КОМПЬЮТЕРНАЯ МАТЕМАТИКА

Экспертные системы, методы индуктивного вывода

*Предлагается процедура нечеткой многомерной линейной интерполяции, разработанная для вычисления апостериорных оценок в нечетких байесовских сетях по представленной нечеткими числами информации относительно нахождения вершин сети в недетерминированных состояниях.*



УДК 681.3: 06.51

О.В. ВЕРЕВКА

# УЧЕТ НЕДЕТЕРМИНИРОВАННЫХ СВИДЕТЕЛЬСТВ ПРИ АПОСТЕРИОРНОМ ОЦЕНИВАНИИ В НЕЧЕТКИХ БАЙЕСОВСКИХ СЕТЯХ

**Введение**. Апостериорное оценивание вероятностей в байесовских сетях (БС) производится в соответствии с цепной формулой учетом информации, однозначно определяющей те состояния, в которых пребывают переменные (свидетельства, симптомы) некоторого подмножества данной сети. В качестве результата используются соответствующие оценки условных вероятностей.

Однако часто в практических ситуациях в случаях, когда переменные сети являются индикаторами наличия некоторого свойства или признака у исследуемой системы, симптомы могут быть недетерминированными, т. е. неяркая выраженность наблюдаемых проявлений не позволяет точно указать, присутствует данное свойство или нет, хотя некоторые соображения относительно этого все же имеются. В байесовских экспертных системах, базирующихся на аналогичном математическом фундаменте, в подобных ситуациях используется величина, оценивающая степень проявления указанного свойства $e$, например, коэффициент определенности $u(e)$, принимающий значение $u(e) = +1$ в случае яркой выраженности наличия данного признака, $u(e) = -1$ при его несомненном отсутствии, $u(e) = 0$ в случае полной неопределенности, и промежуточные между +1 и –1 значения, соответствующие экспертной оценке степени проявления свойства $e$ в наблюдае-

мой ситуации [1]. Учет свидетельств выпол- няется последовательно, на каждом шаге
в качестве оценки принимается результат

линейной интерполяции на траверзе $u(e) \in [-1, 1]$ по двум опорным точкам: оценке, полученной на предыдущем шаге (она соответствует опорному траверзу полной неопределенности $u(e) = 0$), и той из вычисленных оценок условных вероятностей анализируемого допустимого состояния (при отсутствии свойства $e$ и при его наличии), соответствующий траверз которой ($-1$ или $+1$) расположен ближе к $u(e)$. Аналогичный подход может быть использован при создании древовидных нечетких БС с последовательным учетом свидетельств, информация относительно которых представлена нечетким показателем определенности с носителем в интервале $[-1, 1]$, с привлечением процедуры нечеткой линейной интерполяции [2, 3]. Однако в общем случае при разработке нечетких сетей с графом высокой связности учет поступивших свидетельств может быть лишь синхронным, и это требует существенной модификации интерполяционного подхода.

В данной работе предложена многомерная процедура линейной интерполяции, позволяющая учитывать информацию относительно недетерминированных состояний подмножества вершин в нечетких БС произвольной структуры.

**1. Основные обозначения**

Рассмотрим $(N + 1)$ вершину сети $v_0$, $\{v_n\}_{n=1}^{N}$ с допустимыми состояниями соответственно $V_n$ и $\overline{V}_n$ (или $-V_n$). Для оценки $P(V_0/U_1, \ldots, U_N)$ условной вероятности пребывания вершины сети $v_0$ в состоянии $V_0$ при условии, что вершины $\{v_n\}_{n=1}^{N}$ пребывают в состояниях $\{U_n\}_{n=1}^{N}$, где $U_n = \pm V_n$, будем использовать обозначение $\breve{P}(j_1,\ldots, j_N) = P(V_0/U_1,\ldots, U_N)$, где $j_n = 1$, если $U_n = V_n$; $j_n = -1$, если $U_n = \overline{V}_n$; $j_n = 0$, если состояние вершины $v_n$ в условии отсутствует. Естественно, $P(\overline{V}_0/U_1,\ldots, U_N)$ образует с $P(V_0/U_1, \ldots, U_N)$ отношение с ограничением

$$P(\overline{V}_0/U_1, \ldots, U_N) + P(V_0/U_1, \ldots, U_N) = 1.$$

Значению $\breve{P}(0, \ldots, 0)$ соответствует априорная оценка безусловной вероятности $P(V_0)$. Для множества уровня $\alpha$, $\alpha \in (0, 1]$ нечеткой оценки $\breve{P}(j_1, \ldots, j_N)$ будем использовать обозначение $[\breve{P}_\alpha^L(j_1, \ldots, j_N), \breve{P}_\alpha^R(j_1, \ldots, j_N)]$.

Сформулируем решаемую задачу следующим образом: для значений промежуточных на отрезке $[-1, 1]$ нечетких траверзов $\{u_n^*\}_{n=1}^{N}$ процедурой нечеткой линейной интерполяции определить оценку $\breve{P}(u_1^*,\ldots,u_N^*)$.

Процедура нечеткой многомерной линейной интерполяции базируется на принципе обобщения, позволяющем корректно определять и выполнять операции над нечеткими множествами на основе ранее заданных операций, в следующей формулировке [4, 5]. Пусть $A$ – нечеткое множество на универсуме $\Omega$ с функцией принадлежности (ф.п.) $\mu_A(x)$, $A_\alpha$ – его множество $\alpha$ – уровня, так что

$$A = \int_0^1 \alpha A_\alpha \text{ или } A = \sum_\alpha \alpha A_\alpha, \tag{1}$$

и $f$ – некоторое четкое преобразование $\Omega \to R^1$. Тогда образ нечеткого множества $A$ под действием четкого преобразования $f$ является нечетким множеством $f(A)$ на универсуме $R^1$ с ф.п.

$$\mu_{f(A)}(y) = \sup \{ \mu_A(x) \mid y = f(x), x \in \Omega, y \in R^1 \}, \tag{2}$$

$$f(A) = \int_0^1 \alpha\, f(A_\alpha) \text{ или } f(A) = \sum_\alpha \alpha\, f(A_\alpha). \tag{3}$$

В соответствии с приведенными соотношениями решение задачи нечеткой линейной интерполяции в общем случае может быть сведено к выполнению указанной процедуры для уровневых множеств опорных оценок и точечных значений показателей определенности с последующим нахождением максимальных достижимых значений ф.п. для точек носителя результата.

## 2. Линейная интерполяция для уровневых множеств на точечном траверзе

Предположим, что известны точечные показатели определенности $u_n^*$ с носителем $x_n^* \in (-1, 1)$ и ф.п. $\mu_{x_n^*} \times \delta(x_n - x_n^*)$, $n = \overline{1, N}$, являющиеся оценками пребывания вершин $\{v_n\}_{n=1}^N$ в состояниях $\{U_n\}_{n=1}^N$. Апостериорные нечеткие оценки $\breve{P}(j_1, \ldots, j_N)$ для любых наборов $(j_1, \ldots, j_N)$, $j_n \in \{-1, 0, 1\}$, т. е. для детерминированных состояний вершин $\{v_n\}_{n=1}^N$, могут быть получены в соответствии с начальными оценками связей в сети [2, 6]. Будем считать их известными, учитывающими также все заданные детерминированные свидетельства.

Для фиксированного $\alpha \in (0, 1]$ принципиальная схема выполнения линейной интерполяции для уровневого множества $[\breve{P}_\alpha^L(j_1, \ldots, j_N), \breve{P}_\alpha^R(j_1, \ldots, j_N)]$ выглядит следующим образом. В $(N + 1)$ – мерном пространстве $N$ размерностей (по осям $0x_n$, $n = \overline{1, N}$) ставятся в соответствие значениям допустимых точечных траверзов (это точки, принадлежащие отрезкам $[-1, 1]$), а $(N + 1)$-я размерность (ось $0t$) соответствует оценкам уровневых множеств, т. е. на многомерном траверзе $(j_1, \ldots, j_N)$ по оси $0t$ направлен интервал $[\breve{P}_\alpha^L(j_1, \ldots, j_N), \breve{P}_\alpha^R(j_1, \ldots, j_N)]$. Определяется $(N + 1)$ ближайший к точке $(x_1^*, \ldots, x_N^*)$ четкий опорный траверз $\{(j_1^k, \ldots, j_N^k)\}_{k=0}^N$, $j_n^k \in \{-1, 0, 1\}$. Кроме начала координат $(j_1^0, \ldots, j_N^0) =$ $= (0, \ldots, 0)$, всегда также выбирается точка $\vec{j}^1 = (j_1^1, \ldots, j_N^1)$: $j_n^1 := \operatorname{sign}(x_n^*)$, т. е. $j_n^1 = -1$ при $x_n^* < 0$ и $j_n^1 = 1$ при $x_n^* > 0$, эта точка определяет $1/2^N$ часть области допустимых траверзов, в которой производится интерполяция. Еще $(N - 1)$ траверз $(j_1^k, \ldots, j_N^k)$, $k = \overline{1, N}$ – это вершины гиперкуба $[-1, 1] \times \ldots \times [-1, 1]$, точки пересечения его граней с осями и ребер с координатными плоскостями, оценки $\breve{P}(j_1^k, \ldots, j_N^k)$ для которых известны; при этом более информативные показатели определенности $u_n^*$ (у которых $|x_n^*|$ ближе к 1) имеют больший приоритет. Через точки $\{(j_1^k,\ldots, j_N^k,\ \breve{P}_\alpha^L(j_1^k,\ldots, j_N^k))\}$ и $\{(j_1^k,\ldots, j_N^k,\ \breve{P}_\alpha^R(j_1^k,\ldots, j_N^k))\}$, $k=\overline{0,N}$, с учетом их взаимного расположения, проводятся гиперплоскости (плоскости при $N=2$, прямые при $N=1$). Отрезок $[t^L, t^R]$ между нижней ($L$) и верхней ($R$) гиперплоскостями на траверзе $(x_1^*, \ldots, x_N^*, 0)$ интерпретируется как нечеткий интервал с ф.п. $\rho(\alpha, x_1^*,\ldots,x_N^*) = \{\alpha \times \prod_{n=1}^{N}\mu_{x_n^*}\}$, носитель $[S^L(\alpha, x_1^*,\ldots,x_N^*),\ S^R(\alpha, x_1^*,\ldots,x_N^*)]$ которого принадлежит соответствующему уровневому множеству искомой линейной интерполяции $\breve{P}(u_1^*, \ldots, u_N^*)$. В вышепринятых обозначениях

$$[S^L(\alpha, x_1^*,\ldots,x_N^*), S^R(\alpha, x_1^*,\ldots,x_N^*)] \subseteq$$
$$\subseteq [\breve{P}^L_{\alpha\times\prod_{n=1}^{N}\mu_{x_n^*}}(u_1^*,\ldots,u_N^*),\ \breve{P}^R_{\alpha\times\prod_{n=1}^{N}\mu_{x_n^*}}(u_1^*,\ldots,u_N^*)]. \tag{4}$$

Рассмотрим более подробно предложенную процедуру для $N = 1, 2, 3$ и общего случая $N > 3$.

*Случай* $N = 1$. Траверзы расположены на отрезке [–1, 1] оси $0x_1$. По оси $0t$ на траверзах $j \in \{-1, 0, 1\}$ направлены интервалы носителей $\alpha$ – уровня $[\breve{P}_\alpha^L(j), \breve{P}_\alpha^R(j)]$. По оси $0x_1$ задан нечеткий точечный траверз $u_1^*$: носитель $x_1^* \in (-1, 1)$ и ф.п. $\mu_{x_1^*} \times \delta(x_1 - x_1^*)$.

1. На оси траверзов $0x_1$ $j^0 := 0$; $j^1 := \mathrm{sign}(x_1^*)$.

2. Точки $(j^0, \breve{P}_\alpha^L(j^0))$ и $(j^1, \breve{P}_\alpha^L(j^1))$, $(j^0, \breve{P}_\alpha^R(j^0))$ и $(j^1, \breve{P}_\alpha^R(j^1))$ плоскости $t0x_1$ соединяем отрезками прямых:

$$\frac{x_1 - j^0}{j^1 - j^0} = \frac{t^{L,R} - \breve{P}_\alpha^{L,R}(j^0)}{\breve{P}_\alpha^{L,R}(j^1) - \breve{P}_\alpha^{L,R}(j^0)}, \text{ или } t^{L,R} = |x_1| \times (\breve{P}_\alpha^{L,R}(j^1) - \breve{P}_\alpha^{L,R}(j^0)) + \breve{P}_\alpha^{L,R}(j^0).$$

3. Результатом является интервал между интерполирующими прямыми на траверзе $x_1^*$,

$$[\breve{P}^L_{\alpha\times\mu_{x_1^*}}(u_1^*),\ \breve{P}^R_{\alpha\times\mu_{x_1^*}}(u_1^*)] \supseteq [S^L(\alpha, x_1^*), S^R(\alpha, x_1^*)] =$$
$$= [|x_1^*| \times (\breve{P}_\alpha^L(j^1) - \breve{P}_\alpha^L(j^0)) + \breve{P}_\alpha^L(j^0),\ |x_1^*| \times (\breve{P}_\alpha^R(j^1) - \breve{P}_\alpha^R(j^0)) + \breve{P}_\alpha^R(j^0)]. \tag{5}$$

*Случай* $N = 2$. Траверзы располагаются в квадрате $[-1, 1]\times[-1, 1]$ плоскости $0x_1x_2$. По оси $0t$ на траверзах $(j_1, j_2)$, $j_1, j_2 \in \{-1, 0, 1\}$ направлены интервалы $\alpha$ – уровня $[\breve{P}_\alpha^L(j_1, j_2), \breve{P}_\alpha^R(j_1, j_2)]$. По осям $0x_1$ и $0x_2$ заданы нечеткие точечные траверзы, соответственно $u_1^*$ – {носитель $x_1^*$, ф.п. $\mu_{x_1^*} \times \delta(x_1 - x_1^*)$} и $u_2^*$ – {носитель $x_2^*$, ф.п. $\mu_{x_2^*} \times \delta(x_2 - x_2^*)$}, $x_1^*, x_2^* \in (-1, 1)$.

1. На плоскости траверзов $0x_1x_2$ $\vec{j}^0 = (j_1^0,\ j_2^0) = (0,\ 0)$, $\vec{j}^1 = (j_1^1,\ j_2^1)$, т. е. $j_n^1 := \mathrm{sign}(x_n^*)$.

2. Если $|x_1^*| = |x_2^*|$, то выполняется интерполяционная процедура для случая $N = 1$ в соответствии с выражением, полученным из (5) подстановкой $\vec{j}^0$ и $\vec{j}^1$ вместо $j^0$ и $j^1$.

$$[\breve{P}^L_{\alpha\times\mu_{x_1^*}\times\mu_{x_2^*}}(u_1^*,\ u_2^*),\ \breve{P}^R_{\alpha\times\mu_{x_1^*}\times\mu_{x_2^*}}(u_1^*,\ u_2^*)] \supseteq [S^L(\alpha, x_1^*, x_2^*), S^R(\alpha, x_1^*, x_2^*)] =$$

$$= [\,|x_1^*|\times(\breve{P}^L_\alpha(\vec{j}^1) - \breve{P}^L_\alpha(\vec{j}^0)) + \breve{P}^L_\alpha(\vec{j}^0),\ |x_1^*|\times(\breve{P}^R_\alpha(\vec{j}^1) - \breve{P}^R_\alpha(\vec{j}^0)) + \breve{P}^R_\alpha(\vec{j}^0)\,]. \quad (6)$$

3. $|x_1^*| \neq |x_2^*|$.

Точка $\vec{j}^1 = (j_1^1, j_2^1)$ определяет на плоскости $0x_1x_2$ квадрат, ограниченный прямыми $x_1 = 0$ и $x_2 = 0$, $x_1 = j_1^1$ и $x_2 = j_2^1$, в котором расположен точечный нечеткий траверз $(x_1^*,\ x_2^*)$. На пересечении сторон этого квадрата находится третий опорный траверз $\vec{j}^2 = (j_1^2, j_2^2)$, это точка $(j_1^1, 0)$ при $|x_1^*| > |x_2^*|$ и точка $(0, j_2^1)$ при $|x_1^*| < |x_2^*|$, т. е. ближайшая к $(x_1^*, x_2^*)$ из точек $(j_1^1, 0)$ и $(0, j_2^1)$. Через точки $(\vec{j}^0,\ \breve{P}^L_\alpha(\vec{j}^0))$, $(\vec{j}^1,\ \breve{P}^L_\alpha(\vec{j}^1))$, $(\vec{j}^2,\ \breve{P}^L_\alpha(\vec{j}^2))$ и $(\vec{j}^0,\ \breve{P}^R_\alpha(\vec{j}^0))$, $(\vec{j}^1,\ \breve{P}^R_\alpha(\vec{j}^1))$, $(\vec{j}^2,\ \breve{P}^R_\alpha(\vec{j}^2))$ проводим нижнюю ($L$) и верхнюю ($R$) интерполирующие плоскости

$$t^{L,R} = C_1^{L,R}\times x_1 + C_2^{L,R}\times x_2 + \breve{P}^{L,R}_\alpha(\vec{j}^0), \quad (7)$$

где коэффициенты $C_1^{L,R}$ и $C_2^{L,R}$ определяются из систем уравнений

$$\begin{cases} \breve{P}^{L,R}_\alpha(\vec{j}^1) = C_1^{L,R}\times j_1^1 + C_2^{L,R}\times j_2^1 + \breve{P}^{L,R}_\alpha(\vec{j}^0), \\ \breve{P}^{L,R}_\alpha(\vec{j}^2) = C_1^{L,R}\times j_1^2 + C_2^{L,R}\times j_2^2 + \breve{P}^{L,R}_\alpha(\vec{j}^0). \end{cases} \quad (8)$$

Результат – интервал между интерполирующими плоскостями на траверзе $(x_1^*,\ x_2^*)$,

$$[\breve{P}^L_{\alpha\times\mu_{x_1^*}\times\mu_{x_2^*}}(u_1^*,\ u_2^*),\ \breve{P}^R_{\alpha\times\mu_{x_1^*}\times\mu_{x_2^*}}(u_1^*,\ u_2^*)] \supseteq [S^L(\alpha, x_1^*, x_2^*), S^R(\alpha, x_1^*, x_2^*)] =$$

$$= [\,C_1^L\times x_1^* + C_2^L\times x_2^* + \breve{P}^L_\alpha(\vec{j}^0),\ C_1^R\times x_1^* + C_2^R\times x_2^* + \breve{P}^R_\alpha(\vec{j}^0)\,]. \quad (9)$$

Следствием выбора значений опорных траверзов $\vec{j}^1$ и $\vec{j}^2$ является возможность получения оценки (9) в более удобном для дальнейшего применения представлении:

$$t^{L,R} = D_1^{L,R}\times|x_1| + D_2^{L,R}\times|x_2| + \breve{P}^{L,R}_\alpha(\vec{j}^0), \quad (10)$$

$$[\breve{P}^L_{\alpha\times\mu_{x_1^*}\times\mu_{x_2^*}}(u_1^*,\ u_2^*),\ \breve{P}^R_{\alpha\times\mu_{x_1^*}\times\mu_{x_2^*}}(u_1^*,\ u_2^*)] \supseteq$$

$$\supseteq [\,D_1^L\times|x_1^*| + D_2^L\times|x_2^*| + \breve{P}^L_\alpha(\vec{j}^0),\ D_1^R\times|x_1^*| + D_2^R\times|x_2^*| + \breve{P}^R_\alpha(\vec{j}^0)\,], \quad (11)$$

где коэффициенты $D_1^{L,R} = C_1^{L,R} \times \operatorname{sign}(x_1^*)$ и $D_2^{L,R} = C_2^{L,R} \times \operatorname{sign}(x_2^*)$ определяются из систем уравнений

$$\begin{cases} \breve{P}_\alpha^{L,R}(\bar{j}^1) = D_1^{L,R} \times |j_1^1| + D_2^{L,R} \times |j_2^1| + \breve{P}_\alpha^{L,R}(\bar{j}^0), \\ \breve{P}_\alpha^{L,R}(\bar{j}^2) = D_1^{L,R} \times |j_1^2| + D_2^{L,R} \times |j_2^2| + \breve{P}_\alpha^{L,R}(\bar{j}^0). \end{cases} \tag{12}$$

*Случай* $N = 3$. Траверзы расположены в кубе $[-1, 1] \times [-1, 1] \times [-1, 1]$ подпространства $0x_1x_2x_3$. По оси $0t$ на траверзах $(j_1, j_2, j_3, 0)$, $j_1, j_2, j_3 \in \{-1, 0, 1\}$ направлены интервалы $\alpha$ – уровней $[\breve{P}_\alpha^L(j_1, j_2, j_3), \breve{P}_\alpha^R(j_1, j_2, j_3)]$. По осям $0x_1$, $0x_2$ и $0x_3$ заданы нечеткие точечные траверзы, соответственно $u_1^*\{x_1^*, \mu_{x_1^*} \times \delta(x_1 - x_1^*)\}$, $u_2^*\{x_2^*, \mu_{x_2^*} \times \delta(x_2 - x_2^*)\}$ и $u_3^*\{x_3^*, \mu_{x_3^*} \times \delta(x_3 - x_3^*)\}$, $x_1^*, x_2^*, x_3^* \in (-1, 1)$.

1. В подпространстве траверзов $0x_1x_2x_3$ $\bar{j}^0 = (j_1^0, j_2^0, j_3^0) = (0, 0, 0)$; $\bar{j}^1 = (j_1^1, j_2^1, j_3^1)$: $j_n^1 := \operatorname{sign}(x_n^*)$.

2. При $|x_1^*| = |x_2^*| = |x_3^*|$ выполняется интерполяционная процедура для случая $N = 1$ с использованием аналога соотношения (6):

$$[\breve{P}^L_{\alpha \times \mu_{x_1^*} \times \mu_{x_2^*} \times \mu_{x_3^*}}(u_1^*, u_2^*, u_3^*),\ \breve{P}^R_{\alpha \times \mu_{x_1^*} \times \mu_{x_2^*} \times \mu_{x_3^*}}(u_1^*, u_2^*, u_3^*)] \supseteq$$
$$\supseteq [\,|x_1^*| \times (\breve{P}_\alpha^L(\bar{j}^1) - \breve{P}_\alpha^L(\bar{j}^0)) + \breve{P}_\alpha^L(\bar{j}^0),\ |x_1^*| \times (\breve{P}_\alpha^R(\bar{j}^1) - \breve{P}_\alpha^R(\bar{j}^0)) + \breve{P}_\alpha^R(\bar{j}^0)].$$

3. $|x_1^*| = |x_2^*| \neq |x_3^*|$. Выполняется интерполяционная процедура для случая $N = 2$ согласно выражениям, аналогичным (10) – (12): находим третий опорный траверз $\bar{j}^2 = (j_1^2, j_2^2, j_3^2)$, это точка $(j_1^2, j_2^2, 0)$ при $|x_1^*| > |x_3^*|$ и точка $(0, 0, j_3^2)$ при $|x_1^*| < |x_3^*|$. Через точки $(\bar{j}^0, \breve{P}_\alpha^L(\bar{j}^0))$, $(\bar{j}^1, \breve{P}_\alpha^L(\bar{j}^1))$, $(\bar{j}^2, \breve{P}_\alpha^L(\bar{j}^2))$ и $(\bar{j}^0, \breve{P}_\alpha^R(\bar{j}^0))$, $(\bar{j}^1, \breve{P}_\alpha^R(\bar{j}^1))$, $(\bar{j}^2, \breve{P}_\alpha^R(\bar{j}^2))$ проводим нижнюю ($L$) и верхнюю ($R$) интерполирующие плоскости

$$t^{L,R} = D_1^{L,R} \times |x_1| + D_2^{L,R} \times |x_3| + \breve{P}_\alpha^{L,R}(\bar{j}^0),$$

где коэффициенты $D_1^{L,R}$ и $D_2^{L,R}$ определяются из систем уравнений:

$$\begin{cases} \breve{P}_\alpha^{L,R}(\bar{j}^1) = D_1^{L,R} \times |j_1^1| + D_2^{L,R} \times |j_2^1| + \breve{P}_\alpha^{L,R}(\bar{j}^0), \\ \breve{P}_\alpha^{L,R}(\bar{j}^2) = D_1^{L,R} \times |j_1^2| + D_2^{L,R} \times |j_2^2| + \breve{P}_\alpha^{L,R}(\bar{j}^0). \end{cases}$$

$$[\breve{P}^L_{\alpha \times \mu_{x_1^*} \times \mu_{x_2^*} \times \mu_{x_3^*}}(u_1^*, u_2^*, u_3^*),\ \breve{P}^R_{\alpha \times \mu_{x_1^*} \times \mu_{x_2^*} \times \mu_{x_3^*}}(u_1^*, u_2^*, u_3^*)] \supseteq$$
$$\supseteq [D_1^L \times |x_1^*| + D_2^L \times |x_3^*| + \breve{P}_\alpha^L(\bar{j}^0),\ D_1^R \times |x_1^*| + D_2^R \times |x_3^*| + \breve{P}_\alpha^R(\bar{j}^0)].$$

4. $|x_1^*| \neq |x_2^*| \neq |x_3^*| \neq |x_1^*|$. Точка $\vec{j}^1 = (j_1^1, j_2^1, j_3^1)$ определяет в подпространстве $0x_1x_2x_3$ куб, ограниченный плоскостями $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$, $x_1 = j_1^1$, $x_2 = j_2^1$ и $x_3 = j_3^1$, в котором расположен точечный нечеткий траверз $(x_1^*, x_2^*, x_3^*)$. На гранях этого куба находятся третий и четвертый опорный траверзы $\vec{j}^2 = (j_1^2, j_2^2, j_3^2)$ и $\vec{j}^3 = (j_1^3, j_2^3, j_3^3)$, $j_{1,2,3}^{2,3} \in \{-1, 0, 1\}$, евклидово расстояние от которых до точки $(x_1^*, x_2^*, x_3^*)$ минимально: $\vec{j}^2$ – точка с координатой $j_m^1$ на оси $0x_m$, где $|x_m| = \max\{|x_n^*|, n = \overline{1,N}\}$, а $\vec{j}^3$ – проекция точки $\vec{j}^1$ на координатную плоскость $x_l = 0$, т. е. точка с нулем на $l$-й позиции и значениями $j_n^1$, $n \neq l$ соответственно на всех остальных, где $|x_l^*| = \min\{|x_n^*|, n = \overline{1,N}\}$. Через точки $(\vec{j}^0, \breve{P}_\alpha^L(\vec{j}^0))$, $(\vec{j}^1, \breve{P}_\alpha^L(\vec{j}^1))$, $(\vec{j}^2, \breve{P}_\alpha^L(\vec{j}^2))$, $(\vec{j}^3, \breve{P}_\alpha^L(\vec{j}^3))$ и $(\vec{j}^0, \breve{P}_\alpha^R(\vec{j}^0))$, $(\vec{j}^1, \breve{P}_\alpha^R(\vec{j}^1))$, $(\vec{j}^2, \breve{P}_\alpha^R(\vec{j}^2))$, $(\vec{j}^3, \breve{P}_\alpha^R(\vec{j}^3))$ проводим нижнюю ($L$) и верхнюю ($R$) интерполирующие гиперплоскости

$$t^{L,R} = D_1^{L,R} \times |x_1| + D_2^{L,R} \times |x_2| + D_3^{L,R} \times |x_3| + \breve{P}_\alpha^{L,R}(\vec{j}^0),$$

где коэффициенты $D_n^{L,R}$ определяются из соответствующей системы уравнений:

$$\begin{cases} \breve{P}_\alpha^{L,R}(\vec{j}^1) = D_1^{L,R} \times |j_1^1| + D_2^{L,R} \times |j_2^1| + D_3^{L,R} \times |j_3^1| + \breve{P}_\alpha^{L,R}(\vec{j}^0), \\ \breve{P}_\alpha^{L,R}(\vec{j}^2) = D_1^{L,R} \times |j_1^2| + D_2^{L,R} \times |j_2^2| + D_3^{L,R} \times |j_3^2| + \breve{P}_\alpha^{L,R}(\vec{j}^0), \\ \breve{P}_\alpha^{L,R}(\vec{j}^3) = D_1^{L,R} \times |j_1^3| + D_2^{L,R} \times |j_2^3| + D_3^{L,R} \times |j_3^3| + \breve{P}_\alpha^{L,R}(\vec{j}^0). \end{cases}$$

$$[\breve{P}^L_{\alpha\times\mu_{x_1^*}\times\mu_{x_2^*}\times\mu_{x_3^*}}(u_1^*, u_2^*, u_3^*),\ \breve{P}^R_{\alpha\times\mu_{x_1^*}\times\mu_{x_2^*}\times\mu_{x_3^*}}(u_1^*, u_2^*, u_3^*)] \supseteq [D_1^L \times |x_1^*| + D_2^L \times |x_2^*| +$$

$$+ D_3^L \times |x_3^*| + \breve{P}_\alpha^L(\vec{j}^0),\ D_1^R \times |x_1^*| + D_2^R \times |x_2^*| + D_3^R \times |x_3^*| + \breve{P}_\alpha^R(\vec{j}^0)].$$

*Случай* $N > 3$. Траверзы расположены в гиперкубе $[-1, 1] \times \ldots \times [-1, 1]$ ($N$ множителей) $N$ – мерного подпространства траверзов $0x_1x_2\ldots x_N$. По оси $0t$ на траверзах $(j_1,\ldots, j_N, 0)$, $j_n \in \{-1, 0, 1\}$ направлены интервалы $\alpha$ – уровней $[\breve{P}_\alpha^L(j_1,\ldots, j_N),\ \breve{P}_\alpha^R(j_1,\ldots, j_N)]$. По осям $0x_n$, $n = \overline{1,N}$ заданы нечеткие точечные траверзы $u_n^*$: носитель $x_n^* \in [0, 1]$, ф.п. $\mu_{x_n^*} \times \delta(x_n - x_n^*)$.

1. В пространстве траверзов $0x_1x_2\ldots x_N$ $\vec{j}^0 = (j_1^0,\ldots, j_N^0) = (0, \ldots, 0)$, второй опорный траверз – точка $\vec{j}^1 = (j_1^1,\ldots, j_N^1)$: $j_n^1 := \operatorname{sign}(x_n^*)$.

2. Упорядочиваем последовательность $\{x_n^*\}_{n=1}^N$ по убыванию модулей. Обозначим полученный результат $\{x_{k_n}^*\}_{n=1}^N$: $|x_{k_{n_1}}^*| \geq |x_{k_{n_2}}^*|$, если $k_{n_1} < k_{n_2}$.

3. Группируем последовательность $\{ x^*_{k_n} \}_{n=1}^{N}$: если $| x^*_{k_m} | = | x^*_{k_{m+1}} | = \ldots =$ $= | x^*_{k_{m+q(k_m)}} |$, $q(k_m) \geq 1$, образуем из $\{ x^*_{k_n} \}_{n=m}^{m+q(k_m)}$ группу; если значение $| x^*_{k_m} |$ в последовательности $\{ x^*_{k_n} \}_{n=1}^{N}$ не повторяется, группа состоит из одного элемента $x^*_{k_m}$ и соответствующее $q(k_m) = 0$. Обозначим $h$-ю группу $\{ x^*_{k_n} \}_{n=m_h}^{m_h+q_h}$, $H$ – количество полученных групп.

4. Формируем по результату проведенной группировки последовательность $\{ y^*_h \}_{h=1}^{H}$, где $y^*_h$ – значение $| x^*_{k_{m_h}} |$, входящих в $h$-ю группу $\{ x^*_{k_n} \}_{n=m_h}^{m_h+q_h}$. Все значения в последовательности $\{ y^*_h \}_{h=1}^{H}$ различны и $y^*_{h_1} > y^*_{h_2}$ при $h_1 < h_2$.

5. В пространстве интерполяции $(q_h + 1)$ размерность, соответствующую $h$-й группе $\{ x^*_{k_n} \}_{n=m_h}^{m_h+q_h}$, заменяем одной размерностью $y_h$, спроектировав диагональ гиперкуба (куба, квадрата), на которой расположены $\{ x^*_{k_n} \}_{n=m_h}^{m_h+q_h}$, $| x^*_{k_{m_h}} | = \ldots = | x^*_{k_{m_h+q_h}} |$, на любую из осей $\{0x_n\}_{n=m_h}^{m_h+q_h}$ (например, $0\,x_{m_h}$) и обозначив ее $0y_h$. Все траверзы $\{ x^*_{k_n} \}_{n=m_h}^{m_h+q_h}$ учитываются синхронно; соответствующая траверзу $y^*_h$ ф.п. равна $\prod_{n=m_h}^{m_h+q_h} \mu_{x^*_n} \times \delta(y - y^*_h)$.

6. Далее полагаем, что размерность подпространства интерполяции равна $H$ и выполняется она для модифицированных нечетких точечных траверзов $\{ y^*_h \}_{h=1}^{H}$, соответствующих осям $\{0y_h\}_{h=1}^{H}$. Для интерполяции в $H$-мерном подпространстве необходим $(H + 1)$ опорный траверз $\{ \vec{j}^{\,h} \}_{h=0}^{H}$, на котором заданы оценки $[\breve{P}^L_\alpha(\vec{j}^{\,h}),\ \breve{P}^R_\alpha(\vec{j}^{\,h})]$. Два из них известны – это начало координат $\vec{j}^{\,0} =$ $= (0, \ldots, 0)$ и $\vec{j}^{\,1} = (j^1_1, \ldots, j^1_N)$, $j^1_n := \mathrm{sign}(x^*_n)$. Для определения остальных траверзов сначала определим набор символов $\vec{j}^{\,*h} = (j^{*h}_1, \ldots, j^{*h}_H)$, $h = \overline{2, H}$ следующим образом:

$$\vec{j}^{\,*H} = (j^{*H}_1, \ldots, j^{*H}_H) = (\#, 0, 0, \ldots, 0),\ \text{т. е. } j^{*H}_1 = \#,\ j^{*H}_n = 0 \text{ для } n > 1;$$

$$\vec{j}^{\,*H-1} = (j^{*H-1}_1, \ldots, j^{*H-1}_H) = (\#,\#,0,\ldots,0),\ \text{т. е. } j^{*H-1}_1 = j^{*H-1}_2 = \#,\ j^{*H-1}_n = 0 \text{ для } n > 2;$$

……………………………………………………………………………………

$$\vec{j}^{\,*H-h} = (j^{*H-h}_1, \ldots, j^{*H-h}_H) = (\#, \ldots, \#, 0, \ldots, 0),\ \text{т. е. } j^{*H-h}_n = \# \text{ для } n \leq h + 1,$$
$$j^{*H-h}_n = 0 \text{ для } n > h + 1;$$

……………………………………………………………………………………

$$\vec{j}^{\,*3} = (j^{*3}_1, \ldots, j^{*3}_H) = (\#, \#, \ldots, \#, 0, 0),\ \text{т. е. } j^{*3}_1 = \ldots = j^{*3}_{H-2} = \#,\ j^{*3}_{H-1} = j^{*3}_H = 0;$$

$$\vec{j}^{\,*2} = (j^{*2}_1, \ldots, j^{*2}_H) = (\#, \ldots, \#, 0),\ \text{т. е. } j^{*2}_1 = \ldots = j^{*2}_{H-1} = \#,\ j^{*2}_H = 0.$$

По введенным символьным наборам $\vec{j}^{*l} = (j_1^{*l}, ..., j_H^{*l})$, $l = \overline{2, H}$ соответствующие им значения опорных траверзов $\vec{j}^{\,l} = (j_1^l, ..., j_N^l)$ определим следующим образом. Символьное значение $j_h^{*l}$ соответствует $h$-й группе $\{x_{k_n}^*\}_{n=m_h}^{m_h+q_h}$, $h = \overline{1, H}$. Если $j_h^{*l} = 0$, то $\forall k_n$, $n = \overline{m_h, m_h + q_h}$ $j_{k_n}^l := 0$; если же $j_h^{*l} = \#$, то $\forall k_n$, $n = \overline{m_h, m_h + q_h}$ $j_{k_n}^l := j_{k_n}^1$.

7. Через точки $\{\vec{j}^{\,h}, \breve{P}_\alpha^L(\vec{j}^{\,h})\}_{h=0}^H$ и $\{\vec{j}^{\,h}, \breve{P}_\alpha^R(\vec{j}^{\,h})\}_{h=0}^H$ проводим нижнюю ($L$) и верхнюю ($R$) интерполирующие гиперплоскости

$$t^{L,R} = \sum_{h=1}^{H} D_h^{L,R} \times y_h + \breve{P}_\alpha^{L,R}(\vec{j}^{\,0}),$$

где коэффициенты $D_h^{L,R}$ определяются из соответствующей системы уравнений:

$$\begin{cases} \breve{P}_\alpha^{L,R}(\vec{j}^{\,1}) = D_1^{L,R} + D_2^{L,R} + ... + D_{H-2}^{L,R} + D_{H-1}^{L,R} + D_H^{L,R} + \breve{P}_\alpha^{L,R}(\vec{j}^{\,0}), \\ \breve{P}_\alpha^{L,R}(\vec{j}^{\,2}) = D_1^{L,R} + D_2^{L,R} + ... + D_{H-2}^{L,R} + D_{H-1}^{L,R} + \breve{P}_\alpha^{L,R}(\vec{j}^{\,0}), \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \breve{P}_\alpha^{L,R}(\vec{j}^{\,h}) = D_1^{L,R} + D_2^{L,R} + ... + D_{H-h+1}^{L,R} + \breve{P}_\alpha^{L,R}(\vec{j}^{\,0}), \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \breve{P}_\alpha^{L,R}(\vec{j}^{\,H}) = D_1^{L,R} + \breve{P}_\alpha^{L,R}(\vec{j}^{\,0}), \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} D_1^{L,R} = \breve{P}_\alpha^{L,R}(\vec{j}^{\,H}) - \breve{P}_\alpha^{L,R}(\vec{j}^{\,0}), \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ D_{H-h+1}^{L,R} = \breve{P}_\alpha^{L,R}(\vec{j}^{\,h}) - \breve{P}_\alpha^{L,R}(\vec{j}^{\,0}) - \sum_{n=1}^{H-h} D_n^{L,R}, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ D_H^{L,R} = \breve{P}_\alpha^{L,R}(\vec{j}^{\,1}) - \breve{P}_\alpha^{L,R}(\vec{j}^{\,0}) - \sum_{n=1}^{H-1} D_n^{L,R}. \end{cases}$$

$$[\breve{P}^L_{\alpha\times\prod_{n=1}^{N}\mu_{x_n^*}}(u_1^*,\ldots,u_N^*),\ \breve{P}^R_{\alpha\times\prod_{n=1}^{N}\mu_{x_n^*}}(u_1^*,\ldots,u_N^*)] \supseteq [S^L(\alpha, x_1^*,\ldots,x_N^*), S^R(\alpha, x_1^*,\ldots,x_N^*)] =$$

$$= \Big[\sum_{h=1}^{H} D_h^L \times y_h^* + \breve{P}_\alpha^L(\,\bar{j}^0),\ \sum_{h=1}^{H} D_h^R \times y_h^* + \breve{P}_\alpha^R(\,\bar{j}^0)\Big] =$$

$$= \Big[\sum_{h=1}^{H} D_h^L \times |\,x^*_{k_{m_h}}\,| + \breve{P}_\alpha^L(\,\bar{j}^0),\ \sum_{h=1}^{H} D_h^R \times |\,x^*_{k_{m_h}}\,| + \breve{P}_\alpha^R(\,\bar{j}^0)\Big].$$

### 3. Линейная интерполяция для нормальных нечетких данных

Пусть известны нечеткие показатели определенности $u_n^*$, $n=\overline{1,N}$ с носителями $[x_n^{*L},\ x_n^{*R}] \in [-1, 1]$ (обычно $[x_n^{*L},\ x_n^{*R}] \in [-1, 0]$ или $[x_n^{*L},\ x_n^{*R}] \in [0, 1]$) и ф.п. $\mu_n(x)$, являющиеся соответственно оценками пребывания вершин $\{v_n\}_{n=1}^{N}$ в состояниях $\{U_n\}_{n=1}^{N}$. $\forall\alpha\in(0,1]$ и $x_n \in [x_n^{*L},\ x_n^{*R}]$ и считаем известными оценки ф.п. $\rho(\alpha, x_1,\ldots, x_N) = \{\alpha\times\prod_{n=1}^{N}\mu_n(x_n)\}$ и носителя $[S^L(\alpha, x_1,\ldots, x_N), S^R(\alpha, x_1,\ldots, x_N)]$. В соответствии с (2), (3) и (4) $\beta$-уровневое множество $[\breve{P}_\beta^L(u_1^*, \ldots, u_N^*),\ \breve{P}_\beta^R(u_1^*, \ldots, u_N^*)]$, $\beta\in(0,1]$ искомой оценки $\breve{P}(u_1^*, \ldots, u_N^*)$ может быть представлено следующим образом:

$$\breve{P}_\beta^L(u_1^*,\ldots,u_N^*) :=$$
$$:= \min\{S^L(\alpha, x_1,\ldots, x_N) : \rho(\alpha, x_1,\ldots, x_N) \ge \beta,\ \alpha\in(0,1],\ x_n\in[x_n^{*L}, x_n^{*R}],\ n=\overline{1,N}\},$$

$$\breve{P}_\beta^R(u_1^*,\ldots,u_N^*) :=$$
$$:= \max\{S^R(\alpha, x_1,\ldots, x_N) : \rho(\alpha, x_1,\ldots, x_N) \ge \beta,\ \alpha\in(0,1],\ x_n \in [x_n^{*L}, x_n^{*R}],\ n=\overline{1,N}\}. \quad (13)$$

При проведении компьютерных вычислений нечеткие числа $u_n^*$ обычно представлены двумя последовательностями значений. Первая из них, $\{x_n^j\}_{j=1}^{J_n}$, соответствует точкам носителя, $x_n^1 = x_n^{*L}$, $x_n^{J_n} = x_n^{*R}$, $x_n^{j_1} < x_n^{j_2}$ при $j_1 < j_2$, а вторая, $\{\mu_n(x_n^j)\}_{j=1}^{J_n}$, задает соответствующие им оценки ф.п.; на всем отрезке $[x_n^{*L}, x_n^{*R}]$ в пространстве $0x_nt$, где размерность $t$ соответствует значениям ф.п., последняя рассматривается как линейный сплайн по узловым точкам $(x_n^j,\ \mu_n(x_n^j))$. При этом зона максимума ф.п. задается двумя точками с $x_n^{j^L_{n\max}} \le x_n^{j^R_{n\max}}$, которые совпадают, если ф.п. не является толерантной. Для оценок ф.п. известен порог значимости $\varepsilon$.

Принципиальная схема выполнения интерполяции в соответствии с (13) во введенных обозначениях выглядит следующим образом:

– $\forall n = \overline{1, N}$ в пространстве $0x_n t$ определить зоны максимума [ $x_n^{j_{n\max}^L}$ , $x_n^{j_{n\max}^R}$ ] ф.п. $\mu_n(x_n)$;

– выбрать разбиение $\{\alpha_m\}_{m=1}^{M}$, $\alpha_1 = 1$, $\alpha_M = \varepsilon$, $\alpha_{m_1} > \alpha_{m_2}$ и $\alpha_{m_1} - \alpha_{m_2} \le \alpha_{m_2} - \alpha_{m_3}$ при $m_1 < m_2 < m_3$;

– для каждой из $\prod_{n=1}^{N} J_n$ точек $\{( x_1^{j_1}, ..., x_N^{j_N} )\}_{j_n=1}^{J_n}{}_{n=1}^{N}$, таких, что $\Theta(j_1, \ldots, j_N) = \left( \prod_{n=1}^{N} \mu_n(x_n^{j_n}) \ge \varepsilon \right)$, выбрать $(N+1)$ ближайший четкий опорный траверз $\theta(k, j_1, \ldots, j_N) = \{(j_1^{k,(j_1,\ldots,j_N)}, \ldots, j_N^{k,(j_1,\ldots,j_N)})\}_{k=0}^{N}$, $j_n^{k,(j_1,\ldots,j_N)} \in \{-1, 0, 1\}$. Многие из них, имея различную маркировку, совпадают. Различные траверзы $\theta(k, j_1, \ldots, j_N)$ обозначить $\{\Psi_r\}_{r=1}^{R}$, $\Psi_r = (\psi_1^r, \ldots, \psi_N^r)$, $\psi_n^r \in \{-1, 0, 1\}$;

– вычислить $\{ \breve{P}_{\alpha_m}^{L,R}(\Psi_r)\}_{m=1}^{M}$;

– циклом по $m$ от 1 до $M$: для $\alpha_m$ и всех точек $\{( x_1^{j_1}, ..., x_N^{j_N} )\}_{j_n=1}^{J_n}{}_{n=1}^{N}$, таких, что $\rho(\alpha_m, x_1^{j_1}, ..., x_N^{j_N}) = \Theta(j_1, \ldots, j_N) \times \alpha_m \ge \varepsilon$, двигаясь по $n$-й размерности $x_n$ влево от $x_n^{j_{n\max}^L}$ и вправо от $x_n^{j_{n\max}^R}$, вычислить $[S^L(\alpha_m, x_1^{j_1}, ..., x_N^{j_N}), S^R(\alpha_m, x_1^{j_1}, ..., x_N^{j_N})]$;

– определить зону максимума ф.п. результата,

$$\breve{P}_{\alpha_1}^{L}( u_1^*, \ldots, u_N^*) := \min\{S^L(\alpha_1, x_1, \ldots, x_N): x_n \in \{ x_n^{j_{n\max}^L}, x_n^{j_{n\max}^R} \}, n = \overline{1, N} \},$$

$$\breve{P}_{\alpha_1}^{R}( u_1^*, \ldots, u_N^*) := \max\{S^R(\alpha_1, x_1, \ldots, x_N): x_n \in \{ x_n^{j_{n\max}^L}, x_n^{j_{n\max}^R} \}, n = \overline{1, N} \};$$

– для любого $\beta \in (0, 1)$ множество $\beta$-уровня [ $\breve{P}_{\beta}^{L}( u_1^*, \ldots, u_N^*)$, $\breve{P}_{\beta}^{R}( u_1^*, \ldots, u_N^*)$] оценки $\breve{P}( u_1^*, \ldots, u_N^*)$ задается соотношениями

$$\breve{P}_{\beta}^{L}( u_1^*, \ldots, u_N^*) :=$$

$$:= \min\{S^L(\alpha_m, x_1^{j_1}, ..., x_N^{j_N}): \rho(\alpha_m, x_1^{j_1}, ..., x_N^{j_N}) \ge \beta, m = \overline{1, M}, j_n = \overline{1, J_n}, n = \overline{1, N} \},$$

$$\breve{P}_{\beta}^{R}( u_1^*, \ldots, u_N^*) :=$$

$$:= \max\{S^R(\alpha_m, x_1^{j_1}, ..., x_N^{j_N}): \rho(\alpha_m, x_1^{j_1}, ..., x_N^{j_N}) \ge \beta, m = \overline{1, M}, j_n = \overline{1, J_n}, n = \overline{1, N} \}.$$

Носителем $\breve{P}( u_1^*,\ldots, u_N^*)$ является интервал $\left[ \breve{P}_{\alpha_M}^{L}( u_1^*,\ldots, u_N^*), \breve{P}_{\alpha_M}^{R}( u_1^*,\ldots, u_N^*)\right]$.

**Заключение**. Изложенная методика выполнения нечеткой линейной интерполяции через уровневые множества представляется вполне естественной, поскольку подобный подход при $N > 1$ используется при апостериорном оценивании в нечетких БС также для детерминированных состояний вершин (кроме отдельных ситуаций, когда графы сети образуют лес). Дополнительным преимуществом предложенного подхода является возможность естественного определения точек функционального распараллеливания в вычислениях, что весьма актуально вследствие их значительного объема.

*О.В. Верьовка*

УРАХУВАННЯ НЕДЕТЕРМІНОВАНИХ СВІДЧЕНЬ ПРИ АПОСТЕРІОРНОМУ ОЦІНЮВАННІ В НЕЧІТКИХ БАЙЄСІВСЬКИХ МЕРЕЖАХ

Пропонується процедура нечіткої багатовимірної лінійної інтерполяції, розроблена для обчислення апостеріорних оцінок у нечітких байєсівських мережах за представленою нечіткими числами інформацією відносно знаходження вершин мережі в недетермінованих станах.

*O.V. Verovka*

NONDETERMINISTIC EVIDENCE ACCOUNT TO A POSTERIORI ESTIMATION IN BAYESIAN FUZZY NETWORKS

Procedure of fuzzy multidimensional linear interpolation developed for calculating a posteriori estimates in fuzzy Bayesian networks using the information represented by fuzzy numbers regarding the location of network vertexes in nondeterministic states is proposed.

1. *Экспертные* системы. Принципы работы и примеры: Пер. с англ. / Под ред. Р. Форсайта. – М.: Радио и связь, 1987. – 224 с.
2. *Веревка О.В., Парасюк И.Н.* О распространении вероятностей в нечетких байесовских сетях с недетерминированными состояниями // Кибернетика и системный анализ. – 2008. – № 6. – С. 153–169.
3. *Веревка О.В., Парасюк И.Н.* Линейная интерполяция в нечетком информационном пространстве // Кибернетика и системный анализ. – 2006. – № 2. – С. 55–68.
4. *Мациевский С.В.* Нечеткие множества. – Калининград: Изд-во Калинингр. ун-та, 2004. – 176 с.
5. *Лофти А. Заде*. Основы нового подхода к анализу сложных систем и процессов принятия решения. – В кн. «Математика сегодня». Пер. с англ. – М.: Знание, 1974. – С. 5–48.
6. *Веревка О.В., Парасюк И.Н.* Ярусный подход к представлению байесовских сетей // Компьютерная математика. – 2010. – № 1. – С. 83–93.

Получено 15.11.2010

***Об авторе:***

*Веревка Ольга Викторовна*,
кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник Института кибернетики имени В.М. Глушкова НАН Украины.
8 (044) 526 6422.
e-mail: ivpar1@i.com.ua