

# Дискретные системы управления

УДК 519.7 : 681.5

## ИССЛЕДОВАНИЕ ПРОЦЕССА УПРАВЛЕНИЯ, СИНТЕЗИРОВАННОГО ПО ПРИБЛИЖЕННОЙ ИДЕНТИФИЦИРОВАННОЙ МОДЕЛИ

А.В. Гуммель

*Институт космических исследований НАН Украины и НКА Украины*

Рассмотрена задача синтеза управления с использованием модели, идентифицированной в условиях ограниченной неопределенности. Для синтеза такого управления предлагается метод комбинирования идентификации системы, основанной на 4SID-методе, и использования асимптотического идентификатора состояний для позиционирования полюсов идентифицированной модели неизвестной системы. С помощью численного моделирования проводится анализ влияния синтезированного управления на скорость переходного процесса и уровня шума в исходной системе.

Розглянуто задачу синтезу керування з використанням моделі, ідентифікованої в умовах обмеженої невизначеності. Для синтезу такого керування пропонується метод комбінування ідентифікації системи, що базується на 4SID-методі, та використання асимптотичного ідентифікатору стану для позиціонування полюсів ідентифікованої моделі невідомої системи. За допомогою чисельного моделювання проводиться аналіз впливу синтезованого керування на швидкість перехідного процесу і рівня шуму у вихідній системі.

### ВВЕДЕНИЕ

В данной работе рассматривается синтез управления объекта с априори неизвестной структурой и параметрами в условиях ограниченной неопределенности. В большинстве существующих методов управления предполагается, что математическая модель управляемого объекта и значения ее параметров известны. Если же она неизвестна, то прибегают к методам идентификации. Эти методы позволяют восстановить модель исследуемого объекта по данным входа и выхода, которые получены из экспериментов, проведенных на этом объекте. В случае когда информация, полученная из экспериментов на объекте, содержит стохастическую неопределенность типа белого шума, все усилия направляются на то, чтобы получить структуру модели и несмещенную оценку ее параметров, соответствующих детерминированному случаю. При этом точность идентификации позволяет применять существующие методы робастного синтеза, которые позволяют найти приемлемое управление, обеспечивающее желаемые показатели замкнутой системы. Если о погрешностях известно лишь, что они ограничены по величине или по мощности, то восстановление полной модели с несмещенными параметрами оказывается во многих случаях

принципиально невозможным. Для многомерных систем это особенно актуально по ряду объективных причин, связанных главным образом с плохой обусловленностью информационных матриц, которые приходится обращать практически во всех известных методах идентификации. В результате восстановить удастся только аппроксимирующие модели, размерность которых будет меньше, чем у исходной системы, генерирующей данные в экспериментах.

В предшествующих исследованиях удалось разработать методы идентификации, ориентированные на случаи с такой нестохастической неопределенностью, которые позволяют строить аппроксимирующие модели, согласованные по точности с погрешностями в исходных данных. Для линейных стационарных систем эти методы состоят из двух основных этапов. На первом — определяется структура модели, т.е. ее размерность, которая устанавливается по значениям сингулярных чисел при SVD (сингулярном разложении) информационных матриц, составляемых из исходных входных и выходных данных. На втором этапе решается задача параметрической идентификации при известной структуре модели. Более подробное описание этих методов дано в работах [1–3].

**Цель** данного исследования состоит в том, чтобы установить, в какой мере аппроксимирующие модели, получаемые при идентификации, пригодны для решения прикладных задач и как такие модели следует использовать в задачах синтеза управления, а в конечном итоге предложить обоснованный метод решения задач синтеза управления на основе идентифицированной модели. В рамках данной статьи будет рассмотрен лишь случай дискретной динамической системы с одним входом и одним выходом.

## **ИДЕНТИФИКАЦИЯ МОДЕЛИ**

Предположим, что система, для которой необходимо синтезировать управление, есть стационарная дискретная линейная динамическая система с одним входом и одним выходом, для которой может быть использовано следующее описание:

$$\begin{cases} x_{t+1} = Ax_t + bu_t + \xi_t, \\ y_t = cx_t + du_t + \eta_t, \end{cases} \quad (1)$$

где  $x_t$  — вектор состояния для момента  $t$  размерности  $n$ ;  $u_t$  — скалярный вход, а  $y_t$  — скалярный выход системы;  $\dim A = n \times n$ ,  $b, d$  — вектор-столбцы размерности  $n$ , а  $c$  — вектор-строка размерности  $n$ ;  $\eta_t$  — погрешности измерений, ограниченные по норме  $l_2$ , а  $\xi_t$  — возмущения на входе, так же ограниченные по норме. Известными являются данные входного и выходного воздействий  $u_t$  и  $y_t$  на интервале  $[0, N]$ . Нам неизвестны размерности системы  $n$  и значения коэффициентов соответствующих матриц, которые требуется определить. Для получения данных выхода будем проводить активные эксперименты на объекте. Чтобы определить размерность системы, желательно обеспечить возбуждение всех

мод спектра, близкое к равностепенному, во время проведения эксперимента. В исследовании будет использоваться 4SID-метод, который в основном развит для задач со стохастической неопределенностью. Однако с применением некоторых модификаций данный метод может быть использован в задаче с ограниченной погрешностью.

В данной работе будем использовать серию прямоугольных импульсов максимально возможной амплитуды, чередующихся с интервалами свободного движения. Наибольшую продолжительность импульса следует выбрать равной времени переходного процесса системы. Применение импульсов большей продолжительности приведет к появлению стационарного режима в выходных данных системы, которые не имеют дополнительной ценности для процесса идентификации. Продолжительность последующих импульсов уменьшается до пределов, целесообразных для каждой конкретной задачи. Интервал свободного движения между импульсами должен быть достаточен для возвращения системы к исходному режиму:

$$u_t = \begin{cases} u_0, & t \in S_0, S_2, \dots, S_{2k}, \\ 0, & t \in S_1, S_3, \dots, S_{2k+1}, \end{cases} \quad (2)$$

где  $S_0, S_2$  — интервалы возбуждения, а  $S_1, S_3$  — интервалы свободного движения.

Идентификацию системы (1) по этим входным и соответствующим им выходным данным будем проводить с использованием метода выделяемого подпространства, или 4SID-метода. Этот метод основан на теории реализации и активно развивается последние 40 лет. В предположении о стохастической природе шумов и возмущений и при выполнении условий идентифицируемости обоснована состоятельность оценок, получаемых этим методом. Метод ориентирован на многомерные многосвязные системы с описанием в пространстве состояний.

Следуя 4SID-методу, составим расширенные ганкелевы матрицы, используя вход и выход системы:

$$\begin{aligned} U &= [u(1), \dots, u(N - \alpha)], \\ Y &= [y(1), \dots, y(N - \alpha)], \end{aligned} \quad (3)$$

где  $y(t) = [y_t, y_{t+1}, \dots, y_{t+\alpha-1}]^T$ ,  $u(t) = [u_t, u_{t+1}, \dots, u_{t+\alpha-1}]^T$ , а  $n < \alpha < N$ , где  $n < \alpha < N$  — предполагаемая размерность модели. Из (1) и (3) можем получить систему матричных уравнений

$$Y = \Gamma_\alpha X + \Phi_\alpha U + Z, \quad (4)$$

где

$$\Gamma_\alpha = \begin{pmatrix} c \\ cA \\ \vdots \\ cA^{\alpha-1} \end{pmatrix}; \quad \Phi_\alpha = \begin{pmatrix} d & 0 & \dots & 0 \\ cb & d & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ cA^{\alpha-2}b & \dots & cb & d \end{pmatrix}, Z = \Psi_\alpha W + V,$$

$$\Psi_\alpha = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ c & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ cA^{\alpha-2} & \dots & c & 0 \end{pmatrix}, W = [\xi(1), \dots, \xi(N-\alpha)], V = [\eta(1), \dots, \eta(N-\alpha)].$$

Умножив справа выражение (5) на матрицу  $\Pi_{UT}^\perp = I - U^T(UU^T)^{-1}U$ , получим

$$\Upsilon \Pi_{UT}^\perp = \Gamma_\alpha X \Pi_{UT}^\perp + Z \Pi_{UT}^\perp, \quad (5)$$

где  $\Pi_{UT}^\perp$  — проектор на собственное подпространство  $U$ , такой, что  $\Upsilon \Pi_{UT}^\perp = 0$ . Следует заметить, что это возможно только в случае невырожденности матрицы  $UU^T$ . Это условие выполняется, например, если на вход подается постоянно возбуждающее воздействие, в данном случае серия прямоугольных импульсов. Так как воздействие постоянно возбуждающее,  $\alpha > n$  и  $N$  достаточно большое, то  $X \Pi_{UT}^\perp$  будет иметь ранг не меньший, чем  $n$ . Тогда гарантируется и полный ранг матрицы  $\Gamma_\alpha X \Pi_{UT}^\perp$ .

В результате сигнальное подпространство, соответствующее одной из реализаций системы, генерирующей данные, может быть выделено, если осуществить SVD (сингулярное разложение) матрицы  $\Upsilon \Pi_{UT}^\perp$ , т.е. представить ее в виде

$$\Upsilon \Pi_{UT}^\perp = \hat{Q}_s \hat{S}_s \hat{V}_s^T + \hat{Q}_n \hat{S}_n \hat{V}_n^T, \quad (6)$$

где выделены сигнальная часть с индексом  $s$  и часть соответствующая шумам и возмущениям, обозначенная индексом  $n$ . При отсутствии погрешностей  $\hat{S}_n = 0$ , а  $\hat{S}_s$  имеет  $n$  сингулярных чисел, число которых равно размерности генерирующей системы. Наличие ошибки в исходных данных с вероятностью почти равной единице приводит к полным сингулярным матрицам, т.е. матрицам с полным рангом. Процедура разделения на сигнальную и шумовую части сводится тогда к принятию решения, какие сингулярные числа считаем принадлежащими  $\hat{S}_s$ , а какие —  $\hat{S}_n$ . При увеличении уровня шума количество сингулярных чисел, описывающих динамику идентифицируемой системы, уменьшается. Однако при том же

уровне погрешности, изменение порядка аппроксимирующей модели слабо влияет на вариацию величины

$$S = \sum_{j=1}^{q_1} \frac{|\hat{b}_j \cdot \hat{c}_j|}{|\hat{\lambda}_j|} + \sum_{j=1}^{2q_2} \frac{|\hat{b}_j \cdot \hat{c}_j|}{(\alpha_j^2 + \beta_j^2)}, \quad (7)$$

где  $q_1$  — число действительных собственных значений, а  $q_2$  — количество пар комплексно сопряженных собственных значений  $\alpha_j \pm \beta_j$ .

При увеличении порядка приближенной модели количество слагаемых в (7), которые по порядку величин существенно отличаются от уровня шума, остается постоянным. Таким образом, количество слагаемых в (7) можно использовать для определения размерности идентифицированной модели, при которой восстанавливается максимально возможное количество мод неизвестной системы при заданном уровне шума, но при этом позволит избежать наличия мод шумовой части в спектре идентифицированной модели. Одним из способов такого использования является итеративная процедура, в которой на каждом этапе производится идентификация с увеличением размерности получаемой модели. Критерием остановки процедуры является наличие слагаемых в выражении (7), порядок которых соответствует уровню погрешности. В результате такой процедуры получена «оптимальная» размерность аппроксимирующей модели  $Q_{opt}$ . Так как данная величина зависит от уровня шума в системе, в пределах реальных шумов оценка размерности аппроксимирующей модели по сингулярным числам с устойчивыми параметрами дает модель третьего, реже четвертого порядка. При уменьшении уровня шума значение  $Q_{opt}$  стремится к истинной размерности системы.

Этим завершается структурная идентификация системы, т.е. определение порядка аппроксимирующей модели. На следующем этапе 4SID определяются элементы матриц, входящих в (1). Для этого матрица  $\hat{Q}_s \hat{S}_s \hat{V}_s^T$  разбивается на произведение двух матриц полного ранга, одна из которых будет  $\Gamma_\alpha$ , а другая —  $X \Pi_{U^T}^\perp$ . Согласно теории реализаций можно записать, что  $\Gamma_\alpha X \Pi_{U^T}^\perp = \Gamma_\alpha T T^{-1} X \Pi_{U^T}^\perp = \tilde{\Gamma}_\alpha \tilde{X} \Pi_{U^T}^\perp$ , где  $\tilde{\Gamma}_\alpha = \Gamma_\alpha T$ ;  $\tilde{X} = T^{-1} X$ , а  $T$  — неособая матрица преобразования к другой реализации. Поскольку матрица  $\hat{Q}_s$  составлена из  $n$  главных сингулярных векторов, и является полноранговой, то можно положить

$$\tilde{\Gamma}_\alpha = \hat{Q}_s. \quad (8)$$

Чтобы найти матрицу  $A$ , следует использовать инвариантность сдвига матрицы  $\Gamma_\alpha$  и найти  $\tilde{A}$  из переопределенной системы уравнений

$$\Gamma_{2:\alpha} = \Gamma_{1:\alpha-1} A, \quad (9)$$

где  $\Gamma_{2:\alpha}$  — матрица, получаемая из  $\Gamma_\alpha$  исключением первого блока  $c$ , а  $\Gamma_{1:\alpha-1}$  — последнего блока  $cA^{\alpha-1}$ .

Ортогональность матриц  $\hat{Q}_s = \tilde{\Gamma}_\alpha$  и  $\hat{Q}_n$  позволяет из (6) получить переопределенную систему уравнений

$$\hat{Q}_n Y = \hat{Q}_n \Phi_\alpha U. \quad (10)$$

Используя МНК, можно определить оставшиеся элементы системы  $b$  и  $d$ . Этим завершается вся процедура идентификации классическим 4SID-методом.

Однако при малых погрешностях сингулярные числа, соответствующие возмущениям или плохо наблюдаемым модам системы, становятся очень малыми, что приводит к неустойчивой процедуре нахождения матрицы  $Q_n$ . Поэтому более эффективной представляется модификация 4SID-метода, основанная на представлении модели системы в канонической жордановой форме с уже существенными собственными значениями и разложением выхода по соответствующим им собственным функциям. Так как в данных условиях различные реализации системы эквивалентны между собой по выходу, без потери общности можем положить, что мы находим оценки параметров системы в канонической жордановой реализации, в которой  $\hat{A} = \text{diag}\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{Q_{\text{opt}}}\}$ , действительные собственные значения  $\lambda_j$ ,  $j = \overline{1, q_1}$  и комплексные  $\alpha_j \pm i\beta_j$ ,  $j = q_1 + 2s - 1$ ,  $s = \overline{1, q_2}$ , где  $Q_{\text{opt}} = q_1 + 2q_2$ , а  $b_j = 1$ ,  $j = \overline{1, q_1}$ ;  $b_j = 0$ ,  $j = q_1 + 2s - 1$ ,  $s = \overline{1, q_2}$ ;  $b_j = 1$ ,  $j = q_1 + 2s$ ,  $s = \overline{1, q_2}$ . Здесь  $q_1$  определяет число установленных действительных, а  $q_2$  — пар комплексных собственных значений. Тогда для нахождения  $\hat{c}$  используем разложения выходного сигнала по собственным функциям

$$y_k = \sum_{j=1}^{q_1} c_j x_j^r(k) + \sum_{j=1}^{q_2} \left( c_{q_1+2j-1} x_{q_1+2j-1}^c(k) + c_{q_1+2j} x_{q_1+2j}^c(k) \right), \quad k = \overline{1, N}, \quad (11)$$

где  $x_j^r(k)$  ( $j \in \overline{1, q_1}$ ) — базисные решения, соответствующие действительным собственным значениям  $\lambda_j$ , а пара с  $x_{q_1+2j-1}^c(k)$  и  $x_{q_1+2j}^c(k)$   $j = \overline{1, q_2}$  — комплексным значениям  $\alpha_j \pm i\beta_j$  для заданного входного воздействия в виде последовательности прямоугольных импульсов.

Состояние системы  $x_j^r(k)$  находится из решения задачи Коши для разностных уравнений

$$\begin{cases} x_{t+1j}^r = \lambda_j x_{t,j}^r + u_0, t \in S_0, S_2, \dots, S_{2k}, \\ x_{t+1j}^r = \lambda_j x_{t,j}^r, t \in S_1, S_3, \dots, S_{2k+1} \end{cases} \quad (12)$$

при нулевых начальных условиях  $x_t^r \Big|_{t=0} = 0$ .

Соответственно,  $x_{n_1+2j-1}^c(k)$  и  $x_{n_1+2j}^c(k)$  вычисляются из уравнений

$$\begin{cases} x_{t+1, q_1+2j-1}^c = \alpha_j x_{t, q_1+2j-1}^c + \beta_j x_{t, n_1+2j}^c, t \in S_0, S_2, \dots, S_{2k}, \\ x_{t+1, q_1+2j}^c = -\beta_j x_{t, q_1+2j-1}^c + \alpha_j x_{t, q_1+2j}^c + u^*, t \in S_0, S_2, \dots, S_{2k}, \\ x_{t+1, q_1+2j-1}^c = \alpha_j x_{t, q_1+2j-1}^c + \beta_j x_{t, q_1+2j}^c, t \in S_1, S_3, \dots, S_{2k+1}, \\ x_{t+2, q_1+2j}^c = -\beta_j x_{t, q_1+2j-1}^c + \alpha_j x_{t, q_1+2j}^c, t \in S_1, S_3, \dots, S_{2k+1} \end{cases} \quad (13)$$

с нулевыми начальными условиями  $x_{t, q_1+2j+1}^c \Big|_{t=0} = x_{t, q_1+2j}^c \Big|_{t=0} = 0$ .

Из (11), (12) и (13) при помощи регрессии определяем оценку  $\hat{c}$ .

В результате описанного процесса идентификации получаем аппроксимирующую модель неизвестной системы в канонической жордановой форме.

## СИНТЕЗ УПРАВЛЕНИЯ ОБЪЕКТА

Хотя полученная в результате процесса идентификации модель имеет меньшую размерность по сравнению с реальной системой, есть основания полагать, что, исходя из близости выходов неизвестной системы и полученной модели, можно получить приемлемое управление по выходу исходной системы на основе упрощенной модели, полученной при идентификации. Поскольку установить однозначное взаимоотношение между модами неизвестного процесса и модели невозможно, провести синтез классического модального управления для исходной системы нельзя. В рамках данного исследования построим модальное управление для полученной упрощенной модели, а затем полученный результат используем для синтеза управления по выходу исходной модели.

Для реализации такой обратной связи необходимо провести определенные преобразования системы и добавить идентификатор состояний. Тогда построение управления сведется к нескольким шагам. На первом из них необходимо привести модель к каноническому управляемому представлению. Затем следует записать идентификатор состояния модели и, если это возможно, оптимизировать его параметры. На следующем шаге выбирается желаемый спектр замкнутой системы и вычисляются соответствующие коэффициенты обратной связи. На завершающем этапе численным моделированием проводится исследование процесса управления замкнутого обратной связью исходной реальной системы.

Для перехода к управляемому каноническому представлению, воспользуемся несингулярным оператором:

$$P = \begin{pmatrix} \hat{b} & \hat{A}\hat{b} & \dots & \hat{A}^{Q_{\text{opt}}-1}\hat{b} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{b}_1 & \hat{A}_1\hat{b}_1 & \dots & \hat{A}_1^{Q_{\text{opt}}-1}\hat{b}_1 \end{pmatrix}^{-1}. \quad (14)$$

Система может быть записана в виде

$$\begin{cases} x_{t+1} = P\hat{A}P^{-1}x_t + P\hat{b}u_t + \xi_t \\ y_t = \hat{c}P^{-1}x_t + \eta_t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_{t+1} = \hat{A}x_t + \hat{b}u_t + \xi_t \\ y_t = \hat{c}x_t + \eta_t \end{cases}. \quad (15)$$

**Идентификатор состояния.** Опишем один из возможных способов построения идентификатора состояний. В рассматриваемом случае системы с одним входом и одним выходом можно взять идентификатор, который описывается следующим уравнением:

$$\hat{x}_{k+1} = \begin{pmatrix} \hat{A} - l\hat{c}^T \end{pmatrix} \hat{x}_k + ly_k + \hat{b} \cdot u_k, \quad (16)$$

где вектор  $l$  выбирается так, чтобы матрица  $\begin{pmatrix} \hat{A} - l\hat{c}^T \end{pmatrix}$  была устойчивой, а  $\hat{x}_k$  — текущий вектор состояния, соответствующий аппроксимирующей модели в управляемой канонической форме. Так как для синтеза управления не имеет значения, в каком базисе рассматривается задача, нет необходимости возвращаться к жордановой канонической форме.

Параметр  $l$  отвечает за скорость, с которой идентификатор будет адаптироваться к изменению выходного сигнала исходной системы. В принципе при точных данных можно построить идентификатор, который идеально следит за выходом системы. Однако при наличии шума уменьшение времени переходного процесса в (16) может привести к усилению шума на выходе идентификатора. Исходя из этого, чтобы минимизировать влияние идентификатора состояния на качество синтезированной обратной связи, предлагается искать параметр  $l$  как решение задачи оптимизации. Целевым функционалом, который предстоит минимизировать, будет выступать норма невязки выхода исходной системы и выхода модели с идентификатором состояния. Такая задача эквивалентна классической параметрической идентификации. Оптимизация будет производиться по параметру идентификатора  $l$ . Ограничения на параметр  $l$ , которые следуют из условия устойчивости идентификатора, могут быть опущены, так как неустойчивость идентификатора приведет только к увеличению целевого функционала. Для решения данной задачи целесообразно использовать выходные данные исходной системы, на которых проводилось решение задачи идентификации. В качестве демонстрации на рис. 1, где приведена зависимость нормы невязки выхода исходной системы и выхода модели с идентификатором состояния от параметра  $l$ , представлен результат решения этой задачи для случая скалярного параметра идентификатора состояния  $l$ . В случае когда размерность параметра больше единицы оптимизация проводится в пространстве размерности, соответствующей размерности идентификатора состояния.



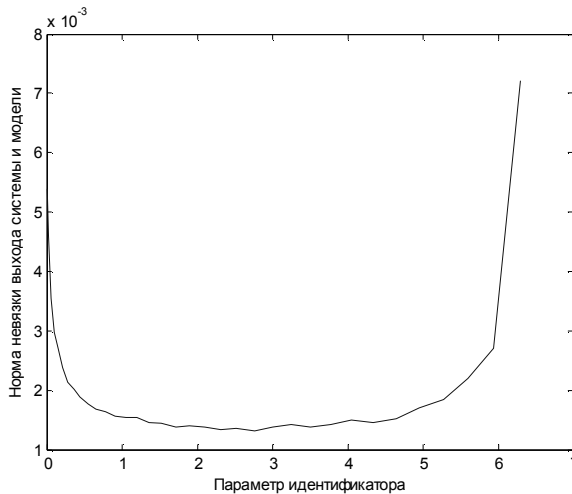


Рис. 1. Зависимость уровня шума замкнутой исходной системы от смещения значений спектра

**Принцип управления.** При модальном управлении следует определить желаемый спектр системы после ее замыкания. Для этого выберем необходимое смещение каждого собственного значения и определим коэффициенты обратной связи. Детальное описание данной процедуры может быть найдено в [6].

Предлагается последовательный синтез модального управления, начиная со смещения собственного значения самой медленной моды, более сложные виды смещения собственных значений требуют более детального анализа.

В завершении синтеза управления  $u_k = -k^T \hat{x}_k + v$  получаем замкнутую систему, которая обеспечивает желаемый спектр собственных значений для аппроксимирующей модели. В то же время замыкание этой же обратной связью, синтезированной на основе аппроксимирующей модели и идентификатора (16), даст замкнутую систему размерности  $n + Q_{opt}$ , которая записывается в виде

$$\begin{cases} x_{k+1} = Ax_k + Bu_k + \xi_k \\ \hat{x}_{k+1} = (\hat{A} - l\hat{c})\hat{x}_k + ly_k + \hat{b}\hat{u}_k \\ y_k = cx_k + \eta_k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_{k+1} = Ax_k + B\hat{u}_k + \xi_k \\ \hat{x}_{k+1} = (\hat{A} - l\hat{c})\hat{x}_k + l(cx_k + \eta_k) + \hat{b}\hat{u}_k \\ y_k = cx_k + \eta_k \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \begin{pmatrix} x_{k+1} \\ \hat{x}_{k+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & 0 \\ lc & \hat{A} - l\hat{c} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_k \\ \hat{x}_k \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} B \\ \hat{b} \end{pmatrix} \hat{u}_k + \begin{pmatrix} \xi_k \\ l\eta_k \end{pmatrix} \\ y_k = cx_k + \eta_k \end{cases} \quad (17)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \begin{pmatrix} x_{k+1} \\ \hat{x}_{k+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & -Bk \\ lc & \hat{A} - l\hat{c} - \hat{b}k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_k \\ \hat{x}_k \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} B \\ \hat{b} \end{pmatrix} u_k + \begin{pmatrix} \xi_k \\ l\eta_k \end{pmatrix} \\ y_k = cx_k + \eta_k \end{cases}$$

В результате ожидается, что синтезированная таким образом обратная связь, при замыкании выходной переменной  $y$  реальной системы, обеспечит

улучшение ее динамических свойств. Основанием для этого является то, что идентификация системы проводилась с использованием постоянно возбуждающего информативного воздействия. Задачей численного эксперимента будет оценка качества полученного управления при помощи анализа времени переходного процесса и уровня шума при стационарном режиме. Синтезированное управление будет считаться приемлемым, если оно способно обеспечить меньшее время переходного процесса, при этом уровень шума в замкнутой реальной системе после достижения стационарного режима не должен значительно превышать исходного уровня шума в системе.

## АНАЛИЗ РЕЗУЛЬТАТОВ

При численном моделировании были получены данные, позволяющие сделать определенные оценки относительно качества синтезированного управления. На рис. 2 сплошной линией изображена зависимость времени переходного процесса замкнутой системы от величины смещения самой медленной моды идентифицированной модели. Как видно из рисунка, подобное управление способно обеспечить меньшее время переходного процесса замкнутой системы.

Что же касается уровня шума, на рис. 3 можно видеть, что увеличение расстояния смещения мод влечет за собой увеличение уровня шума в замкнутой системе (17)

$$\varepsilon = \frac{\|y_t - \tilde{y}_t\|_2}{\|y_t\|_2}, \quad (18)$$

где  $y_t$  — выход идентифицируемой системы после замыкания обратной связью при воздействии шума,  $\tilde{y}_t$  — выход идентифицируемой системы после замыкания обратной связью без воздействия шума. Таким образом, уменьшение времени переходного процесса приводит к росту шумов выходного сигнала.

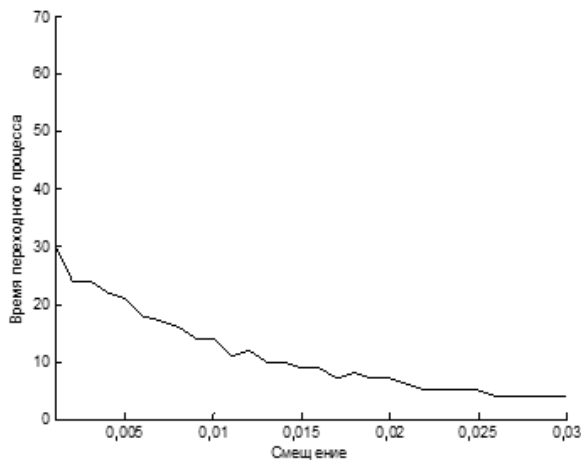


Рис. 2. Время переходного процесса в зависимости от смещения мод

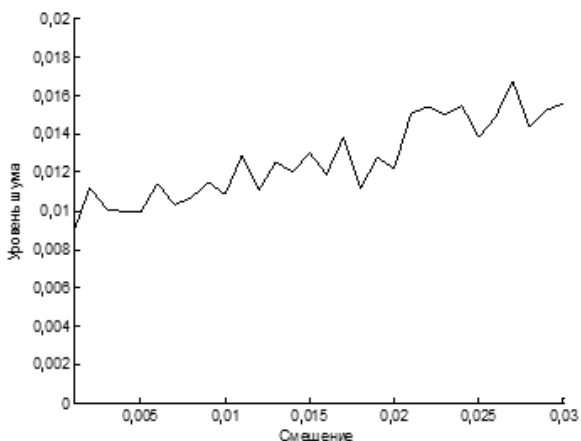


Рис. 3. Уровень шума в зависимости от смещения мод

Выходной сигнал замкнутой системы на стационаре может не соответствовать уровню выходного сигнала исходной системы при той же амплитуде входного воздействия. Равенство выходных сигналов исходной и замкнутой систем на стационаре достигается с помощью изменения амплитуды управляющего сигнала в зависимости от смещения спектра, как это показано на рис. 4, где выходной сигнал исходной системы изображен непрерывной линией.

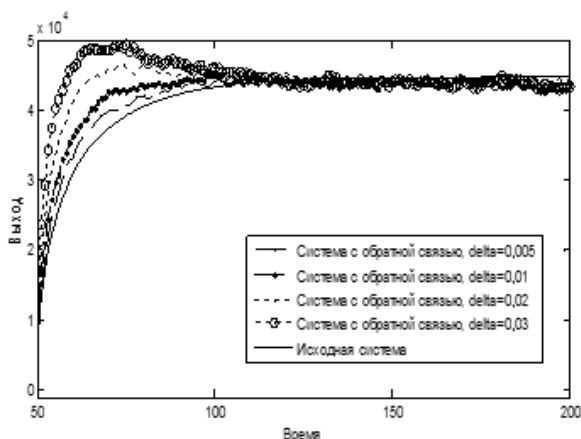


Рис. 4. Выход систем с обратной связью и исходной системы при различных амплитудах входа

## Выводы

На основе результатов, полученных в ходе исследования, можно сделать вывод, что аппроксимирующие модели, полученные в процессе идентификации, возможно использовать для улучшения динамических характеристик неизвестной исходной системы.

Исходя из свойств синтезированного управления, можем сделать вывод, что применяя описанную выше обратную связь можно получить замкнутую систему с меньшим временем переходного процесса, сохранив желаемый уровень сигнала выхода. При этом уровень шума замкнутой системы будет

оставаться на уровне шума в выходном сигнале исходной системы или, по крайней мере, не будет его сильно превышать. Однако уменьшение времени переходного процесса приводит к увеличению уровня шума в замкнутой системе, поэтому такой синтез управления необходимо рассматривать как компромисс между допустимым уровнем шума и необходимой скоростью переходного процесса.

Направлением дальнейшего развития описанного подхода является анализ различных способов перемещения собственных значений исходной системы, в том числе и итеративного синтеза управления, для достижения большей эффективности управления.

1. Губарев В.Ф. Метод итеративной идентификации многомерных систем по неточным данным. Часть 1. Теоретические основы / В.Ф. Губарев // Проблемы управления и информатики. — 2006. — № 5–2. — С. 16–31.  
Gubarev V.F. Method of iterative identification of multidimensional systems using biased data. Part 1. Theoretical bases. *Problems of control and informatics*, 2006, no. 5–2, pp. 16–31.
2. Губарев В.Ф. Метод итеративной идентификации многомерных систем по неточным данным. Часть 2. Алгоритмы / В.Ф. Губарев, П.А. Тигунов // Проблемы управления и информатики. — 2007. — № 2. — С. 5–16.  
Gubarev V.F., Tiginov P.A. Method of iterative identification of multidimensional systems using biased data. Part 2. Algorithms. *Problems of control and informatics*, 2007, no. 2, pp. 5–16.
3. О структурно-параметрической идентификации в условиях ограниченной неопределенности и аппроксимирующих моделях многомерных систем / В.Ф. Губарев, А.В. Гуммель, А.А. Кришталь, В.Ю. Олесь // Проблемы управления и информатики. — 2011. — № 3. — С. 42–56.  
Gubarev V.F., Gummel A.V., Krishtal A.A., Oles V.Ju. About structural and parametric identification in case of bounded error and approximating models of multidimensional systems. *Problems of control and informatics*, 2011, no. 3, pp. 42–56.
4. Van Overshee P., De Moor. *Subspace Identification of Linear Systems: Theory, Implementation, Applications*. Kluwer Academic Publishers, 1996. 157 p.
5. Губарев В.Ф. Особенности и взаимосвязь задач идентификации и управления в условиях неопределенности / В.Ф. Губарев, А.В. Гуммель, А.О. Жуков // Проблемы управления и информатики. — 2010. — № 1. — С. 50–62.  
Gubarev V.F., Gummel A.V., Jukov A.O. Specifics and interconnection of identification and control problems in case of uncertainty. *Problems of control and informatics*, 2010, no. 1, pp. 50–62.
6. Андреев Н.А. Управление конечномерными линейными объектами / Н.А. Андреев. — М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1976. — 424 с.  
Andreev N.A. *Control finite linear objects*. Moscow: Science, 1976. 424 p.
7. Viberg M. Subspace-based methods for the Identification of linear time-invariant systems. *Automatica*, 1995, vol. 31, no. 12, pp. 1835–1852.
8. Verhaegen M., Dewilde, P. Subspace model identification. Part 1. The output-error state-space model identification class of algorithms. *Int. Journal of Control*, 1992, vol. 56, no. 5, pp. 1187–1210.
9. Verhaegen M., Dewilde P. Subspace model identification. Part 3. Analysis of the ordinary output-error state-space model identification algorithms. *Int. Journal of Control*, 1993, vol. 58, no. 3, pp. 555–586.
10. Verhaegen M. Identification of the deterministic part of MIMO state space models given in innovations form from input-output data. *Automatica*, 1994, vol. 30, no. 1, pp. 61–74.

Получено 24.12.2013