

Н. В. Никитина

О бифуркациях и аналитическом решении в модели Рикитаки

(Представлено академиком НАН Украины А. А. Мартынюком)

В рамках качественного анализа установлено существование плоского аттрактора и бифуркации траектории модели Рикитаки. В координатах, связанных с плоскостью, получено аналитическое решение. Определена сигнатура спектра характеристических показателей Ляпунова в случае неустойчивой орбиты движения.

Методы качественной теории в нелинейной механике берут свое начало в работах Пуанкаре, Андронова и получили развитие в современных работах [1, 2]. Данная работа связана с проблемой классификации физических объектов, порождающих многомерные аттракторы, а также с анализом простых и сложных движений многомерных систем, которые вызываются бифуркационным процессом и неустойчивостью орбит [3]. В работе качественный анализ связан с симметрией аттракторов и уравнением в вариациях. Прикладная задача, которая рассмотрена в работе, относится к базовым моделям в теории земного динамо [4].

Предварительные сведения. Палеомагнитные исследования показали, что магнитное поле Земли претерпевает изменение направления (полярности) на обратное. В течение последних сотен миллионов лет смена направления происходит нерегулярным образом. Помимо подробной магнитогидродинамической модели построены простые модели. Базовой моделью в теории земного динамо является модель Рикитаки, предложенная в 1955 году [4]. Эта модель описывает систему из двух дисков динамо, соединенных, как показано на рис. 1. Диски этой модели могут рассматриваться как имитация двух больших вихрей в ядре Земли. Рассмотрим возбуждения полей в двух дисках. Ток I_1 вызывает магнитное поле, в котором второй диск индуцирует ток I_2 . Этот ток в свою очередь вызывает поле,

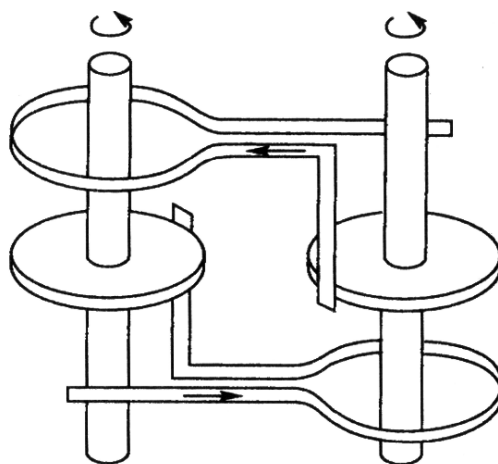


Рис. 1

в котором первый диск индуцирует ток I_1 . Нелинейность возникает при учете обратной реакции момента электромагнитной силы на движение, т. е. на угловые скорости Ω_1 и Ω_2 .

Согласно законам механики и электродинамики, система уравнений имеет вид

$$L \frac{dI_1}{d\tau} + RI_1 = MI_2\Omega_1, \quad L \frac{dI_2}{d\tau} + RI_2 = MI_1\Omega_2. \quad (1)$$

Здесь L — индуктивность дисков; R — сопротивление контуров; M — взаимная индуктивность между контуром и диском. Система (1) есть уравнения динамо. Система

$$J \frac{d\Omega_1}{d\tau} = G - MI_1I_2, \quad J \frac{d\Omega_2}{d\tau} = G - MI_1I_2, \quad (2)$$

где J — момент инерции дисков; G — момент внешних сил, описывает обратную реакцию электромагнитных сил на движение. Введем безразмерные переменные, следуя Рикитакки [4], x_1, x_2, x_3, x_4, t

$$I_1 = x_1 \sqrt{\frac{G}{M}}, \quad I_2 = x_2 \sqrt{\frac{G}{M}}, \quad \Omega_1 = x_3 \sqrt{\frac{GL}{JM}}, \quad \Omega_2 = x_4 \sqrt{\frac{GL}{JM}}, \quad \tau = t \sqrt{\frac{JL}{MG}}.$$

Система (1), (2) в безразмерном виде запишется так:

$$\frac{dx_1}{dt} = -\mu x_1 + x_2 x_3, \quad \frac{dx_2}{dt} = -\mu x_2 + x_1 x_4, \quad \frac{dx_3}{dt} = 1 - x_1 x_2, \quad \frac{dx_4}{dt} = 1 - x_1 x_2. \quad (3)$$

Здесь $\mu = R\sqrt{J/(GLM)}$ — коэффициент омической диссипации. Из системы (3) вытекает, что разность угловых скоростей есть величина постоянная $x_3 - x_4 = a$, где $a = \text{const}$. Предположим, что $a = 0$, тогда $x_3 = x_4$. Найдены особые точки системы (3): точка A ($x_1 = 1, x_2 = 1, x_3 = \mu$); точка B ($x_1 = -1, x_2 = -1, x_3 = \mu$).

Условия существования замкнутой траектории. Введем новые переменные $x = x_1 - 1, y = x_2 - 1, z = x_3 - \mu$ и составим уравнения движения относительно особой точки A

$$\frac{dx}{dt} = -\mu(x - y) + z + yz, \quad \frac{dy}{dt} = -\mu(y - x) + z + xz, \quad \frac{dz}{dt} = -(x + y) - xy. \quad (4)$$

Представим систему (4) в виде

$$\frac{dx}{dt} = F_x, \quad \frac{dy}{dt} = F_y, \quad \frac{dz}{dt} = F_z. \quad (5)$$

Проанализируем выполнение в трехмерной системе (5) условий замыкания траекторий в плоскостях Axz, Ayz, Axy . Для этого привлечем принцип симметрии и кососимметрии [5, 6].

На плоскости Axz выполняются условие четности функции $F_z(x, z)$ относительно z и нечетности функции $F_x(x, z)$ относительно z $F_x(x, -z) = -F_x(x, z), F_z(x, -z) = F_z(x, z)$. Тогда в системе (5) на плоскости Axz существует замкнутая кривая и ось Ax является осью симметрии.

На плоскости Ayz выполняются условие четности функции $F_z(y, z)$ относительно z и нечетности функции $F_y(y, z)$ относительно z $F_y(y, -z) = -F_y(y, z), F_z(y, -z) = F_z(y, z)$. Тогда

в системе (5) на плоскости Ayz существует замкнутая кривая и ось Ay является осью симметрии.

На плоскости Axy выполняются условия кососимметрии функций $F_x(x, y)$ и $F_y(x, y)$ $F_x(-x, y) = -F_x(x, -y)$, $F_y(-x, y) = -F_y(x, -y)$. Проанализируем поведение траектории уравнений (3), приведенных к особой точке B . Также выполняются условия симметрии в плоскостях Bxz , Byz и условие кососимметрии в плоскости Bxy . В системе (5) на плоскости Axy замкнутая кривая может иметь оси кососимметрии Ax , Ay . Можно предположить, что траектория проецируется на плоскость Axy в виде отрезка прямой вдоль линии AB . Если это предположение будет доказано, то имеет место существование плоского аттрактора.

Введем малые отклонения δx , δy , δz в системе (4) от частных решений $\bar{x}(t)$, $\bar{y}(t)$, $\bar{z}(t)$ и составим уравнения в вариациях $\delta x = x - \bar{x}$, $\delta y = y - \bar{y}$, $\delta z = z - \bar{z}$

$$\begin{aligned} \frac{d\delta x}{dt} &= -\mu\delta x + (\mu + \bar{z})\delta y + (1 + \bar{y})\delta z, & \frac{d\delta y}{dt} &= (\mu + \bar{z})\delta x - \mu\delta y + (1 + \bar{x})\delta z, \\ \frac{d\delta z}{dt} &= -(1 + \bar{y})\delta x - (1 + \bar{x})\delta y. \end{aligned} \quad (6)$$

Характеристическое уравнение системы в вариациях (6) имеет вид

$$\begin{aligned} \lambda^3 + 2\mu\lambda^2 + \lambda(\mu^2 + (1 + \bar{x})^2 + (1 + \bar{y})^2 - (\mu + \bar{z})^2) + 2(\mu + \bar{z})(1 + \bar{x})(1 + \bar{y}) + \\ + \mu((1 + \bar{x})^2 + (1 + \bar{y})^2) = 0. \end{aligned} \quad (7)$$

Положим значение параметра $\mu = 1$. Исследование с помощью уравнения (7) показало, что точка A ($\bar{x} = 0, \bar{y} = 0, \bar{z} = 0$) и также точка B ($\bar{x} = -2, \bar{y} = -2, \bar{z} = 0$) — устойчивые узел-центры, для которых λ_1, λ_2 — мнимые величины, $\lambda_{1,2} = \pm i\sqrt{2}$, $\lambda_3 = -2$. Точка C ($\bar{x} = -1, \bar{y} = -1, \bar{z} = 0$) лежит на разделе областей существования двух видов семейств замкнутых траекторий системы (4). В точке C уравнение (7) имеет корни $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 0$, $\lambda_3 = -2\mu$. Система (4) *несамовозбуждаемая*.

Переход к новым переменным. Качественный анализ. Перейдем к координатам, которые более удобны тем, что фазовый рисунок может проецироваться на фазовую плоскость в натуральную величину. Введем новые оси Au , Av поворотом старых Ax , Ay на угол $\alpha = \pi/4$. Новые координаты связаны со старыми следующим образом:

$$u = x \cos \alpha + y \sin \alpha, \quad v = -x \sin \alpha + y \cos \alpha.$$

В новой системе координат $Auvz$ уравнения (4) примут вид

$$\frac{du}{dt} = \sqrt{2}z + uz, \quad \frac{dv}{dt} = -2\mu v - vz, \quad \frac{dz}{dt} = -\sqrt{2}u - \frac{u^2}{2} + \frac{v^2}{2}. \quad (8)$$

Возвратимся к вопросу о замыкании траектории. Первое уравнение системы (8) не содержит в правой части переменную v , второе уравнение не содержит переменную u . Второе и третье уравнения системы (8) связаны лишь нелинейными составляющими. При такой характеристике правых частей системы (8) *замкнутые траектории системы (8) располагаются в плоскости Auz* . Таким образом, *замкнутая траектория в трехмерном пространстве проецируется на плоскость Axy в виде отрезка прямой под углом $\pi/4$ к оси Ax* .

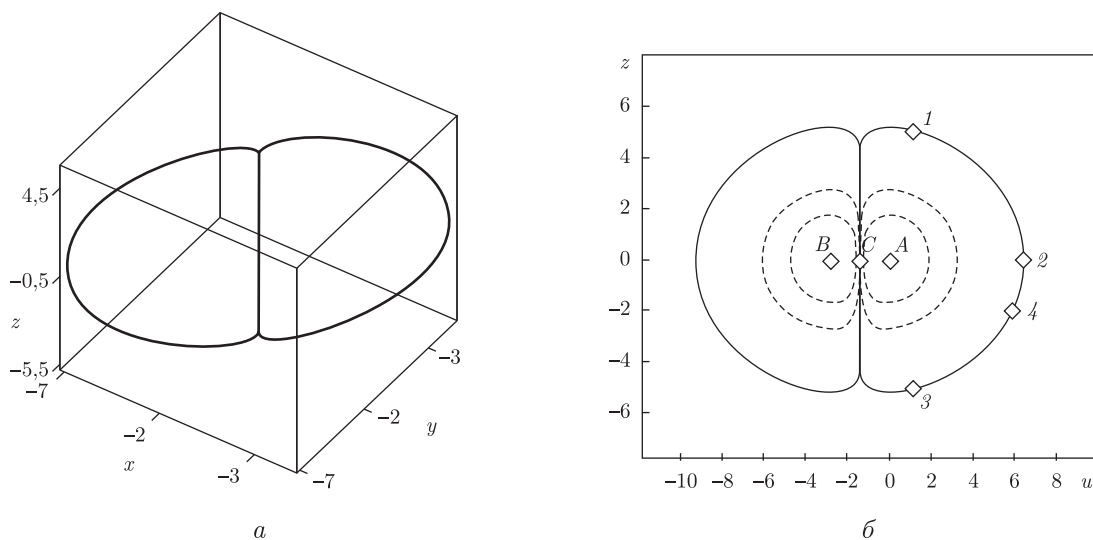


Рис. 2

Введем малые отклонения δu , δv , δz в системе (8) от частных решений $\bar{u}(t)$, $\bar{v}(t)$, $\bar{z}(t)$ и составим уравнения в вариациях

$$\frac{d\delta u}{dt} = \bar{z}\delta u + (\sqrt{2} + \bar{u})\delta z, \quad \frac{d\delta v}{dt} = -(2\mu + \bar{z})\delta v - \bar{v}\delta z, \quad \frac{d\delta z}{dt} = -(\sqrt{2} + \bar{u})\delta u + \bar{v}\delta v. \quad (9)$$

Так как траектория располагается в плоскости Auz , то $\bar{v} = 0$. Характеристическое уравнение системы в вариациях (9) имеет вид

$$\lambda^3 + 2\mu\lambda^2 + \lambda((\bar{u} + \sqrt{2})^2 - 2\mu\bar{z} - \bar{z}^2) + (2\mu + \bar{z})(\bar{u} + \sqrt{2})^2 = 0. \quad (10)$$

Здесь учтено, что $\bar{v} = 0$.

Приведем анализ качества точек замкнутой кривой, построенной численным способом. В системе координат $Oxyz$, Auz замкнутые кривые не содержат точку C . Наиболее отдаленные от узел-центра замкнутые кривые (рис. 2, a , b — сплошная линия) определяют две области устойчивых траекторий. Между двумя замкнутыми кривыми проходит одна ось Cz . На уровне физических представлений: *точка C не может принадлежать двум замкнутым траекториям.*

С помощью уравнения (10) находим точки, в которых изменяется качество корней. На кривой от точки, близкой к C , до точки 1 (не включая точек на концах отрезка) по ходу часовой стрелки имеют место действительные корни (рис. 2, a , b) $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 > 0$, $\lambda_3 < 0$. В точке 1 происходит исчезновение двух кратных действительных корней и рождение двух комплексных ($\text{Re } \lambda_{1,2} > 0$). Внутри траектории от точки 1 до точки 2 имеют место пара комплексных корней с положительной действительной частью и действительный корень $\lambda_3 < 0$. В точке 2 происходит смена знака действительной части с плюса на минус. Далее внутри отрезка кривой 2–3 комплексные корни имеют отрицательный знак действительной части. В точке 3 происходит исчезновение комплексных корней и рождение двух действительных. В точке 4 наблюдается исчезновение корня $\lambda_3 < 0$ и рождение корня $\lambda_3 > 0$.

Для всего многообразия замкнутых траекторий (на рис. 2, b замкнутые траектории изображены также штриховой линией) существует подобная симметрия, с помощью которой

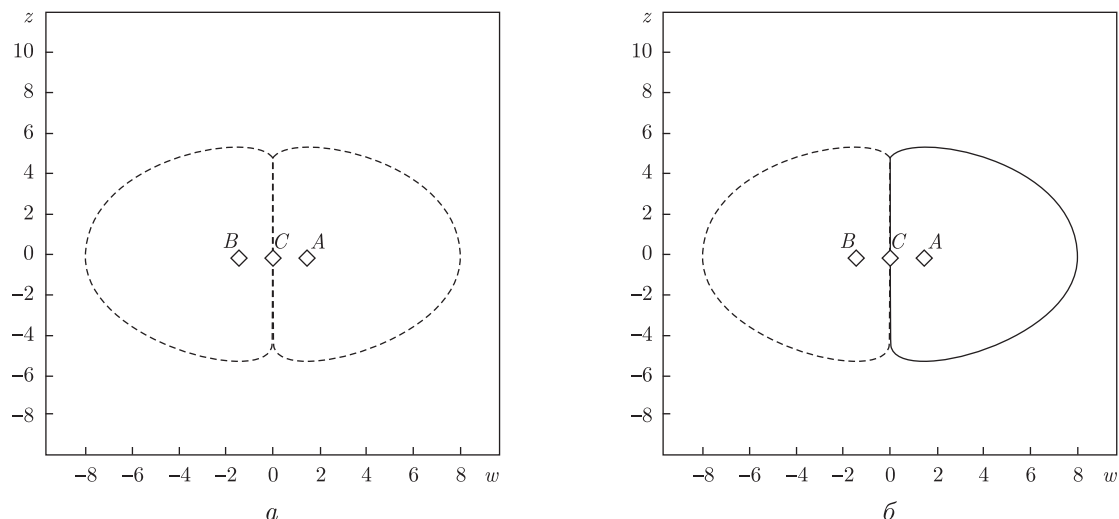


Рис. 3

доказывается замыкание траекторий. При такой симметрии сигнатура двух характеристических показателей Ляпунова (ХПЛ) имеет вид двух нулей. Распространение симметрии на корни уравнения (10) формирует ХПЛ. Геометрическая симметрия фазовых траекторий системы (8) такая, что каждой точке области сверху (относительно оси Au) соответствует точка внизу области. При сложении корней уравнения (10) на круговой траектории имеем следующую картину. Корни λ_1, λ_2 определяют в сигнатуре спектра ХПЛ два первых знака $(0, 0,)$, что соответствует *эллиптической составляющей движения*. Корень λ_3 определит притягивающий характер траекторий и связан преимущественно с координатой v . Сигнатура спектра ХПЛ замкнутых кривых имеет вид $(0, 0, -)$. Таким образом, геометрическая симметрия траекторий, симметрия распределения корней позволили установить орбитальную устойчивость и притягивающий характер замкнутых траекторий. Линейная система, соответствующая системе (8), распадается, так что первое и третье уравнения определяют точку A как центр $du/dt = \sqrt{2}z, dz/dt = -\sqrt{2}u$. Второе уравнение $dv/dt = -2\mu v$ определяет притягивающий характер точки A , делая ее узел-центром.

Аналитическое решение. Введем координату $w = u + \sqrt{2}$ и запишем систему (8) в системе координат $Cwvz$

$$\frac{dw}{dt} = wz, \quad \frac{dv}{dt} = -2\mu v - vz, \quad \frac{dz}{dt} = 1 - \frac{w^2}{2} + \frac{v^2}{2}. \quad (11)$$

Изобразим на рис. 3, *a* штриховой линией замкнутые кривые, построенные численно, которым в начальный момент времени соответствуют следующие значения координат: $w(0) = 0,000001; v(0) = 0; z(0) = 0$ и $w(0) = -0,000001; v(0) = 0; z(0) = 0$. В общем случае не известно аналитическое решение уравнений (3). Единственная ситуация $\mu = 0, a = 0$, в которой известно точное решение [4].

Так как доказано, что траектория лежит в плоскости Auz , также в плоскости Cwz и $\bar{v} = 0$, то аттрактору могут соответствовать два уравнения

$$\frac{dw}{dt} = wz, \quad \frac{dz}{dt} = 1 - \frac{w^2}{2}. \quad (12)$$

Исключив время, разделим переменные в системе (12)

$$z^2 = 2 \ln |w| - \frac{w^2}{2} + D. \quad (13)$$

Здесь D — постоянная интегрирования. Предположим, что движение начинается с точки C . Определим D из следующих условий:

$$w(0) = 0; \quad z(0) = 0. \quad (14)$$

Полученный результат — $D = \infty$ подтверждает физическое представление: точка C не может принадлежать двум замкнутым траекториям. В данном случае система (12) показывает границу аттрактора

$$z = \pm \sqrt{2 \ln |w| - \frac{w^2}{2} + D}. \quad (15)$$

Здесь $D = -2 \ln |w(0)| + w(0)^2/2$, для начальных условий $0 < w(0) \leq w_k$; $z(0) = 0$, где w_k — конечное значение. Решение (15) можно назвать точным, однако при начальных условиях (14) имеем $z^2 \rightarrow \infty$, а не $z \rightarrow \infty$. Последнее показывает численное решение. Причина кроется в том, что система (12) является упрощенной и игнорирование уравнения относительно v в системе (12) не позволяет найти все интегралы системы (11). На рис. 3, *a* показано численное решение с начальными условиями (14). На численное решение (рис. 3, *a*) наложено аналитическое решение (15), которое при $t = 0$ имеет следующие значения координат: $w(0) = 0,000001$; $z(0) = 0$. Все это изображено на рис. 3, *б*.

При переходе к упрощенной системе (12) получено аналитическое решение (15), несмотря на диссипацию. Произошло разделение характеристических показателей: два показателя связаны с границей аттрактора и порождают сигнатуру спектра $(0, 0, \dots)$; третий — с диссипацией и определяет притяжение к плоскости аттрактора. Кроме замкнутых траекторий, существует решение, уходящее на бесконечность. Упрощенная система показывает тенденцию ухода на бесконечность, но не показывает знак бесконечности.

Подставим в характеристическое уравнение (10) $w = u + \sqrt{2}$ и примем $w = 0$, тогда на оси Cz характеристические показатели вычисляются так:

$$\lambda_1 = 0, \quad \lambda_{2,3} = -\mu \pm \sqrt{\mu^2 + \bar{z}(2\mu + \bar{z})}. \quad (16)$$

Один характеристический показатель ($\lambda_3 < 0$), согласно (16), на всей оси Cz показывает притяжение траектории. Начальные условия (14) порождают решение, которое, попадая на ось Cz в точку C , уходит на ∞ , так как для $z > 0$ имеет место $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 > 0$, $\lambda_3 < 0$, причем геометрически λ_3 соответствует притяжению к оси Cz , которое направлено вдоль оси Cv .

Неустойчивость орбиты аттрактора. На рис. 3, *б* замкнутые траектории относительно особых точек A и B ограничивают области многообразий замкнутых траекторий. Эти области разделяются осью Cz . Если начальное положение траектории находится не в точке C и вне областей многообразий правой и левой полуплоскости, то траектория обладает избытком энергии. Изображающая точка при избытке энергии стремится, преодолевая ось Cz , совершить переход из одной области устойчивых движений в другую. В двух точках на оси Cz (с координатами $z = -2$, $z = 0$) характеристические показатели, согласно (16), имеют вид:

$$\lambda_1 = 0, \quad \lambda_2 = 0, \quad \lambda_3 = -2. \quad (17)$$

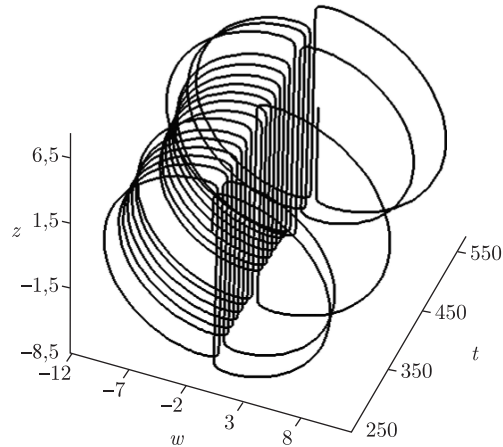


Рис. 4

Возможно, что через две точки (17) на Cz траектория переходит из одной полуплоскости в другую, если система обладает избыточной энергией. Стохастика движения при этом возникает из-за того, что существует не один путь перехода из области в область. Если бы путь перехода был один, то через некоторый отрезок времени (переходный период) траектория замкнулась относительно двух узел-центров A и B , образуя устойчивую орбиту движения.

На рис. 4 приведен фрагмент орбитально неустойчивой траектории системы (11) (начальные возмущения $w(0) = 8,8$; $v(0) = 0$; $z(0) = 0$). В сигнатуре спектра ХПЛ появляется знак плюс $(+, 0, -)$.

Таким образом, в работе приведены достаточные условия существования двух многообразий замкнутых траекторий в трехмерном пространстве на основе принципа симметрии и кососимметрии. Доказано, что аттрактор плоский. При переходе к координатам, связанным с плоскостью движения, появляется возможность исключить время и разделить переменные.

В рассмотренной задаче при равных между собой угловых скоростях дисков (условие $a = 0$), которые имитируют вихри в ядре Земли, вызывается стохастическое изменение направления вектора угловой скорости. Это связано с избыточной начальной энергией, которая вызывает орбитальную неустойчивость.

1. Шильников Л. П., Шильников А. Л., Тураев Д. В., Чуа Л. Методы качественной теории в нелинейной динамике. Ч. 1. – Москва: Изд. Ин-та компьют. исследований, 2004. – 416 с.
2. Шильников Л. П., Шильников А. Л., Тураев Д. В., Чуа Л. Методы качественной теории в нелинейной динамике. Ч. 2. – Москва: Изд. Ин-та компьют. исследований, 2009. – 546 с.
3. Nikitina N. V. Estimating the chaos boundaries of a double pendulum // Int. Appl. Mech. – 2011. – **47**, No 5. – P. 590–599.
4. Кук А., Робертс П. Система двухдискового динамо Рикитаци // Странные аттракторы. – Москва: Мир, 1981. – С. 164–292.
5. Немыцкий В. В., Степанов В. В. Качественная теория дифференциальных уравнений. – Москва; Ленинград: Гостехтеориздат, 1949. – 550 с.
6. Никитина Н. В. О принципе кососимметрии // Доп. НАН України. – 2008. – № 2. – С. 69–72.

Н. В. Нікітіна

Про біфуркації та аналітичний розв'язок в моделі Рікітакі

У рамках якісного аналізу встановлено існування плоского атратора та біфуркації траєкторії в моделі Рікітакі. В координатах, зв'язаних з площиною, наведено аналітичний розв'язок. Знайдено сигнатуру спектра характеристичних показників Ляпунова у випадку нестійкої орбіти руху.

N. V. Nikitina

About bifurcations and an analytical solution in the Rikitaki model

Within the framework of a qualitative analysis, the existence of a flat attractor and the bifurcation of a trajectory in the Rikitaki model is established. An analytical solution in the coordinates on a plane is found. The signature of the spectrum of characteristic Lyapunov indices is found for an unsteady orbit of motion.