,n,0\xi}(\xi, t) = \tilde{m}_{i,n}(\xi, t), \tilde{M}_{i,n,0}(\xi, t) \xrightarrow{\xi \rightarrow -\infty} 0, \\
 c_{i,n-1,j}(L_{n-}, t) + M_{i,n,0}(0_-, t) = c_{i,n,j}(L_{n+}, t) + \tilde{M}_{i,n,0}(0_+, t), \\
 \left(c'_{i,n-1,0x}(L_{n-}, t) + M'_{i,n,0\xi}(0_-, t) \right) = \frac{b_{i,n}}{b_{i,n-1}} \left(c'_{i,n,0x}(L_{n-}, t) + \tilde{M}'_{i,n,0\xi}(0_+, t) \right), i = \overline{1, k};
 \end{array} \right. \quad (9)$$

$$\left\{ \begin{array}{l}
 b_{*n-1} P''_{n,0\mu\mu}(\mu, t) + P'_{n,0\mu}(\mu, t) = p_n(\mu, t), P_{n,0}(\mu, t) \xrightarrow{\mu \rightarrow \infty} 0, \\
 b_{*n} \tilde{P}''_{n,0\mu\mu}(\mu, t) - \tilde{P}'_{n,0\mu}(\mu, t) = \tilde{p}_n(\mu, t), \tilde{P}_{n,0}(\mu, t) \xrightarrow{\mu \rightarrow -\infty} 0, \\
 \rho_{n-1,j}(L_{n-}, t) + P_{n,0}(0_-, t) = \rho_{n,j}(L_{n+}, t) + \tilde{P}_{n,0}(0_+, t), \\
 \left(\rho'_{n-1,0x}(L_{n-}, t) + P'_{n,0\mu}(0_-, t) \right) = \frac{b_{*n}}{b_{*n-1}} \left(\rho'_{n,0x}(L_{n-}, t) + \tilde{P}'_{n,0\mu}(0_+, t) \right), i = \overline{1, k},
 \end{array} \right. \quad (10)$$

$$\left\{ \begin{array}{l}
 b_{i,l} A''_{i,l,j,\xi\xi} + \nu A'_{i,l,j,\xi} = I(j) B'_{i,l,j-1,t} + I(j) \varepsilon^{\frac{j}{2}} B'_{i,l,j,t} + I(j+1) B'_{i,l,j,t} + \sigma_0 A'_{i,l,j-1,t}, \\
 A_{i,l,j} \xrightarrow{\xi \rightarrow \infty} 0, A'_{i,l,j,\xi}(L_j, t) = K_j(t);
 \end{array} \right. \quad (11)$$

$$b_{*l}(x)B''_{l,j,\mu\mu} - \alpha_j(x)B_{l,j} - B'_{l,j,t} = 0, \quad B_{l,j} \xrightarrow{\mu \rightarrow \infty} 0, \quad B'_{l,j,\mu}(L_j, t) = H_j(t);$$

$$I(a) = \begin{cases} 0, & \text{если } a - \text{четное,} \\ 1, & \text{если } a - \text{нечетное,} \end{cases}$$

$$K_j(t) = \begin{cases} 0, & j = m + 1, \\ -c'_{i,l,j,x}(L_j, t), & j = 0, \dots, m, \end{cases} \quad H_j(t) = \begin{cases} 0, & j = m + 1, \\ -\rho'_{l,j,x}(L_j, t), & j = 0, \dots, m. \end{cases}$$

В результате решения задач (4), (5) находим:

$$c_{i,n,0}(x, t) = \begin{cases} \bar{c}_{i,n}^* \left(t - \frac{\sigma_0 x}{v} \right) \cdot e^{\frac{q_i x}{v}}, & t \geq \frac{\sigma_0 x}{v}, \\ \bar{c}_{i,n}^* \left(x - \frac{vt}{\sigma_0} \right) \cdot e^{q_i t}, & t < \frac{\sigma_0 x}{v}, \end{cases}$$

$$\rho_{n,0}(x, t) = \beta_0 e^{-\alpha_0 t} \int_0^t \left(\sum_{i=1}^m q_i c_{i,n,0}(x, \tilde{t}) \right) e^{\alpha_0 \tilde{t}} d\tilde{t} + \bar{\rho}_{n*}^*(x),$$

$$c_{i,n,j}(x, t) = \begin{cases} \frac{\sigma_* e^{-\int_0^x \lambda_{n,j}(\tilde{x}, f(\tilde{x})+t-f(x)) d\tilde{x}}}{v} \cdot \int_0^x \frac{g_{i,n,j}(\tilde{x}, f(\tilde{x})+t-f(x)) e^{\int_0^{\tilde{x}} \lambda_{n,j}(\tilde{x}, f(\tilde{x})+t-f(x)) d\tilde{x}}}{\rho_{n,j-1}(\tilde{x}, f(\tilde{x})+t-f(x))} d\tilde{x}, & t \geq f(x), \\ e^{-\int_0^t \lambda_{n,j}(f^{-1}(\tilde{t}+f(x)-t), \tilde{t}) d\tilde{t}} \int_0^t e^{-\int_0^{\tilde{t}} \lambda_{n,j}(f^{-1}(\tilde{t}+f(x)-t), \tilde{t}) d\tilde{t}} g_{i,n,j}(f^{-1}(\tilde{t}+f(x)-t), \tilde{t}) d\tilde{t}, & t < f(x), \end{cases}$$

$$\rho_{n,j}(x, t) = -\beta_* e^{-\alpha_* \int_0^t \rho_{n,j-1}(x, \tilde{t}) d\tilde{t}} \int_0^t \rho_{n,j-1}(x, \tilde{t}) \left(\sum_{i=1}^2 c_{i,n,j}(x, \tilde{t}) \right) e^{\alpha_* \int_0^{\tilde{t}} \rho_{n,j-1}(x, \tilde{t}) d\tilde{t}} d\tilde{t},$$

где $g_{i,n,j}(x, t) = b_{i,n} \frac{\partial^2 c_{i,n,j-1}}{\partial x^2} + q_i \rho_{n,j-1}$, $\lambda_{n,j}(x, t) = -q_i \sigma_* \frac{\partial \rho_{n,j-1}}{\partial t}$,

$$m_{i,n}(\xi, t) = I(j) P'_{n,j-1t} + I(j) \varepsilon^{\frac{j}{2}} P'_{n,jt} + I(j+1) P'_{n,jt} + \sigma_* M'_{i,n,j-1t},$$

$$\tilde{m}_{i,n}(\xi, t) = I(j) \tilde{P}'_{n,j-1t} + I(j) \varepsilon^{\frac{j}{2}} \tilde{P}'_{n,jt} + I(j+1) \tilde{P}'_{n,jt} + \sigma_0 \tilde{M}'_{i,n,j-1t},$$

$$P_{n,j}(\underline{\mu}, t) = -\alpha_0 P_{n,j}, \quad \tilde{P}_{n,j}(\underline{\mu}, t) = -\alpha_0 \tilde{P}_{n,j}, \quad I(a) = \begin{cases} 0, & \text{если } a - \text{четное,} \\ 1, & \text{если } a - \text{нечетное.} \end{cases}$$

Приближенные значения функций $f_j(x)$ находим путем [9 – 11] интерполяции массива (x_i, t_i) , $i = \overline{1, k}$, где $x_i = \Delta x \cdot i$, $t_{i+1} = t_i + \frac{\Delta x}{v} \sigma_* \rho_{j-1}(x_i, t_i)$. Оценка остаточных членов проводится аналогично [9].

Функции $M_{i,n,j}(\xi, t)$, $\tilde{M}_{i,n,j}(\xi, t)$, $P_{n,j}(\underline{\mu}, t)$, $\tilde{P}_{n,j}(\underline{\mu}, t)$, $A_{i,l,j}(\xi, t)$, $B_{l,j}(\underline{\mu}, t)$ находятся аналогично работе [10].

Числовые расчеты. Для упрощения изложений будем считать, что концентрация загрязнения двокомпонентная, тогда задача (1) – (3) переписывается в виде:

$$\begin{cases} \frac{\partial(\sigma(x,t)c_1(x,t))}{\partial t} + \frac{\partial \rho(x,t)}{\partial t} + \frac{\partial(v(x,t)c_1(x,t))}{\partial x} = D_1 \frac{\partial^2 c_1}{\partial x^2}, \\ \frac{\partial(\sigma(x,t)c_2(x,t))}{\partial t} + \frac{\partial \rho(x,t)}{\partial t} + \frac{\partial(v(x,t)c_2(x,t))}{\partial x} = D_2 \frac{\partial^2 c_2}{\partial x^2}, \\ \frac{\partial \rho(x,t)}{\partial t} = \beta(\rho)(q_1 c_1(x,t) + q_2 c_2(x,t)) - \varepsilon \alpha(\rho) \rho(x,t) + D_* \frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2}, \end{cases} \quad (12)$$

$$\begin{aligned} c_1|_{x=0} = c_1^*(t), \quad c_1|_{t=0} = 0, \quad c_2|_{x=0} = c_2^*(t), \quad c_2|_{t=0} = 0, \quad \frac{\partial c_1}{\partial x}|_{x=L} = 0, \quad \frac{\partial c_2}{\partial x}|_{x=L} = 0, \\ \rho|_{x=0} = 0, \quad \rho|_{t=0} = 0, \quad \frac{\partial \rho}{\partial x}|_{x=L} = 0, \end{aligned} \quad (13)$$

$$\begin{aligned} [c_1]_{x=L_n} = 0, \quad [c_2]_{x=L_n} = 0, \quad [\rho]_{x=L_n} = 0, \\ \left[D_{1,n} \frac{\partial c_1}{\partial x} + v c_1 \right]_{x=L_n} = 0, \quad \left[D_{2,n} \frac{\partial c_2}{\partial x} + v c_2 \right]_{x=L_n} = 0, \quad \left[D_{*n} \frac{\partial \rho}{\partial x} \right]_{x=L_n} = 0. \end{aligned} \quad (14)$$

Приведем результаты расчетов по формулам (4) при $c_1^*(t) = 170 \text{ мг/л}$, $c_2^*(t) = 35 \text{ мг/л}$, $L = 0.8 \text{ м}$; $v = 1/360 \text{ м/с}$; $\beta_0 = 0.3 \text{ с}^{-1}$; $q_1 = q_2 = 1$; $\alpha_0 = 0.0056 \text{ с}^{-1}$; $\sigma_0 = 0.5$; $\alpha_* = 1$; $\beta_* = 1$; $\sigma_* = 1$; $b = b_* = 1$; $\varepsilon = 0.001$.

На рис. 2 показаны данные, полученные в результате натуральных эксперимен-

тов (отвечает индексу «exp») согласно классической модели Минца (отвечает индексу «M») [12] и рассчитанные по формулам (4) (отвечает индексу «p»). Видим, что расчеты по формулам (4) более точны (ближе к экспериментальным данным) сравнительно с классической моделью Минца. Результаты расчетов показаны на рис. 3 (где время защитного действия фильтра [12] при $n = 3$ и $n = 4$ практически не изменяется) подтверждают «экспериментальный факт», что для обеспечения «практической эффективности» достаточно 3-шаровых фильтров [13]. Полученные результаты дают возможность рассчитывать динамику продвижения концентрации загрязнения и осадка вдоль фильтра.

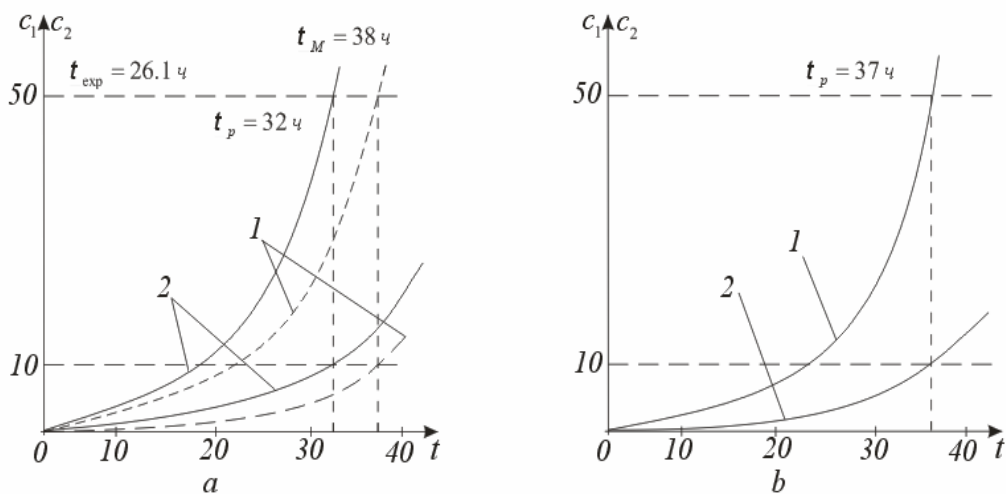


РИС. 2. Графики распределения концентрации загрязнения на выходе фильтр в момент времени t : 1 – за Минцом; 2 – по формулам (4): а – при $n = 1$ – и б – при $n = 2$

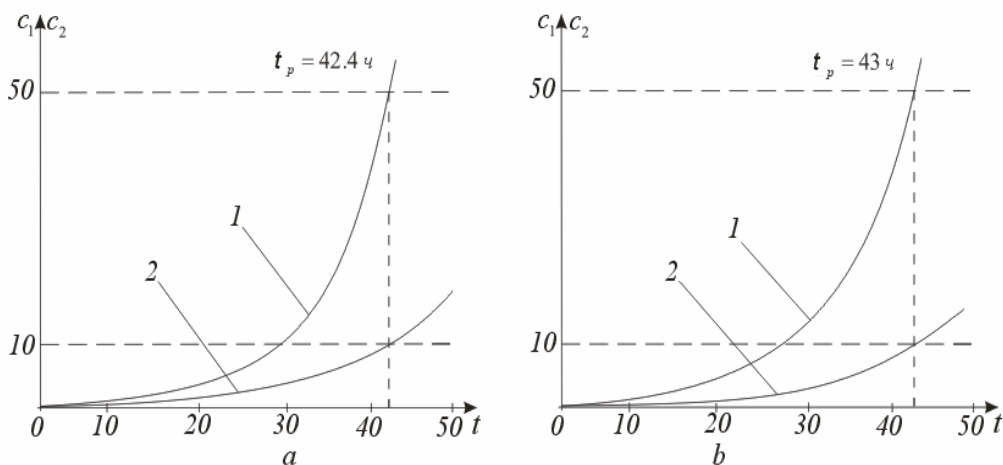


РИС. 3. Графики распределения концентрации загрязнения на выходе фильтр в момент времени t по формулам (4): а – при $n = 3$ и б – $n = 4$

Выводы. Сформировано математическую модель очистки жидкостей от многокомпонентных загрязнений в n -шаровом сорбционном фильтре, учитывающую обратное влияние определяющих факторов (концентрации загрязнения жидкости и осадка) на характеристики среды (коэффициенты пористости, диффузии, массообмена и т. п.).

Построен алгоритм решения соответствующей модельной задачи. Приведены результаты расчетов распределения концентрации примесей и массового объема примесей по высоте фильтрующей пористой засыпки для разных моментов времени и для разных количеств шаров. Проведена сравнительная характеристика данных, полученных экспериментальным путем, рассчитанных на основе классической модели Минца и полученных нами в результате расчетов. Подтверждено эффективность предложенной модели (по сравнению с классической моделью Минца) и существующую на данное время «практическую целесообразность» использования 3-шаровых фильтров.

А.Я. Бомба, А.П. Сафоник

МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ПРОЦЕСІВ ФІЛЬТРУВАННЯ РІДИН ВІД БАГАТОКОМПОНЕНТНОГО ЗАБРУДНЕННЯ У N -ШАРОВИХ ФІЛЬТРАХ

Розглядаються та вирішуються питання врахування зворотного впливу характеристик процесу (концентрації забруднення рідини й осаду) на характеристики середовища (коефіцієнти пористості, фільтрації, дифузії, масообміну тощо) під час моделювання процесів очищення рідини від багатоконпонентних домішок у n -шаровому сорбційному фільтрі. Побудовано алгоритм числово-асимптотичного наближення розв'язку відповідної модельної задачі, що описуються системою нелінійних сингулярно збурених диференціальних рівнянь типу «конвекція-дифузія-масообмін» і на цій основі проведено комп'ютерний експеримент.

A.J. Bomba, A.P. Safonyk

MATHEMATICAL MODELLING OF LIQUID FILTRATION FROM A MULTICOMPONENT POLLUTION PROCESSES IN N -LAYER FILTERS

The problems of using the inverse influence of characteristics of process of concentration of liquid contamination and sediment on the medium properties (coefficients of porosity, diffusion, mass exchange, etc.) are considered and solved when a liquid purification process from multicomponent impurities in n -layers sorption filters is modeled. The algorithm of numerical-asymptotic approximation of the solution of the corresponding modeling problem which is described by a system of nonlinear singularly perturbed differential equations of convection-diffusion-mass exchange type is constructed and the computer experiment is carried out on this basis.

1. *Elimelech M.* Predicting collision efficiencies of colloidal particles in porous media // *Water Research.* – 1992. – Vol. 26(1). – P. 1 – 8.
2. *Elimelech M.* Particle deposition on ideal collectors from dilute flowing suspensions: Mathematical formulation, numerical solution and simulations // *Separations Technology.* – 1994. – Vol. 4. – P. 186 – 212.

3. *Jegatheesan V.* Effect of surface chemistry in the transient stages of deep bed filtration. – PhD Dissertation, University of Technology Sydney, 1999. – 300 p.
4. *Johnson P.R.* Dynamics of colloid deposition in porous media: Blocking based on random sequential adsorption // *Langmuir*, 1995. – Vol. 11(3). – P. 801 – 812.
5. *Ison C.R.* Removal mechanisms in deep bed filtration // *Che. Eng. Sci.* – 1969. – Vol. 24. – P. 717 – 729.
6. *Ives K.J.* Theory of filtration, special subject No.7 // *Int. Water Supply congress.* – Vienna, 1969.
7. *Ives K.J.* Rapid filtration // *Water Research.* – 1970. – Vol. 4(3). – P. 201 – 223.
8. *Petosa A.R., Jaisi D.P., Quevedo I.R. et al.* Aggregation and Deposition of Engineered Nanomaterials in Aquatic Environments: Role of Physicochemical Interactions // *Environmental Science & Technology.* – September 2010. – Vol. 44. – P. 6532 – 6549.
9. *Бомба А.Я., Гаврилюк В.І, Сафоник А.П., Фурсачик О.А.* Нелінійні задачі типу фільтрація-конвекція-дифузія-масообмін за умов неповних даних // – Рівне: Національний університет водного господарства та природокористування, 2011. – 276 с.
10. *Бомба А.Я., Сафоник А.П.* Математическое моделирование процесса фильтрования жидкости от многокомпонентного загрязнения с учетом обратного влияния характеристик процесса на характеристики среды // *Электронное моделирование: междунар. науч.-теорет. журн.* – 2012. – Том 34, № 3. – С. 47 – 58.
11. *Бомба А.Я., Сафоник А.П.* Математичне моделювання процесу магнітного очищення рідин від багатокомпонентного забруднення // *Вісник Харківського національного університету серія «Математичне моделювання. Інформаційні технології. Автоматизовані системи управління».* – 2012. – № 1037. – Вип. 20 – С. 18–27.
12. *Миңц Д.М.* Теоретические основы технологии очистки воды. – М.: Стройиздат, 1964. – 156 с.
13. *Орлов В.О.* Водоочисні фільтри із зернистою засипкою. – Рівне: НУВГП, 2005. – 163 с.

Получено 07.03.2014

Об авторах:

Бомба Андрей Ярославович,

доктор технических наук, профессор,
заведующий кафедры информатики и прикладной математики
Ровенского государственного гуманитарного университета,
E-mail: abomba@ukr.net

Сафоник Андрей Петрович,

кандидат технических наук, доцент кафедры автоматизации, электротехнических
и компьютерно-интегрированных технологий
Национального университета водного хозяйства и природопользования.
E-mail: safonik@ukr.net