КОМПЬЮТЕРНАЯ МАТЕМАТИКА

*Математическое моделирование*

УДК 517.9:519.6

А.В. ГЛАДКИЙ, Ю.А. ГЛАДКАЯ, Д.В. ТКАЧУК

# ОБ ИССЛЕДОВАНИИ ОДНОЙ ЗАДАЧИ АМПЛИТУДНОГО УПРАВЛЕНИЯ

*Предлагается подход к исследованию задачи формирования заданных свойств акустического поля в подводных неоднородных волноводах, используя параболические аппроксимации волнового уравнения Гельмгольца. Сформулирована задача амплитудного управления для параболического уравнения типа Шредингера, исследованы дифференциальные свойства интегрального критерия эффективности. Полученное выражение для градиента позволяет использовать градиентные методы оптимизации для численного решения задачи амплитудного управления.*



**Введение.** Актуальность развития методов математического моделирования процессов распространения и оптимизации звуковых волн в неоднородных волноводах в значительной мере объясняется потребностями дистанционного зондирования и акустического мониторинга [1–7]. Большой интерес представляют вопросы формирования акустических полей с заданными свойствами и исследования особенностей распространения звуковых волн в неоднородных волноводах с учетом поглощения в среде.

В работе рассматривается подход к исследованию задачи формирования заданных свойств акустического поля в подводных неоднородных волноводах, используя параболические аппроксимации волнового уравнения Гельмгольца. Сформулирована задача амплитудного управления для параболического уравнения типа Шредингера, предложен интегральный критерий эффективности, исследованы дифференциальные свойства экстремальной задачи. Полученное выражение для градиента позволяет использовать градиентные методы оптимизации для численного решения задачи амплитудного управления.

**Постановка задачи.** Для описания акустического поля в осесимметричном волноводе $G=\{r_0<r<\infty, 0<z<H, r_0>0\}$, где $(r,z)$ – цилиндрические кординаты и ось $z$ направлена вертикально вниз, рассмотрим краевую задачу для волнового уравнения типа Шредингера с ными коэффициентами [2, 3]

$$2ik_0 \frac{\partial p}{\partial r} + \frac{\partial^2 p}{\partial z^2} + k_0^2 (n^2(r,z) - 1 + i\upsilon(r,z))p = 0. \qquad (1)$$

Здесь $p(r,z)$ – комплекснозначная функция; $i = \sqrt{-1}$ – мнимая единица; $k_0 = 2\pi f / c_0$ – волновое число; $c_0$ – нормировочная скорость звука; $n(r,z) = c_0 / c(r,z)$, $\upsilon(r,z) \ge 0$ – непрерывные достаточно гладкие функции (коэффициенты преломления и поглощения соответственно).

Дифференциальное уравнение (1) является базовым для определения дальнего комплекснозначного акустического давления $P(r,z)$, создаваемого гармоническим источником. Вне источника это давление удовлетворяет уравнению Гельмгольца

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left( r \frac{\partial P}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 P}{\partial z^2} + k_0^2 (n^2(r,z) + i\upsilon(r,z))P = 0$$

и при $k_0 r >> 1$ представляется в виде $P(r,z) = H_0^{(1)}(k_0 r) p(r,z)$, где $H_0^{(1)}(\cdot)$– функция Ханкеля первого рода нулевого порядка.

Рассмотрим краевую задачу для уравнения (1), ограничиваясь граничными условиями второго рода на нижней границе волновода:

$$2ik_0 \frac{\partial p}{\partial r} + \frac{\partial^2 p}{\partial z^2} + k_0^2 (n^2(r,z) - 1 + i\upsilon(r,z)))p = 0, (r,z) \in G, \qquad (2)$$

$$p\big|_{z=0} = 0, \left.\frac{\partial p}{\partial z}\right|_{z=H} = 0, \qquad (3)$$

$$p\big|_{r=r_0} = u_0(z), \qquad (4)$$

где $u_0(z)$ – заданная комплекснозначная функция.

Математическую постановку задачи формирования звуковых полей в неоднородном волноводе сформулируем как решение задачи минимизации некоторого функционала для обеспечения заданных характеристик акустического поля. При этом в качестве управления принимается начальное распределение звукового поля.

Тогда одна из экстремальных задач состоит в обеспечении заданного распределения звукового поля в некоторой части волновода и сводится к минимизации функционала [5, 6]

$$J_{\varepsilon}(u_0) = \int_0^H \beta(z)\left|p(R,z) - p_0(z)\right|^2 dz + \frac{1}{\varepsilon^2}\int_0^H \left|u_0(z)\right|^2 dz. \qquad (5)$$

Здесь $p(R,z) = p(R,z,u_0)$ – решение задачи (2)–(4), соотвествующее начальному условию $u_0(z)$; $r_0 < R < \infty$; $p_0(z)$ – заданное давление; $\beta(z) > 0$ – заданная непрерывная вещественная весовая функция; $u_0(z)$ – комплекснозначное управление из некоторого выпуклого замкнутого множества $U = \{u_0(z) \in L_2(\Omega)\}$, $\Omega = (0,H)$. Скалярное произведение и норма в $L_2(\Omega)$ определяются по формулам:

$$(w,v) = \left(\int_\Omega w\bar{v}dz\right)^{1/2}, \quad \|w(z)\|_{L_2(\Omega)} = \left(\int_\Omega |w(z)|^2 dz\right)^{1/2},$$

в которых черта означает комплексное сопряжение.

Отметим, что для выделения ограниченного решения в функционал качества (5) добавлен стабилизирующий функционал при некотором заданном $\varepsilon$.

Представим для удобства изложения комплеснозначную функцию $u_0(z)$ в виде $u_0(z) = u(x)\exp(i\varphi)$, где $u = |u_0|$, $\phi = \arg(u_0)$. В случае задачи амплитудно-фазового управления экстремальная задача состоит в определении комплекснозначного управления $u_0 \in U$, при котором функционал (5) достигает своей нижней грани:

$$J_{\varepsilon}(w) = \inf_{u_0 \in U} J_{\varepsilon}(u_0).$$

Далее рассматривается задача амплитудного управления, для которой требуется найти такое управление $u \in U_1, U_1 = \{u(z) \in L_2(\Omega), \operatorname{Im} u = 0\}$, которое минимизирует функционал

$$J_{\varepsilon}(u) = \int_0^H \beta(z)\left|p(R,z) - p_0(z)\right|^2 dz + \frac{1}{\varepsilon^2}\int_0^H \left|u(z)\right|^2 dz. \qquad (6)$$

**Дифференциальные свойства критерия качества.** С целью использования градиентных методов оптимизации исследуем дифференциальные свойства критерия качества (6) для задачи амплитудного управления. Для этого достаточно оценить главную линейную часть приращения функционала $\Delta J_{\varepsilon}(u) = J_{\varepsilon}(u + \delta u) - J_{\varepsilon}(u)$, где $\delta u$ – приращение управления.

Пусть $u(z)$ – некоторое фиксированное управление, тогда приращение решения $\delta p(r,z) = p(r,z,u+\delta u) - p(r,z,u)$ удовлетворяет краевой задаче

$$2ik_0 \frac{\partial \delta p}{\partial r} + \frac{\partial^2 \delta p}{\partial z^2} + k_0^2 (n^2(r,z) - 1 + i\upsilon(r,z))\delta p = 0, \tag{7}$$

$$\delta p_{|z=0} = 0, \left.\frac{\partial \delta p}{\partial z}\right|_{z=H} = 0\,, \tag{8}$$

с начальным условием

$$\delta p_{|r=r_0} = \delta u\, e^{i\varphi}\,. \tag{9}$$

Рассматривая выражение для приращения функционала (6), имеем

$$\Delta J_\varepsilon(u) = \int_0^H \beta(z) \left[\, |p(u+\delta u) - p_0|^2 - |p(u) - p_0|^2 \right] +$$

$$+ \frac{1}{\varepsilon^2}\left[\, |u+\delta u|^2 - |u|^2 \right] dz, \tag{10}$$

где для краткости обозначено $p(u+\delta u) = p(R,z,u+\delta u),\ p(u) = p(R,z,u).$

Учитывая, что

$$\left(\, |u+\delta u|^2 - |u|^2 \right) = (\delta u)^2 + 2\delta u \cdot u,$$

$$|p(u+\delta u) - p_0|^2 - |p(u) - p_0|^2 = |p(u+\delta u) - p(u) + p(u) - p_0|^2 - |p(u) - p_0|^2 =$$

$$= (\delta p)^2 + 2\,\mathrm{Re}(\delta p\, \overline{(p(u) - p_0)}),$$

приращение функционала (10) можно записать в виде

$$\Delta J_\varepsilon(u) = 2\,\mathrm{Re}\int_0^H \beta(z)\, \delta p\, \left(\overline{p(u) - p_0}\right) dz + \frac{2}{\varepsilon^2}\int_0^H \delta u \cdot u\, dz +$$

$$+ \int_0^H \left[\, \beta(z) |\delta p|^2 + \frac{1}{\varepsilon^2}(\delta u)^2 \,\right] dz. \tag{11}$$

Легко показать, что для решения начально-краевой задачи (7)–(9) справедливо неравенство

$$\int_\Omega \beta(z) |\delta p|^2 \Big|_{r=R} dz \le M \int_\Omega (\delta u)^2 dz,$$

где $M = \mathrm{const} > 0$.

Учитывая эту оценку в (11), для приращения функционала получаем

$$\Delta J_{\varepsilon}(u) = 2\,\mathrm{Re}\int_0^H \beta(z)\,\delta p\left(\overline{p(u)-p_0}\right) dz + \frac{2}{\varepsilon^2}\int_0^H \delta u\cdot u\, dz + o\left(\left\|\delta u\right\|_{L_2(\Omega)}\right). \quad (12)$$

Чтобы окончательно определить выражение для главной линейной части в (12), введем в рассмотрение сопряженную функцию $\psi(r,z)=\psi(r,z,u)$ как решение в области $G_R=\{r_0<r<R,\, 0<z<H\}$ некоторой краевой задачи, которую установим следующим образом.

Умножим дифференциальное уравнение (7) на $\overline{\psi}$ и проинтегрируем по области $G_R=\{\, r_0<r<R,\, 0<z<H\}$. Принимая во внимание граничные условия (8), а также условия

$$\overline{\psi}\,\Big|_{z=0}=0,\ \left.\frac{\partial\,\overline{\psi}}{\partial z}\right|_{z=H}=0,$$

после преобразований получаем

$$\int_{r_0}^{R}\int_0^H\left[2ik_0\frac{\partial\delta p}{\partial r}+\frac{\partial^2\delta p}{\partial z^2}+k_0^2\left(n^2(r,z)-1+i\upsilon(r,z)\right)\delta p\right]\overline{\psi}\,drdz=$$

$$=\int_{r_0}^{R}\int_0^H\left[-2ik_0\frac{\partial\overline{\psi}}{\partial r}+\frac{\partial^2\overline{\psi}}{\partial z^2}+k_0^2\left(n^2(r,z)-1+i\upsilon(r,z)\right)\overline{\psi}\right]\delta p drdz+$$

$$+2ik_0\int_0^H\overline{\psi}\,\delta p\Big|_{r=r_0}^{r=R}dz. \quad (13)$$

Отсюда следует, что введя сопряженную функцию $\overline{\psi}(r,z)$ как решение уравнения

$$-2ik_0\frac{\partial\overline{\psi}}{\partial r}+\frac{\partial^2\overline{\psi}}{\partial z^2}+k_0^2\left(n^2(r,z)-1+i\,\upsilon(r,z)\right)\overline{\psi}=0, \quad (14)$$

с условиями

$$\overline{\psi}_{|\,z=0}=0,\left.\frac{\partial\overline{\psi}}{\partial z}\right|_{z=H}=0, \quad (15)$$

приходим к соотношению

$$2ik_0\int_0^H\overline{\psi}\,\delta p\Big|_{r=r_0}^{r=R}dz=0.$$

Таким образом, справедливо следующее утверждение.

**Лемма**. Пусть $\overline{\psi}$, $\delta p$ – решения сопряженной задачи (14), (15) и задачи (7)–(9) соответственно. Тогда имеет место соотношение

$$\int_0^H \overline{\psi}\, \delta p\big|_{r=r_0} dz = \int_0^H \overline{\psi}\, \delta p\big|_{r=R} dz. \tag{16}$$

Если сопряженная функция $\overline{\psi}$ удовлетворяет при $r = R$ условию

$$\overline{\psi}\big|_{r=R} = 2\beta(z)\overline{(p(u) - p_0)}, \tag{17}$$

то на основании (17) приращение функционала (12) можно переписать в виде

$$\Delta J_\varepsilon(u) = 2\,\mathrm{Re}\int_0^H \delta p\overline{\psi}\big|_{r=r_0} dz + \frac{2}{\varepsilon^2}\mathrm{Re}\int_0^H \delta u\, u\, dz + o\left(\|\delta u\|\right). \tag{18}$$

Учтем далее в (18) начальное условие (9). Тогда в результате получим представление для приращения функционала (12)

$$\Delta J_\varepsilon(u) = \mathrm{Re}\int_0^H \overline{\psi}\; e^{i\phi}\delta u\, dz + \frac{2}{\varepsilon^2}\int_0^H \delta u\cdot u\, dz + o\left(\|\delta u\|_{L_2(\Omega)}\right). \tag{19}$$

Отсюда следует дифференцируемость функционала $J_\varepsilon(u)$ по $u(z)$ в пространстве $L_2(\Omega)$. Легко также видеть, что функционал (8) выпуклый.

Таким образом, установлена следующая теорема.

**Теорема**. Функционал (6) является выпуклым на множестве $U_1$, дифференцируемым по Фреше в пространстве $L_2(\Omega)$. Градиент функционала определяется выражением

$$J'_\varepsilon(u) = \mathrm{Re}\left(\overline{\psi}\; e^{i\phi}\right) + \frac{2}{\varepsilon^2}u. \tag{20}$$

Из вышеизложенного следует, что для определения градиента функционала (6) необходимо при фиксированном $u(z)$ получить решение двух краевых задач. Вначале с помощью прямой задачи (2)–(4) следует определить решение $p(R, z, u)$, а затем из (14), (15), (17) найти значение сопряженной функции при $r = r_0$. Приближенное решение задачи амплитудного управления можно получить, используя градиентные методы [8].

**Заключение.** В работе предложен подход к исследованию задачи амплитудного управления для параболического уравнения типа Шредингера. Предложен критерий эффективности, исследованы его дифференциальные свойства, получено выражение для градиента.

*А.В. Гладкий, Ю.А. Гладка, Д.В. Ткачук*

ПРО ДОСЛІДЖЕННЯ ОДНІЄЇ ЗАДАЧІ АМПЛІТУДНОГО КЕРУВАННЯ

Розглянуто підхід до дослідження задачі амплітудного керування для хвильового параболічного рівняння типу Шредінгера в неоднорідному хвилеводі. Запропоновано критерій ефективності, досліджені його диференціальні властивості, отримано вираз для градієнта.

*A.V. Gladky, Yu.A. Gladka, D.V. Tkachuk*

ABOUT INVESTIGATION OF A PROBLEM IN AMPLITUDE CONTROL

An approach to investigation of the problem of amplitude control for the wave parabolic equation of Schrodinger type in inhomogeneous waveguide is considered. The criterion of efficiency is proposed, its differential properties are studied, and expression for the gradient is obtained.

1. *Бреховских Л.М., Лысанов Ю.П.* Теоретические основы акустики океана. – Л.: Гидрометеоиздат, 1982. – 264 с.
2. *Распространение* волн и подводная акустика / Под ред. Дж. Б. Келлера и Дж. Пападакиса. – М.: Мир, 1980. – 230 с.
3. *Lee D., McDaniel S.T.* Ocean acoustic propagation by finite difference method // Comput. Math. Appl. – 1987. – **14**. – P. 305–423.
4. *Lee D., Pierse A.D., Shang E.C.* Parabolic equation development in the twentieth century // J. Comput. Acoust. – 2000. – **1**, N 4. – P. 527–637.
5. *Гладкий А.В., Сергиенко И.В., Скопецкий В.В.* Численно-аналитические методы исследования волновых процессов. – Киев: Наук. думка, 2001. – 452 с.
6. *Гладкий А.В., Скопецкий В.В., Харрисон Д.А.* Анализ и формирование акустических полей в неоднородных волноводах // Кибернетика и системный анализ. – 2009. – № 2. – С. 62–71.
7. *Завадский В.Ю.* Моделирование волновых процессов. – М.: Наука, 1991. – 248 с.
8. *Васильев П.Ф.* Методы оптимизации. – М.: Факториал Пресс, 2002. – 824 с.

Получено 28.19.2011

***Об авторах:***

*Гладкий Анатолий Васильевич*,
доктор физико-математических наук, профессор,
заведущий отделом Института кибернетики имени В.М. Глушкова НАН Украины,

*Гладкая Юлия Анатольевна*,
доцент Киевского национального торгово-экономического университета,

*Ткачук Дмитрий Витальевич*,
студент Национального технического университета Украины «КПИ».