КОМПЬЮТЕРНАЯ МАТЕМАТИКА

УДК 519.6

И.В. ДЕЙНЕКА

ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ СОСТОЯНИЕМ ЭЛЛИПТИКО-ПАРАБОЛИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ И ИДЕНТИФИКАЦИЯ ЕЕ ПАРАМЕТРОВ

Исследованы вопросы оптимального управления состоянием эллиптико-параболической системы. Получены явные выражения градиентов функционалов-невязок для идентификации мощностей потоков воздействия на систему.

Введение. При исследовании движения жидкости в грунтовых средах с упруго-сжимаемыми и несжимаемыми составляющими возникает необходимость в решении начально-краевых задач для эллиптико-параболических уравнений с неточно заданными исходными данными, например, коэффициентов фильтрации.

Следуя [1–3], в данной работе на основе полученных результатов теории оптимального управления построены явные выражения градиентов функционалов-невязок для идентификации некоторых параметров эллиптико-параболических систем.

1. Оптимальное управление состоянием эллиптико-параболической системы

Пусть на области $\Omega_T=\Omega\times(0,T)$ $(\Omega= =\Omega_1\cup\Omega_2$, $\Omega_1=(0,\xi)$, $\Omega_2=(\xi,l)$, $0<\xi<l<\infty))$ определено эллиптико-параболическое уравнение

$$\chi(\Omega_1)\frac{\partial y}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial x}\left(k\frac{\partial y}{\partial x}\right)+f(x,t), \qquad (1)$$

где

$\chi(\Omega_1)=1$ при $x\in\Omega_1$ и $\chi(\Omega_1)=0$ при $x\notin\Omega_1$.

Краевые условия

$$-k\frac{\partial y}{\partial x}=-\alpha y+\beta,\ \ x=0,\ \ t\in(0,T),$$
$$k\frac{\partial y}{\partial x}=u,\ \ x=l,\ \ t\in(0,T). \tag{2}$$

Условия сопряжения

$$[y]=0,\ \left[k\frac{\partial y}{\partial x}\right]=0,\ x=\xi,\ t\in(0,T), \tag{3}$$

где $[\varphi]\big|_{x=\xi}=\varphi^{+}-\varphi^{-}$, $\varphi^{\pm}=\varphi(\xi\pm 0,t)$.

Начальное условие

$$y(x,0)=y_0(x),\ x\in\overline{\Omega}_1\cup\overline{\Omega}_2\,. \tag{4}$$

Функционал качества имеет вид

$$J(u)=\int_0^T (y(u;0,t)-z_g)^2dt+\overline{a}\int_0^T u^2dt, \tag{5}$$

где $\overline{a}=const>0$.

Полученная задача (1)–(5) состоит в определении элемента $u\in\mathrm{U}_\partial\subset\mathrm{U}=$ $=C([0,T])$, при котором имеет место выражение

$$J(u)=\inf_{v\in\mathrm{U}_\partial} J(v)\,, \tag{6}$$

где U_∂ – замкнутое выпуклое подмножество в пространстве управлений U.

При каждом фиксированном $u\in\mathrm{U}$ вместо классического решения начально-краевой задачи (1)–(4) будем использовать ее обобщенное решение, т. е. функцию $y=y(u)=y(u;x,t)\in W(0,T)$, которая $\forall w(x)\in V_0$ удовлетворяет равенствам

$$\begin{gathered}\left(\frac{dy}{dt},w\right)\Big|_{L_2(\Omega_1)}+a(y,w)=l(u;w),\\ y\big|_{t=0}=y_0(x),\ x\in\overline{\Omega}_1\cup\overline{\Omega}_2\,,\end{gathered} \tag{7}$$

где

$$a(y,w)=\int_\Omega k\frac{\partial y}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial x}dx+\alpha\, y(0,t)w(0),\ \ l(u;w)=u\,w(l)+\beta\, w(0),$$

$$W(0,T)=\{f:\ f\in L^2(0,T;V),\quad \frac{\partial v}{\partial t}\in L^2(0,T;L_2(\Omega))\},$$

$$V=\{v(x,t):\ v\big|_{\Omega_i}\in W_2^1(\Omega_i),\ i=1,2,\ [v]\big|_{x=\xi}=0,\ t\in(0,T)\},$$

$$V_0=\{v(x):\ v\big|_{\Omega_i}\in W_2^1(\Omega_i),\ i=1,2,\ [v]\big|_{x=\xi}=0\}.$$

Следуя [3], легко установить справедливость утверждения.

Теорема 1. При каждом фиксированном $u\in\mathrm{U}$ решение $y=y(u)=$ $=y(u;x,t)\in W(0,T)$ задачи (7) существует и единственно.

Пусть $y'=y(u')$, $y''=y(u'')$ – решения из $W(0,T)$ задачи (7) при функции u, равной соответственно u', u''. Тогда с учетом теорем вложения [4] получаем:

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|y'-y''\|^2_{L_2(\Omega_1)}+\delta\|y'-y''\|^2_V\le c_1\|u'-u''\|_{\mathsf{U}}\ \|y'-y''\|^2_V\,, \qquad (7')$$

где $\delta, c_1=\mathrm{const}>0$, $\|v\|^2_V=\sum_{i=1}^{2}\int_{\Omega_i}(v^2+v'^2)\,dx$, $\|v\|^2_{\mathsf{U}}=\int_0^T v^2dt$.

Следовательно,

$$\|y'-y''\|_{V\times L_2}\le\frac{c_1}{\delta}\|u'-u''\|\,. \qquad (7'')$$

Полученное неравенство обеспечивает непрерывность билинейной формы $\pi(\cdot,\cdot)$ и линейной формы $L(\cdot)$ представления

$$J(u)=\pi(u,u)-2L(u)+\left\|z_g-y(0)\right\|^2_{\mathsf{H}}\,, \qquad (8)$$

где

$$\pi(u,v)=(y(u)-y(0),\ y(v)-y(0))_{\mathsf{H}}+\bar{a}\int_0^T uv\,dt\,,$$

$$L(v)=(z_g-y(0),\ y(v)-y(0))_{\mathsf{H}}\,,\quad (y(v),y(u))_{\mathsf{H}}=\int_0^T y(v;0,t)\,y(u;0,t)\,dt\,.$$

На основании [5, гл. 1, теорема 1.1] доказано утверждение.

Теорема 2. Пусть состояние системы определяется как решение задачи (7). Тогда существует единственный элемент u выпуклого замкнутого в U множества U_∂, для которого

$$J(u)=\inf_{v\in\mathsf{U}_\partial}J(v)\,. \qquad (9)$$

Следуя [3, 5], легко установить, что управление $u\in\mathsf{U}_\partial$ оптимально тогда и только тогда, когда

$$(y(u)-z_g,\ y(v)-y(u))_{\mathsf{H}}+(\bar{a}u,v-u)_{\mathsf{U}}\ge 0\quad\forall v\in\mathsf{U}_\partial\,. \qquad (10)$$

Сопряженное состояние $p(v)$ для управления $v\in\mathsf{U}$ определим равенствами

$$-\chi(\Omega_1)\frac{\partial p}{\partial t}-\frac{\partial}{\partial x}\left(k\frac{\partial p}{\partial x}\right)=0,\quad (x,t)\in\Omega_T\,,$$

$$-k\frac{\partial p}{\partial x}=-\alpha p+y(v;x,t)-z_g\,,\quad x=0,\ t\in(0,T),$$

$$k\frac{\partial p}{\partial x}=0,\quad x=l,\ t\in(0,T),$$

$$p(x,T)=0,\quad x\in\Omega\,. \qquad (11)$$

Единственное обобщенное решение задачи (11) находим как функцию $p(v)\in W(0,T)$, которая $\forall w(x)\in V_0$ удовлетворяет равенствам

$$-\left(\frac{dp}{dt},w\right)_{L_2(\Omega_1)}+a(p,w)=(y(v;0,t)-z_g)w(0),\ \ t\in(0,T),$$
$$p\big|_{t=T}=0,\ \ x\in\Omega. \tag{12}$$

Выбирая в тождестве (12) вместо функции w разность $y(v)–y(u)$, с учетом (7), получаем

$$(y(u)-z_g,y(v)-y(u))_{\mathsf{H}}=-\int_0^T\left(\frac{dp}{dt},y(v)-y(u)\right)_{L_2(\Omega_1)}dt+$$
$$+\int_0^T a(p,\ y(v)-y(u))dt=\int_0^T(v-u)p(0,t)dt. \tag{13}$$

Учитывая (13), условие оптимальности (10) управления $u\in\mathsf{U}_\partial$ принимает вид:

$$\int_0^T(p(0,t)+\bar{a}u)(v-u)dt\geq 0. \tag{14}$$

При $\mathsf{U}_\partial=\mathsf{U}$ из (14) получаем

$$u=-p(0,t)/\bar{a}. \tag{15}$$

Следовательно, оптимальное управление $u\in\mathsf{U}_\partial=\mathsf{U}$ находим как составляющая решения $(y,p,u)^{\mathrm{T}}$ задачи (7), (12), (15).

2. Идентификация плотности теплового потока

Пусть состояние системы описывается задачей (7), где $u\in\mathsf{U}$ – неизвестное. Считаем, что в точке $x = 0$ при $t\in(0,T)$ известно решение задачи (7):

$$y(0,t)=f_0(t),\ t\in(0,T). \tag{15′}$$

Функционал-невязка имеет вид

$$J(u)=\frac{1}{2}\int_0^T(y(u;0,t)-f_0(t))^2dt. \tag{16}$$

Задача идентификации состоит в определении элемента $u\in\mathsf{U}$, при котором выполняется выражение

$$J(u)=\inf_{v\in\mathsf{U}}J(v).$$

Для решения задачи (7), (16) используем градиентные методы [6]:

$$u_{n+1}=u_n-\beta_n p_n,\ n=0,1,...,n^*, \tag{17}$$

где направления спуска p_n и коэффициент β_n определяются формулой

$$p_n = J'_{u_n}, \quad \beta_n = \frac{\|e_n\|^2}{\|J'_{u_n}\|^2},$$

где J'_{u_n} – градиент функционала (16) при $u = u_n$, $e_n = y(u_n; 0,t) - f_0(t)$.

Поскольку

$$\langle J'_{u_n}, \Delta u_n \rangle = \int_0^T (y(u_n) - f_0)(y(u_{n+1}) - y(u_n))\big|_{x=0} dt = \int_0^T p(0,t) \Delta u_n \, dt,$$

то $J'_{u_n} = p(0,t)$, $\|J'_{u_n}\|^2 = \int_0^T p^2(0,t) dt$, $p(x,t)$ – решение сопряженной задачи (12) при $u = u_n \in U$.

3. Оптимальное управление состоянием эллиптико-параболической системы с условиями сопряжения неидеального контакта

Пусть на области $\Omega_T = \Omega \times (0,T)$, ($\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$, $\Omega_1 = (0, \xi)$, $\Omega_2 = (\xi, l)$, $0 < \xi < l < \infty$)) определено уравнение (1). Краевые условия имеют вид (2). Условия сопряжения неидеального контакта запишем в виде

$$\left[k \frac{\partial y}{\partial x}\right] = 0, \quad \left\{k \frac{\partial y}{\partial x}\right\}^{\pm} = r[y], \quad x = \xi, \quad t \in (0,T). \tag{18}$$

При $t = 0$ имеем начальное условие (4).

При каждом фиксированном $u \in U_\partial \subset U$ вместо классического решения начально-краевой задачи (1), (2), (4), (18) будем использовать ее обобщенное решение, т. е. функцию $y = y(u) = y(u; x,t) \in W(0,T)$, которая $\forall w(x) \in V_0$ удовлетворяет тождеству

$$\begin{gathered} \left(\frac{dy}{dt}, w\right)_{L_2(\Omega_1)} + a(y,w) = l(u;w), \quad t \in (0,T), \\ y\big|_{t=0} = y_0, \quad x \in \overline{\Omega}_1 \cup \overline{\Omega}_2. \end{gathered} \tag{19}$$

где

$$a(y,w) = \int_\Omega k \frac{\partial y}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial x} dx + r[y][w] + \alpha y(0,t) w(0), \quad l(u;w) = u\, w(l) + \beta w(0),$$

$$V = \{v(x,t) \colon v\big|_{\Omega_i} \in W_2^1(\Omega_i),\ i = 1,2,\ t \in (0,T)\},\ V_0 = \{v(x) \colon v\big|_{\Omega_i} \in W_2^1(\Omega_i),\ i = 1,2\}.$$

Имеет место теорема, аналогичная теореме 1. Пусть $y' = y(u')$, $y'' = y(u'')$ – решения из $W(0,T)$ при функции u, равной соответственно u', $u'' \in U$. Имеет место неравенство (7′), обеспечивающее выполнение неравенства (7″), где

$$\|\varphi\|_V^2 = \sum_{i=1}^{2} \int_{\Omega_i} \left(v^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 \right) dx .$$

Неравенство (7″) обеспечивает непрерывность билинейной формы $\pi(\cdot,\cdot)$ и линейной формы $L(\cdot)$ представления (8) функционала (5).

На основании [5, гл. 1, теорема 1.1] доказано утверждение.

Теорема 3. Пусть состояние системы определяется как решение задачи (19). Тогда существует единственный элемент u выпуклого замкнутого в U множества U_∂ , для которого справедливо выражение (9).

Сопряженное состояние $p(v)$ для управления $v \in U$ определим системой равенств

$$-\chi(\Omega_1)\frac{\partial p}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x}\left(k\frac{\partial p}{\partial x}\right) = 0, \quad (x,t) \in \Omega_T,$$

$$-k\frac{\partial p}{\partial x} = -\alpha p + y(v; x,t) - z_g, \quad x = 0, \ t \in (0,T),$$

$$k\frac{\partial p}{\partial x} = 0, \quad x = l, \ t \in (0,T), \tag{20}$$

$$\left[k\frac{\partial p}{\partial x}\right] = 0, \ \left\{ k\frac{\partial p}{\partial x}\right\}^{\pm} = r[p], \quad x = \xi, \ t \in (0,T),$$

$$p\big|_{t=T} = 0, \quad x \in \bar{\Omega}_1 \cup \bar{\Omega}_2 \ .$$

Единственное обобщенное решение задачи (20) определим как функцию $p(v) \in W(0,T)$, которая $\forall w(x) \in V_0$ удовлетворяет равенствам

$$-\left(\frac{dp}{dt}, w\right)_{L_2(\Omega_1)} + a(p,w) = (y(v;0,t) - z_g)w(0), \ t \in (0,T), \tag{21}$$

$$p\big|_{t=T} = 0, \ x \in \Omega .$$

Выбирая в тождестве (21) вместо функции w разность $y(v)$–$y(u)$, с учетом (19), получаем выражение вида (13), а следовательно и равенство (15). Для определения оптимального управления $u \in U$ задачи (1), (2), (4), (18), (5) получаем дифференциальную задачу:

$$-\chi(\Omega_1)\frac{\partial y}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(k\frac{\partial y}{\partial x}\right) + f(x,t), \quad (x,t) \in \Omega_T,$$

$$-\chi(\Omega_1)\frac{\partial p}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x}\left(k\frac{\partial p}{\partial x}\right) = 0, \quad (x,t) \in \Omega_T,$$

$$-k\frac{\partial y}{\partial x} = -\alpha y + \beta, \quad x = 0, \ t \in (0,T),$$

$$
\begin{gathered}
-k\frac{\partial p}{\partial x} = -\alpha p + y - z_g, \quad x = 0, \ t \in (0,T), \\
k\frac{\partial y}{\partial x} = -p/\bar{a}, \quad k\frac{\partial p}{\partial x} = 0, \ x = l, \ t \in (0,T), \\
\left[k\frac{\partial y}{\partial x}\right] = 0, \ \left\{k\frac{\partial y}{\partial x}\right\}^{\pm} = r[y], \ x = \xi, \ t \in (0,T), \\
\left[k\frac{\partial p}{\partial x}\right] = 0, \ \left\{k\frac{\partial p}{\partial x}\right\}^{\pm} = r[p], \ x = \xi, \ t \in (0,T), \\
y\big|_{t=0} = y_0(x), \ p\big|_{t=T} = 0, \ x \in \bar{\Omega}_1 \cup \bar{\Omega}_2.
\end{gathered} \tag{22}
$$

Решив задачу (22), оптимальное управление $u \in U_\partial = U$ находим с помощью равенства (15).

4. Идентификация плотности теплового потока

Пусть состояние системы описывается начально-краевой задачей (1), (2), (4), (18), где $u \in U$ – неизвестное. Считаем, что в точке $x = 0$ при $t \in (0,T)$ известно решение задачи (19), заданное равенством (15′). Функционал-невязка имеет вид (16). Задачу идентификации (19), (16) будем решать с помощью градиентных методов (17). Поскольку

$$
\langle J'_{u_n}, \Delta u_n \rangle = \int_0^T (y(u_n) - f_0)(y(u_{n+1}) - y(u_n))\big|_{x=0} dt = \int_0^T p(0,t)\, \Delta u_n \, dt, \tag{23}
$$

то $J'_{u_n} = p(0,t)$.

Замечание 1. Если восстанавливаемый параметр *u* предполагается постоянным, т. е. $U = R$, то

$$
J'_{u_n} = \int_0^T p(0,t)dt, \quad \| J'_{u_n} \| = \left| \int_0^T p(0,t)dt \right|.
$$

Замечание 2. Если восстанавливаемый параметр *u* ищется в виде

$$
u = u_m(t) = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \varphi_i(t),
$$

где $\{\varphi_i(t)\}_{i=1}^m$ – система линейно независимых функций на отрезке $[0, T]$, то

$$
J'_{u_n} = \{\tilde{\psi}_i\}_{i=1}^m, \quad \tilde{\psi}_i = \int_0^T \varphi_i(t) p(0,t) dt, \quad \| J'_{u_n} \|^2 = \sum_{i=1}^m \tilde{\psi}_i^2 .
$$

Заключение. Исследованы вопросы оптимального управления состоянием эллиптико-параболической системы для случаев идеального и неидеального контактов составляющих среды. Получены явные выражения градиентов функционалов-невязок для идентификации мощности потока внешнего воздействия.

І.В. Дейнека

ОПТИМАЛЬНЕ УПРАВЛІННЯ СТАНОМ ЕЛІПТИКО-ПАРАБОЛІЧНОЇ СИСТЕМИ
ТА ІДЕНТИФІКАЦІЯ ЇЇ ПАРАМЕТРІВ

Досліджені питання оптимального управління станом еліптико-параболічної системи. Отримані явні вирази градієнтів функціоналів-нев'язок для ідентифікації потужностей потоків впливів на систему.

I.V. Deineka

OPTIMAL CONTROL OF THE STATE OF AN ELLIPTIC-PARABOLIC SYSTEM
AND IDENTIFICATION OF ITS PARAMETERS

Problems of optimal control of the state of an elliptic-parabolic system are investigated. Explicit expressions for gradients of residual functionals for identification of the impact of flows on the system are obtained.

1. *Сергиенко И.В., Дейнека В.С.* Системный анализ многокомпонентных распределенных систем. – Киев: Наук. думка, 2009. – 640 с.
2. *Сергиенко И.В., Дейнека В.С.* Решение комбинированных обратных задач для параболических многокомпонентных распределенных систем // Кибернетика и системный анализ. – 2007. – № 2 – 5. – С. 48–71.
3. *Дейнека В.С.* Оптимальное управление эллиптическими многокомпонентными распределенными системами. – Киев: Наук. думка, 2005. – 364 с.
4. *Ладыженская О.А., Уральцева Н.Н.* Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа. – М.: Наука, 1973. – 576 с.
5. *Лионс Ж.-Л.* Оптимальное управление системами, описываемыми уравнениями с частными производными. – М.: Мир, 1972. – 414 с.
6. *Алифанов О.М., Артюхин Е.А., Румянцев С.В.* Экстремальные методы решения некорректных задач. – М.: Наука, 1988. – 288 с.

Получено 14.02.2013

Об авторе:

Дейнека Игорь Васильевич,
кандидат физико-математических наук, младший научный сотрудник
Института кибернетики имени В.М. Глушкова НАН Украины.
E-mail: vdeineka@ukr.net