

Г. Д. Гавриленко, В. И. Мацнер

## Свободные колебания неидеальных ребристых оболочек при комбинированном нагружении

(Представлено членом-корреспондентом НАН Украины И. С. Чернышенко)

Предложен подход для определения частот свободных колебаний ребристых оболочек с осесимметричными неправильностями формы при действии осевых сжимающих сил и внутреннего или внешнего давления. Приведены результаты расчетов влияния параметров осесимметричных вмятин на частоты свободных колебаний.

**Методика расчета.** Свободные колебания неидеальных цилиндрических оболочек, нагруженных осевыми сжимающими силами на основе конструктивно-ортотропной теории, построенной с учетом частных случаев деформации, изучались в работе [1].

Ниже эти исследования продолжены применительно к оболочкам, подверженным совместному действию осевых сжимающих сил и внутреннего (внешнего) давления.

Рассматривается цилиндрическая оболочка, подкрепленная ребрами жесткости в двух направлениях, с осесимметричными начальными прогибами в виде вмятин и выпучин. Части оболочки  $\ell_{n+1} - \ell_n$  ( $n = 1, 2, \dots, N$ , где  $N$  — число вмятин) вследствие наличия начальных прогибов будут искривлены вдоль образующих по радиусам  $\rho_n$  и рассматриваются как оболочки, близкие по форме к цилиндрическим с радиусами кривизны  $r$ ,  $\rho_n$ .

Докритическое напряженное состояние оболочки при совместном действии нагрузок характеризуется напряжениями

$$\{N_x^F, (N_\theta^F)_n\} = \begin{cases} -\sigma h \alpha_1, \pm q r & \text{при } x \in [0, \ell_1] \cap x \in [\ell_4, \ell], \\ -\sigma h \alpha_1, \pm q r + r_n \sigma h \alpha_1 & \text{при } x \in [\ell_n, \ell_{n+1}], \end{cases} \quad (1)$$

где  $\sigma$  — докритическое сжимающее нормальное напряжение;  $q$  — радиальная нагрузка; знак (+) соответствует внутреннему давлению; знак (–) — внешнему;  $\alpha_1 = 1 + F_s/h\ell_s$ ,  $F_s$ ,  $\ell_s$  — площадь поперечного сечения стрингера и расстояние между стрингерами;  $\ell_s = 2\pi r/k_s$ ,  $k_s$  — число стрингеров;  $h$ ,  $r$ ,  $\ell$  — толщина, радиус срединной поверхности и длина оболочки.

При выводе расчетных формул использован энергетический метод. Задача решалась в перемещениях при их одночленной аппроксимации.

Не повторяя подробного вывода, который отличается от приведенного в работе [1] только наличием слагаемых, зависящих от поперечного давления  $q$ , для определения частот свободных колебаний получим такие расчетные зависимости:

$$(\omega_{ij}^2)_{cr} = \frac{E}{(1 - \mu^2)\rho_0 r^2} \frac{\bar{A}_{33}(A_{11}A_{22} - A_{12}^2) + 2A_{12}A_{13}A_{23} - A_{11}A_{23}^2 - A_{22}A_{13}^2}{\alpha_{11}(A_{22}A_{33} - A_{23}^2) + \alpha_{22}(A_{11}A_{33} - A_{13}^2) + \alpha_{33}(A_{11}A_{22} - A_{12}^2)}, \quad (2)$$

где

$$\bar{A}_{33} = A_{33} - \frac{\sigma}{E} A_{33}'' \pm \frac{q}{E} \frac{r}{h} (1 + S_{11})(1 - \mu^2) i^2;$$

$\rho_0$  — плотность материала обшивки.

Другие обозначения приведены в [1].

С учетом наличия ребер при определении критических частот колебаний, кроме общего случая деформирования оболочки, рассматриваются и частные случаи, при реализации которых на деформации подкрепляющих ребер наложены ограничения [2].

Рассматривались 17 вариантов расчета: *общий* случай деформации (все стрингеры и шпангоуты работают на растяжение–сжатие, изгиб и кручение); *восемь частных*, каждый из которых имеет свой подслучай. Отметим эти частные случаи: *первый* (стрингеры работают на растяжение–сжатие и изгибаются, шпангоуты работают аналогично общему случаю); *второй* подслучай отличается от первого случая тем, что не учитывается жесткость стрингеров и шпангоутов на растяжение–сжатие; *третьей* (стрингеры только закручиваются, шпангоуты учтены аналогично общему); *четвертой* (стрингеры работают как в общем случае, а в шпангоутах учтена жесткость на кручение); *пятой* (стрингеры работают на растяжение–сжатие и изгиб, шпангоуты только на кручение); *шестой* (стрингеры только закручиваются, шпангоуты работают на растяжение–сжатие и изгиб); *седьмой* (стрингеры и шпангоуты работают на растяжение–сжатие и изгиб); *восьмой* (стрингеры и шпангоуты только закручиваются), а в восьмом подслучае учитываются только ограничения на вид деформации.

В подслучаях не учтена дополнительно жесткость ребер на растяжение–сжатие.

Для каждого случая деформирования применяются специальные условия, которые накладываются на числа волн и полуволн, связанных с числом ребер, аналогично работе [3]. Эти условия для каждого случая (для подслучаев они те же, что и для соответствующего случая) следующие: *общий* ( $2i \neq t_1[n_s], j \neq t_2[n_r+1]$ ); *первый* ( $2i = t_1[n_s], j \neq t_2[n_r+1]$ ); *второй* ( $2i = t_1[n_s], j \neq t_2[n_r+1]$ ); *третьей* ( $2i \neq t_1[n_s], j = t_2[n_r+1]$ ); *четвертой* ( $2i \neq t_1[n_s], j = t_2[n_r+1]$ ); *пятой* ( $2i = t_1[n_s], j = t_2[n_r+1]$ ); *шестой* ( $2i = t_1[n_s], j \neq t_2[n_r+1]$ ); *седьмой* ( $2i \neq t_1[n_s], j \neq t_2[n_r+1]$ ); *восьмой* ( $2i = t_1[n_s], j = t_2[n_r+1]$ ), где  $t_1 = 0, 1, 2, 3, \dots$ ;  $t_2 = 1, 2, 3, \dots$ . Здесь  $i, j$  — числа волн и полуволн в окружном и продольном направлениях;  $n_s, n_r$  — числа стрингеров и шпангоутов соответственно.

**Числовые примеры.** На числовых примерах исследовано влияние нагрузки и начальных прогибов на величину свободных колебаний.

Рассмотрены такие оболочки: 1 — подкрепленные только стрингерами; 2 — подкрепленные только шпангоутами; 3 — подкрепленные стрингерами и шпангоутами.

Оболочки имели такие относительные размеры  $\ell/r = 2,25$ ,  $r/h = 400$ ; стрингеры ( $k_s = 32$ ) — уголки  $4 \times 3,5 \times 0,5 \cdot 10^{-2}$  м; шпангоуты ( $k_r = 4$ ) — уголки  $4 \times 8 \times 0,5 \cdot 10^{-2}$  м. Стрингеры крепились широкой полкой с внешней стороны обшивки, шпангоуты — узкой полкой с внутренней стороны. Материал обшивки и ребер — листовой прокат АМГ-6 М. Минимальная собственная частота  $f_{ij} = \omega/2\pi r$ , при заданных конкретных величинах параметров нагрузки  $p_1 = P_{cr}/P_{cl}$  и  $q_1 = q_{cr}/q_{cl}$ , где  $P_{cl} = 0,605Eh/r$ ;  $q_{cl} = 0,92(k_r + 1)\frac{r}{\ell}\sqrt{\frac{h}{r}}$ , определялась путем выбора  $(f_{ij})_{\min}$  из совокупности частот, заданных диапазоном изменения  $i, j$ .

На рис. 1 представлен спектр частот собственных колебаний для оболочки, подкрепленной стрингерами и шпангоутами, нагруженной осевыми сжимающими силами ( $p_1 = 0,5$ ) и внешним давлением ( $q_1 = -1$ ). Безразмерная амплитуда вмятин  $w_0/h = -1$ .

Цифрами на графиках обозначены варианты прогибов, приведенные на рис. 1. Здесь и на других рисунках линии, обозначенные цифрой “0”, соответствуют идеальной оболочке. Как видно из рисунка, только прогибы 3 значительно влияют на величину собственных

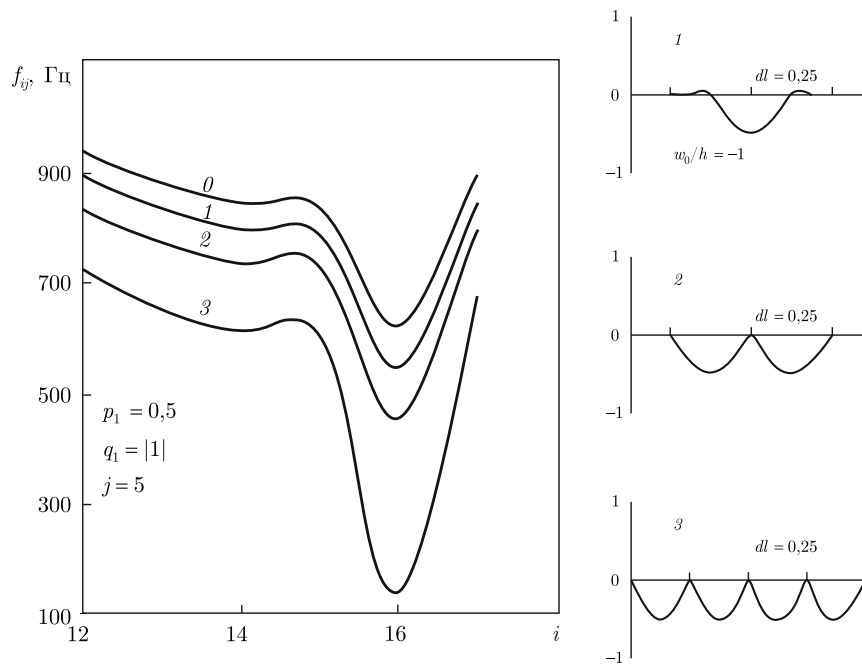


Рис. 1. Зависимости  $f_{ij} = f(i)$  для подкрепленной оболочки

частот колебаний. Минимальная частота колебаний оболочки с неправильностями 3 (при  $i = 16$ ) уменьшается в пять раз по сравнению с идеальной оболочкой.

На рис. 2 представлены зависимости  $f_{ij} = f(|q_1|)$  при заданном параметре нагрузки осевого сжатия для оболочек, подкрепленных стрингерами (рис. 2, а) и шпангоутами (рис. 2, б). Оболочки имеют четыре вмятины по длине оболочки, но разные амплитуды. Цифрами на рисунках обозначены варианты прогибов, представленных сверху рисунка. Сплошные линии соответствуют внешнему давлению, штриховые — внутреннему. Анализ результатов показывает, что минимальными будут частоты, которые соответствуют третьему варианту начальных прогибов. Увеличение амплитуды начальных прогибов приводит к значительному уменьшению частот колебаний оболочек. Частоты оболочек, нагруженных внутренним давлением, при увеличении его возрастают.

На рис. 3 представлены зависимости  $f_{ij} = f(|q_1|)$  при заданном параметре нагрузки осевого сжатия для оболочек, подкрепленных стрингерами (рис. 3, а) и шпангоутами (рис. 3, б). Оболочки имеют одну вмятину с безразмерной амплитудой  $w_0/h = -1$  по середине оболочки, но с различными их длинами.

Наличие начальных прогибов значительно уменьшает минимальные частоты колебаний для оболочек, подкрепленных стрингерами. Для оболочек, подкрепленных шпангоутами, это уменьшение менее существенно.

Как показывают расчеты, минимальные значения частот соответствует таким случаям деформации: для оболочек, подкрепленных стрингерами, — четвертому подслучаю (стрингеры изгибаются и закручиваются); для оболочек, подкрепленных шпангоутами, — восьмому частному случаю (шпангоуты только закручиваются). Минимальными оказались частоты, которые соответствуют первому варианту начальных прогибов.

На рис. 4 для оболочки, подкрепленной стрингерами и шпангоутами и имеющей четыре вмятины по всей длине оболочки с амплитудой  $w_0/h = -1$ , приведены зависимости  $f_{ij} =$

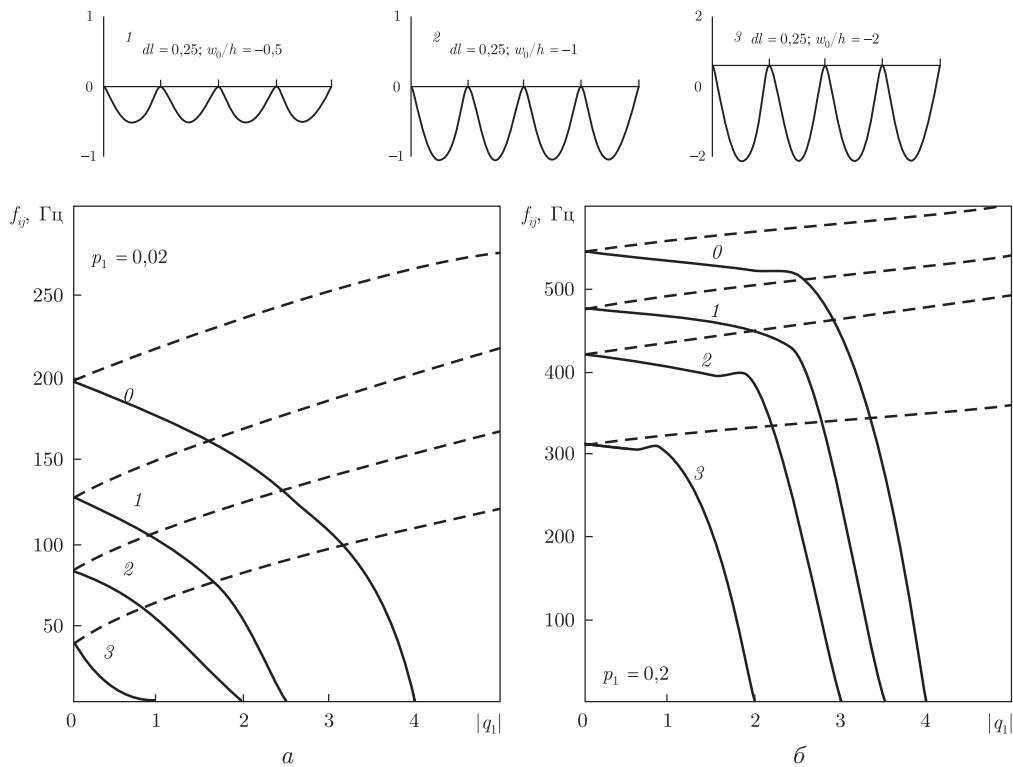


Рис. 2. Зависимости  $f_{ij} = f(q_1)$  для различных амплитуд прогибов

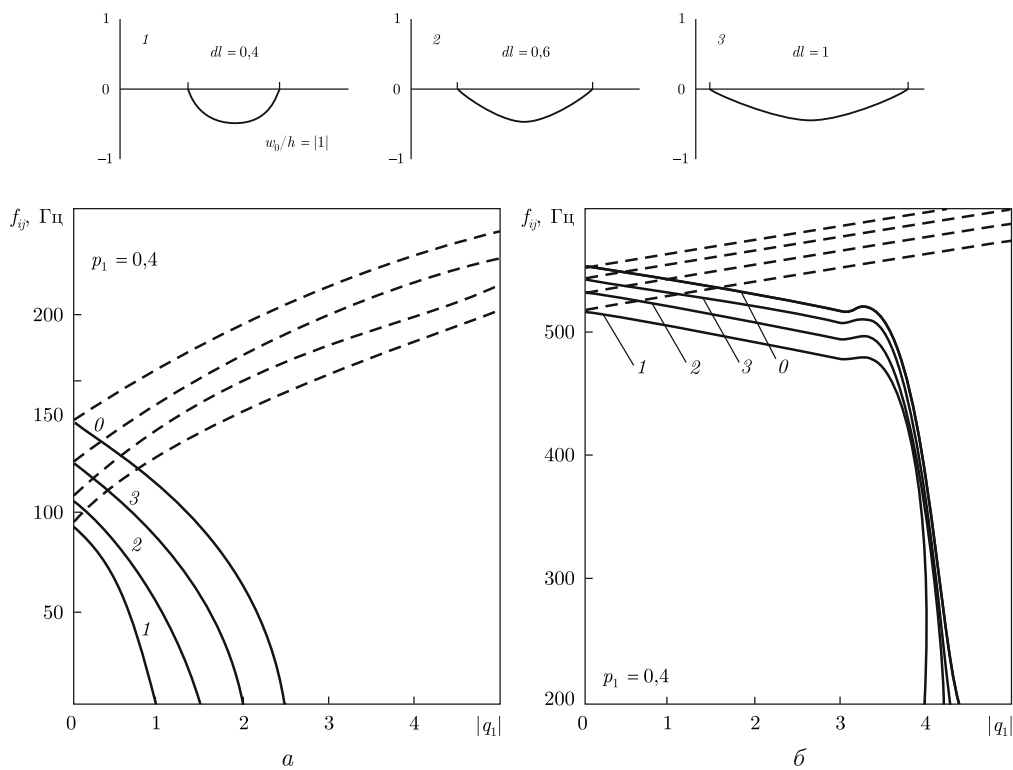


Рис. 3. Зависимости  $f_{ij} = f(i)$  для различных длин прогибов

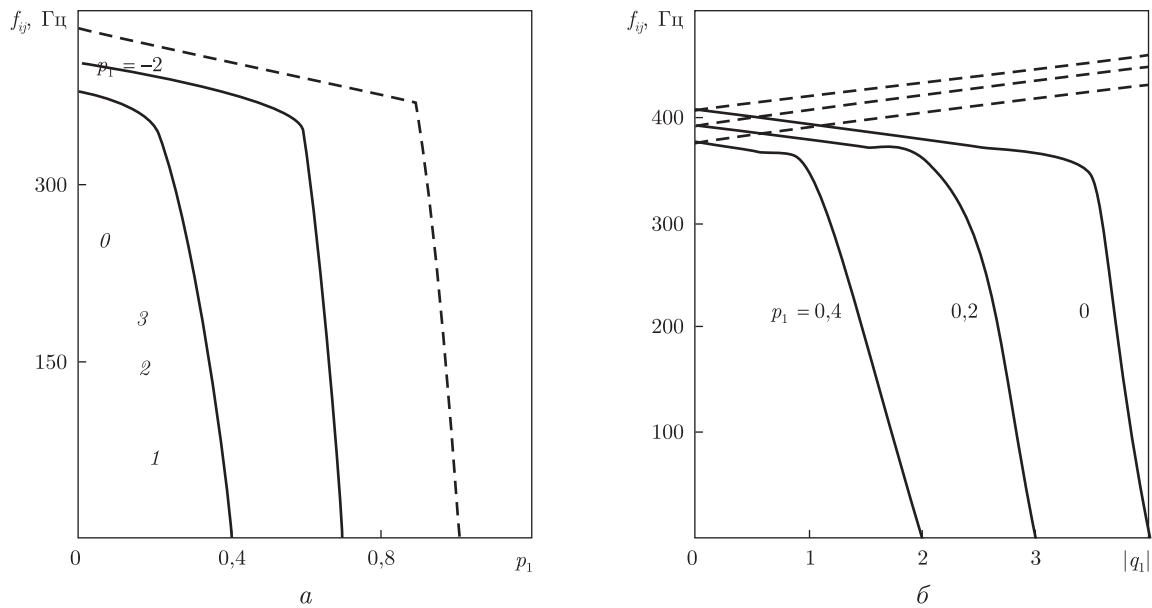


Рис. 4. Зависимости  $f_{ij} = f(p_1)$  и  $f_{ij} = f(|q_1|)$

$= f(p_1)$  (рис. 4, а) и  $f_{ij} = f(|q_1|)$  (рис. 4, б). Сплошные линии соответствуют внешнему давлению, штриховые — внутреннему.

При относительно малых  $q_1$  и  $p_1$   $(f_{ij})_{\min}$  соответствует третий подслучай деформирования с формой колебания  $j = 1$ ;  $i = 4$ . При  $q_1$  и  $p_1$ , близких к критическим,  $(f_{ij})_{\min}$  соответствует восьмому случаю деформирования с  $j = 5$ ;  $i = 16$ .

Наличие внешнего давления приводит к уменьшению частоты колебаний, а наличие внутреннего — к ее увеличению. Увеличение параметра осевого сжатия приводит к уменьшению частоты.

Таким образом, в результате анализа частот свободных колебаний ребристых цилиндрических оболочек, нагруженных осевыми сжимающими силами и внутренним или внешним давлением, можно сделать такие выводы: изучение различных случаев потери устойчивости неидеальных оболочек позволяет расширить возможности конструктивно-ортотропной теории и точнее оценить параметры критических нагрузок. В частности, удастся оценить не только общий случай потери устойчивости, который приближается к величинам, характерным для идеальной оболочки, но и частные, которые приняты при изучении оболочек с учетом дискретности ребер [3].

Анализ этих результатов также показал, что наличие осесимметричных несовершенств существенно влияет на частоты свободных колебаний.

1. Гавриленко Г. Д., Мацнер В. И., Кутенкова О. А. Свободные колебания продольно сжатых подкрепленных оболочек с осесимметричными вмятинами и выпучинами // Пробл. прочности. – 2009. – № 2. – С. 125–137.
2. Гавриленко Г. Д., Мацнер В. И. Аналитические и численные методы определения частот колебаний в нагруженных ребристых оболочках. – Киев: ИД “Академперіодика”, 2010. – 112 с.
3. Амиро И. Я., Заруцкий В. А. Методы расчета оболочек. Т. 2. Теория ребристых оболочек. – Киев: Наук. думка, 1980. – 368 с.

Институт механики им. С. П. Тимошенко  
НАН Украины, Киев

Поступило в редакцию 22.02.2012

Г. Д. Гавриленко, В. Й. Мацнер

**Вільні коливання недосконалих ребристих оболонок при комбінованому навантаженні**

*Запропоновано підхід для визначення частот вільних коливань ребристих оболонок, що мають осесиметричні недосконалості форми і піддані дії поздовжнього стиску і внутрішнього або зовнішнього тиску. Наведено результати розрахунків впливу параметрів осесиметричних недосконалостей на частоти вільних коливань.*

G. D. Gavrylenko, V. I. Matsner

**Free vibrations of nonideal ribbed shells under combined loading**

*An approach to the determination of the frequency of free vibrations of ribbed shells with axisymmetric imperfections of their form under the action of axial compressive forces and the internal or external pressure is suggested. The results of calculations of the influence of the parameters of dents on the free vibration frequencies are given.*