КОМПЬЮТЕРНАЯ МАТЕМАТИКА

УДК 519.8

Н.Э. КОНДРУК, Н.Н. МАЛЯР

НЕКОТОРЫЕ ПРИМЕНЕНИЯ КЛАСТЕРИЗАЦИИ КРИТЕРИАЛЬНОГО ПРОСТРАНСТВА ДЛЯ ЗАДАЧ ВЫБОРА

Рассматриваются некоторые вопросы применения кластеризации критериального пространства многокритериальных задач линейного программирования.

Введение. Процессы принятия решений лежат в основе любой целенаправленной деятельности. В экономике они предшествуют созданию промышленных и хозяйственных организаций, обеспечивают их оптимальное функционирование и взаимодействие. В научных исследованиях позволяют выделить важнейшие научные проблемы, найти способы их изучения, определяют развитие материальной базы и теоретического аппарата. При создании новой техники составляют важный этап в проектировании машин, устройств, приборов, комплексов. Оптимальные решения позволяют достигать поставленных целей при минимальных затратах трудовых и материальных ресурсов.

В наше время многокритериальные задачи выбора занимают центральное место в теории принятия решений. Учет многих критериев приближает постановку задачи к реальной. Однако при решении таких задач возникают проблемы, связанные со сложностью математических моделей, большим объемом информации и т.д. Причинами этого могут быть как большая размерность пространства альтернатив, так и большая размерность критериального пространства.

Исследования психологов показывают, что при принятии решений человек (ЛПР, эксперт) одновременно может оперировать (сравнивать) 7 ± 2 объектами (критериями, альтернативами) [1]. Поэтому задачи, в которых размерность пространства критериев или альтернатив превышает 7, целесообразно считать задачами большой размерности.

Примерами задач большой „критериальной” размерности могут быть: задача оптимизации планирования работы производственной системы, задача автоматизации управления современной библиотеки (учитывает 20 критериев), задача оптимизации организации маневренной работы на железнодорожной станции (рассматриваются 9 критериев), задача ранжирования художников (учитывает 17 критериев), задача выбора энергетической политики (различных способов производства электроэнергии) для некоторого региона (включает 11 критериев) и т.д.

Одним из подходов, который можно использовать для решения проблемы данного типа, является использование специально разработанных подходов для уменьшения мощности критериального пространства. Например, применение схем последовательного анализа, отсева и конструирования вариантов критериев для данного класса задач [2] и разбитие множества критериев на подмножества [3] – [6].

В основе многих человеко-машинных процедур лежит подход, который использует разные свертки критериев эффективности [7]. При этом часто нужна информация от ЛПР об их взвешивающих коэффициентах. Хотя во многих трудах принимается как нормальное явление, что ЛПР может количественно определить важность критериев, эта задача не простая. Как правило, люди дают завышенные оценки тем критериям, которые сравнительно мало влияют на выбор, и недооценивают наиболее существенные [7]. Поэтому для анализа взаимосвязей между критериями предлагается провести кластеризацию критериального пространства, которая позволит выявить и построить подмножества „противоречивых” критериев и кластеры „сильно связанных” критериев, что в свою очередь дает дополнительную информацию ЛПР для более обосновательного подбора взвешивающих коэффициентов.

Примерами противоречивости критериев в задаче планирования производства являются максимизация критерия качества продукции и минимизация себестоимости производства продукции и т.п. Примерами „сильно связанных” критериев в этой задаче могут служить критерии минимизации себестоимости продукции и минимизации энергозатрат производства.

Кроме того, целесообразно предложенные подходы относительно решения вышеприведенных проблем объединить в один обобщающий, комплексный алгоритм решения многокритериальных задач выбора.

1. Разные виды кластеризации критериального пространства многокритериальных задач линейного программирования. Рассмотрим многокритериальную задачу линейного программирования в следующей постановке:

$$y_i = f_i(x) = \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_j \to \max, \quad i = \overline{1, m}, \tag{1}$$

$$x \in X \subseteq R^n, \tag{2}$$

где X – множество допустимых решений (альтернатив), которое определяется совокупностью линейных уравнений и неравенств; $y_i = f_i(x)$ – линейные целевые функции; c_{ij} – коэффициенты. То есть, есть некая совокупность целей, что отображены критериями $f_i(x)$, $i=\overline{1,m}$, и нужно найти такую точку $x \in X \subseteq R^n$, которая в некотором смысле максимизирует все эти критерии.

Как известно, векторы $\overline{c_i} = grad \ f_i(x)$, $i=\overline{1,m}$ указывают на направление роста функции $f_i(x)$. Совместим начала этих векторов с началом координат пространства R^n и отметим $\overline{c_i} = \overline{OC_i} = (c_{i1}, c_{i2}, \ldots, c_{in})$ (рис. 1).

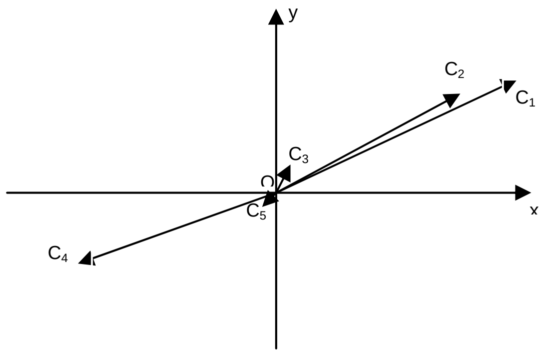

РИС. 1. Пример размещения векторов $\overline{OC_i}$ в пространстве R^2

Два критерия будем считать „сильно связанными", если их оценки являются близкими на разных альтернативах. Под близкими оценками двух критериев f_i и f_j будем понимать как близкие значения длин векторов $\overline{c_i}$ і $\overline{c_j}$, так и малый угол между ними. Если же высокая оценка по одному из критериев сопровождается низкой оценкой по другому, то такие критерии будем считать „слабо связанными".

Два критерия назовем „противоречивыми", если улучшение оценок по одному из них приводит к ухудшению оценок второго.

Алгоритмы разбиения множества критериев на кластеры рассматриваются в работах [2 – 5]. На основе описанных алгоритмов можно провести кластеризацию критериального пространства разными способами. Все алгоритмы, представленные в этих работах, можно условно разделить на три группы.

К первой группе можно отнести алгоритмы группирования критериев посредством построения гиперплоскости и ортонормированного базиса [3]. Они разбивают критерии эффективности на множества противоречивых критериев (рис. 2).

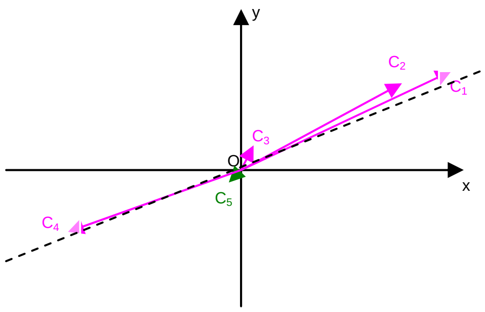

РИС. 2. Пример возможной кластеризации критериального пространства алгоритмами первой группы (пунктирной линией изображена условная линия деления противоречивых групп критериев)

В частности, алгоритм размытой кластеризации критериев эффективности и второй алгоритм нахождения сильно связанных кластеров критериев с помощью нечеткого бинарного отношения можно отнести ко второй группе [5, 6]. В данном случае проводится группировка критериев на множества их скопления. Причем, при разбивке учитываются лишь расстояния между точками C_i. Поэтому такие разбития не исключают попадания в один кластер противоречивых критериев (рис. 3).

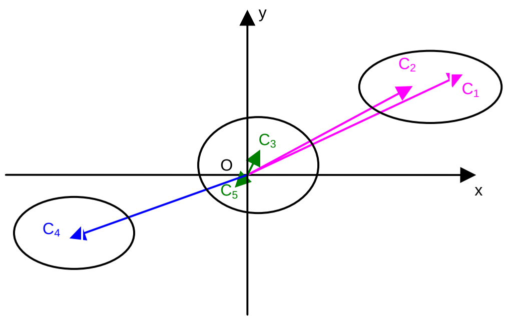

РИС. 3. Пример кластеризации критериального пространства алгоритмами второй группы

К третьей группе критериев можно отнести первый алгоритм нахождения сильно связанных кластеров критериев с помощью нечеткого бинарного отношения и алгоритм понижения мощности множества критериев эффективности [4, 5]. Группировка при этом проводится не только на основании расстояний от точек C_i, но и с учетом углов между ними. Образованные кластеры не будут содержать противоречивые критерии (рис. 4).

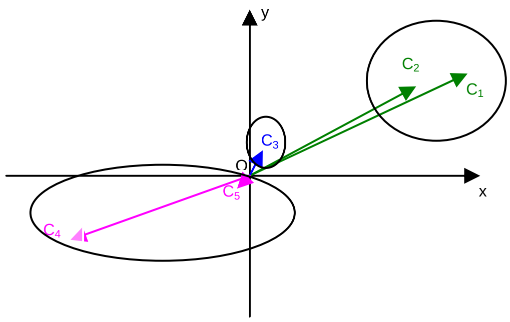

РИС. 4. Пример возможной кластеризации критериального пространства алгоритмами третьей группы

Одним из самых распространенных методов решения многокритериальных задач линейного программирования является метод аддитивной свертки. С помощью этого метода многокритериальная задача (1), (2) сводится к однокритериальной задаче вида

$$F(x) = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i f_i(x), \tag{3}$$

$$x \in X \subseteq R^n, \tag{4}$$

где λ_i – взвешивающие коэффициенты критериев эффективности $f_i(x)$, причем $\sum_{i=1}^{m} \lambda_i = 1$, $\lambda_i \geq 0$, $i = \overline{1, m}$ [1].

На основании вышеприведенных алгоритмов, как уже отмечалось ранее, можно проанализировать взаимосвязи критериев, и, кроме того, предлагается модифицировать метод аддитивной свертки критериев.

2. Свертки кластеров критериев. Пусть любым из алгоритмов второй и третьей групп проведена кластеризация критериального пространства и образованы кластеры $K_1, K_2, \ldots, K_z$. В каждом из кластеров K_i, $i = \overline{1, z}$ предлагается использовать один из следующих методов свертки кластеров критериев.

1. Среднюю длину векторов, которые принадлежат данному кластеру, обозначим $\eta = \dfrac{\sum_{\overline{c_j} \in K_i} \left\| \overline{c_j} \right\|}{|K_i|}$, где $|K_i|$ – мощность множества K_i, а $\left\| \overline{c_j} \right\|$ – длина вектора $\overline{c_j}$. Обозначим $\overline{\beta} = \sum_{\overline{c_j} \in K_i} \overline{c_j}$. Свертку кластера обозначим $\overline{c_i}^* = \dfrac{\eta \cdot \overline{\beta}}{\left\| \overline{\beta} \right\|}$.

2. Обозначим $\Gamma_i = \left\{ j \,\middle|\, \overline{c_j} \in K_i \right\}$ і $\overline{\beta} = (\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n)$,

где $\beta_k = \dfrac{\sum\limits_{j \in \Gamma_i} \dfrac{c_{jk}}{\left\| \overline{c_j} \right\|}}{|K_i|}$, $k = \overline{1,n}$. Как и в предыдущем пункте вектор $\overline{c_i}^* = \dfrac{\eta \cdot \overline{\beta}}{\left\| \overline{\beta} \right\|}$ будет обозначать свертку кластера.

3. Пусть каждому из векторов $\overline{c_j}$ кластера K_i ЛПР (лицо, принимающее решение) может поставить в соответствие весовой коэффициент λ_j или, например, веса можно определить по формуле $\lambda_j = \dfrac{\left\| \overline{c_j} \right\|}{\sum\limits_{k \in \Gamma_i} \left\| \overline{c_k} \right\|}$, $\forall j \in \Gamma_i$, причем $\sum\limits_{j \in \Gamma_i} \lambda_j = 1$. Координаты вектора $\overline{\beta}$ определим как $\beta_k = \dfrac{\sum\limits_{j \in \Gamma_i} \lambda_j c_{jk}}{\sum\limits_{l \in \Gamma_i} \lambda_l}$.

И, наконец, $\overline{c_i}^* = \overline{\beta}$.

Каждому вектору $\overline{c_1}^*, \overline{c_2}^*, \ldots, \overline{c_z}^*$ поставим в соответствие критерий $\tilde{f}_i(x)$, $i = \overline{1,z}$ – представитель кластера, где $\tilde{f}_i(x) = c_{i1}^* \cdot x_1 + c_{i2}^* \cdot x_2 + \ldots + c_{in}^* \cdot x_n$. В дальнейшем, рассматривая вместо критериев эффективности $f_1, f_2, \ldots, f_n$ новые критерии $\tilde{f}_1, \tilde{f}_2, \ldots, \tilde{f}_z$, можно уменьшить мощность критериального пространства к числу z.

3. Определение весов кластеров критериев. Дальше для каждого из кластеров $K_1, K_2, \ldots, K_z$ определим весовой коэффициент $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_z$, тем самым определив их и для $\tilde{f}_1, \tilde{f}_2, \ldots, \tilde{f}_z$.

1. Пусть ЛПР может указать коэффициенты важности $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ соответственно каждому из критериев $f_i(x)$, $i = \overline{1,m}$. Весовой коэффициент β_j кластера K_j можно задать как сумму тех α_i, что отвечают критериям, которые содержат данный кластер:

$$\beta_j = \frac{\sum\limits_{i \in \left\{ s \middle| f_s \in K_j \right\}} \alpha_i}{\sum\limits_{k=1}^{m} \alpha_k}, \; j = \overline{1,z}.$$

2. Если нет возможности получить информацию от ЛПР или ЛПР не в состоянии ее предоставить, то весы кластеров определим, как

$$\beta_j = \frac{|K_j|}{m}, \text{ где } |K_j| \text{ – мощность кластера } K_j .$$

3. Если же ЛПР не может определить веса критериев эффективности, но может попарно сравнить критерии по важности, тогда образуем матрицу B, которая имеет z строк и z столбцов, использовав, например, калибровку

$$b_{ij} = \begin{cases} 1, \text{ если } K_i \text{ важнее } K_j, \\ 0, \text{ в противном случае.} \end{cases}.$$

Для определения коэффициентов важности $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_z$ просуммируем матрицу B по строках и пронормируем найденные величины:

$$\beta_j = \frac{c_j}{\sum_{s=1}^{z} c_s}, \quad \text{где } c_i = \sum_{j=1}^{z} b_{ij}, \ i = \overline{1, z}.$$

На основании вышеизложенного задача (1), (2) может быть приведена к однокритериальной с помощью суперкритерия вида

$$F(x) = S(\beta_i, \ \tilde{f}_i(x)), \tag{5}$$

где S – некоторая функция свертки, $\tilde{f}_i$ – представитель кластера K_i, β_i – весовой коэффициент K_i.

Н.Е. Кондрук, М.М. Маляр

ДЕЯКІ ЗАСТОСУВАННЯ КЛАСТЕРИЗАЦІЇ КРИТЕРІАЛЬНОГО ПРОСТОРУ
ДЛЯ ЗАДАЧ ВИБОРУ

Розглянуто деякі питання застосування кластеризації критеріального простору багатокритеріальних задач лінійного програмування і представлено модифікований алгоритм адитивної згортки критеріїв ефективності для розв’язування задач такого типу.

N.E. Kondruk, M.M. Malyar

APPLICATIONS OF CLUSTIRIZATION OF CRITERION SPACE FOR
THE CHOICE PROBLEMS

Questions of application of clustirization of criterion space of linear programming multicriterional problems are considered. On the basis of it, the modified algorithm of additive package of criterion of efficiency for problem solving of such kind is represented.

1. *Миллер Г.* Магическое число семь плюс или минус два // Инж. психология. – М.: Прогресс, 1964.
2. *Модели* и методы оптимизации надежности сложных систем. / В.Л. Волкович, А.Ф. Волошин, В.А. Заславский, И.А. Ушаков: Под. ред. В.С. Михалевича – Киев: Наук. думка, 1993. – 312 с.
3. *Маляр М.М., Цицика Н.Е.* Групування критеріїв ефективності // Вісн. СевДТУ. – Севастополь: Вид-во СевДТУ, 2003. – Вип. 47: – С. 75–79.
4. *Маляр М.М., Цицика Н.Е.* Алгоритм зменшення кількості критеріїв в багатокритеріальній задачі лінійного програмування // Вісн. Київ. ун-ту. Сер. фіз.-мат. наук. – 2004. – Вип. 2. – С. 288–292.
5. *Кондрук (Цицика) Н.Е., Маляр М.М.* Кластеризація критеріїв ефективності у задачах вибору // Там само. – 2005. – Вип. 3. – С. 305–308.
6. *Кондрук Н.Е., Маляр М.М.* Алгоритм кластеризації критеріального простору для задач вибору // Там само. – 2006. – Вип. 3. – С. 225–229.
7. *Ларичев О.И.* Объективные модели и субъективные решения. – М.: Наука, 1987. – 143 с.

Получено 01.11.2007

Об авторах:

Кондрук Наталия Эмериховна,
преподаватель кафедры кибернетики и прикладной математики
математического факультета Ужгородского национального университета,

Маляр Николай Николаевич,
кандидат технических наук, доцент,
заведующий кафедрой кибернетики и прикладной математики,
декан математического факультета Ужгородского национального университета.
e-mail: : cyber@mail.uzhgorod.ua