

Дискретные системы управления

УДК 505-519.78:681.5

ИДЕНТИФИКАЦИЯ МНОГОМЕРНЫХ СИСТЕМ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ГЕНЕТИЧЕСКИХ АЛГОРИТМОВ ОПТИМИЗАЦИИ

Д.М. Пархомчук, Е.В. Визнюк

Национальный технический университет Украины «Киевский политехнический институт»

Представлен новый метод идентификации линейных многомерных систем. В отличие от уже существующих методов, использующих теорию линейной алгебры или математической статистики, в разработанном авторами методе задача идентификации сводится к вариационной задаче с последующим ее решением при помощи генетического алгоритма — метода дифференциальной эволюции. В связи с ресурсоемкостью задачи использовались технологии параллельных вычислений.

Надано новий метод ідентифікації лінійних багатовимірних систем. На відміну від уже існуючих методів, що використовують теорію лінійної алгебри або математичної статистики, в розробленому авторами методі задача ідентифікації зводиться до варіаційної задачі з подальшим її розв'язком за допомогою генетичного алгоритму — методу диференційної еволюції. У зв'язку з ресурсомісткістю задачі використовувалися технології паралельних обчислень.

Введение

Бурное развитие теории управления во второй половине XX века обусловлено значительными достижениями в области электронно-вычислительной техники. Рост быстродействия и производительности компьютерных устройств позволил обрабатывать большие массивы данных и автоматизировать вычисления с помощью численных методов.

В частности, все большее внимание ученых начало привлекать направление теории управления, позволяющее строить модель объекта управления по данным «вход-выход», полученным в процессе функционирования объекта. Это направление получило название «идентификация систем». Под идентификацией или моделированием понимают процесс определения коэффициентов разностного или дифференциального уравнения, описывающего физические явления в системе [1]. Важность идентификации для практической деятельности обусловила рост количества научных исследований, что позволило, в свою

© Д.М. Пархомчук, Е.В. Визнюк, 2013

ISSN 0452-9910. Кибернетика и вычисл. техника. 2013. Вып. 172

очередь, отделить ее от теории управления как дисциплину, изучающую и разрабатывающую методы получения модели объекта управления.

Существует множество методов идентификации динамических систем [1]: классические методы, основанные на корреляционной теории случайных функций, применение фильтров, метод выделения подпространства, метод минимизации погрешности предсказания и т.п.

Одним из подходов к решению некорректных задач является использование теории линейной алгебры, но в случае многомерных систем число обусловленности обращающихся матриц растет неприемлемо быстро, что значительно усложняет процедуру решения и не позволяет добиться необходимой точности.

Иной подход базируется на теории математической статистики, позволяющей установить условия существования решения задачи идентификации для линейных стационарных систем: управляемость, наблюдаемость, а также информативность входящего сигнала. Однако конечность выборки входящих данных, особенно для систем большой размерности, приводит к тому, что обратная задача идентификации оказывается некорректно поставленной и ее решения будут чувствительными к ошибкам или неустойчивыми. Поэтому на практике алгоритмы идентификации содержат процедуры регуляризации, которые устанавливают ограничения размерности аппроксимирующей модели по сравнению с реальной моделью, имеющей размерность, превышающую максимально допустимую при условии корректности [3]. Однако появление доступных высокопроизводительных компьютеров и новых численных методов позволяет вернуться к основам теории и не сводить некорректную задачу к минимизации регуляризирующих функционалов [4].

Цель данной работы — разработать прямой метод параметрической идентификации систем. Впервые задача идентификации сводится к вариационной задаче с использованием прямых методов оптимизации, в частности — метода дифференциальной эволюции. Данный метод был разработан Р. Сторном и К. Прайсом, впервые опубликован ими в 1995 г. и развит в их более поздних работах [5].

Постановка задачи

Метод минимизации ошибки предсказания. Рассмотрим линейную стационарную динамическую систему в пространстве состояний:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = A\mathbf{x}(t) + Bu(t), & \mathbf{r} \\ y(t) = C\mathbf{x}(t) + \xi(t), & \mathbf{x}(0) = \mathbf{0}, \end{cases} \quad (1)$$

где $\mathbf{x}(t) \in R^n$ — вектор состояний, $u(t)$ и $y(t)$ — входящий и исходящий сигналы соответственно (рассматриваем лишь систему с одним входом и одним выходом), матрицы $A(n \times n), B(n \times 1), C(1 \times n)$ — параметры данной системы, $t \in [0, T]$ — время, $\xi(t)$ — случайное возмущение.

Параметрическая идентификация системы (1) состоит в определении параметров A, B, C по входящему и исходящему сигналам при известной размерности n . Структурная же идентификация предполагает, что размерность n неизвестна.

В качестве входящего сигнала берем псевдослучайную тернарную последовательность, имеющую бесконечный широкополосный спектр и являющуюся постоянным возбудителем вида

$$u(t) = \begin{cases} \pm u_0, & s = 2k \\ 0, & s = 2k + 1 \end{cases}, t \in [t_s, t_{s+1}], k = \overline{0, M},$$

$u_0 = const, M$ — натуральное число, соответствующее количеству переключений входящего сигнала.

Одна из реализаций входящего сигнала при $u_0 = 2, M = 18$ представлена на рис. 1.

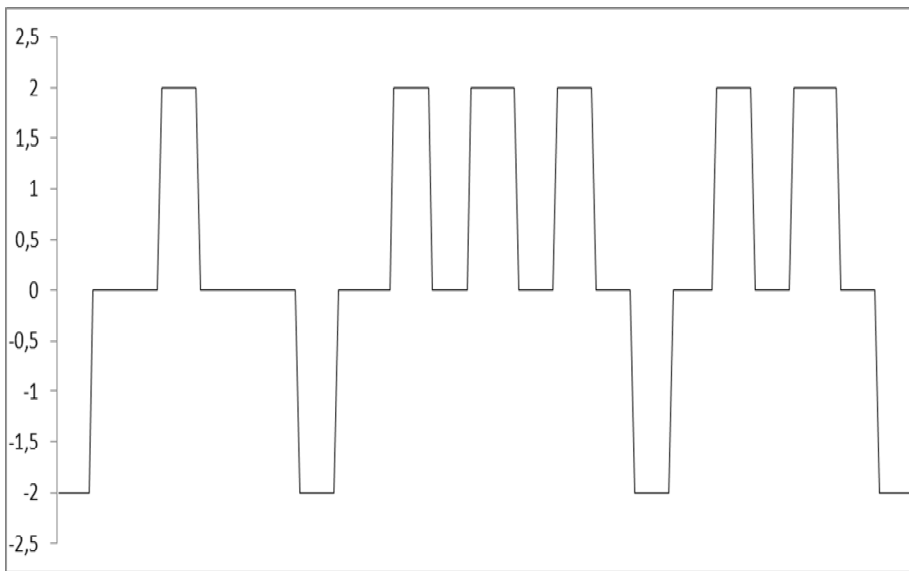


Рис. 1. Реализация входящего сигнала при $u_0 = 2, M = 18$

Применим прямое преобразование Лапласа $F(p) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-pt} dt$ к первому уравнению системы (1) при нулевых начальных условиях:

$$X(p) = (pI - A)^{-1} BU(p). \quad (2)$$

Несложно заметить, что оригиналом изображения (2) будет

$$x(t) = \int_0^t e^{A(t-\tau)} Bu(\tau) d\tau. \quad (3)$$

$$\text{Отсюда } y(t) = C \int_0^t e^{A(t-\tau)} Bu(\tau) d\tau.$$

Имея экспериментальную выборку исходящих данных $y^*(t_i)$ размерности m , являющихся результатом функционирования системы (1) моменты времени $t_i \in [0, T], i = \overline{0, m}$, и считая \mathbf{y} и \mathbf{r}^* векторами размерности $m+1$ с координатами $y(t_i)$ и $y^*(t_i)$ соответственно, определим ошибку предсказания:

$$\|\mathbf{r}(\theta) - \mathbf{r}^*\| = \sqrt{\frac{1}{m+1} \sum_{i=0}^m \left(C \int_0^{t_i} e^{A(t_i-\tau)} Bu(\tau) d\tau - y^*(t_i) \right)^2}, \quad (4)$$

$\theta \in D$ определяет параметры модели A, B, C из допустимого множества D . Тогда метод минимизации ошибки предсказания состоит в минимизации выражения (4):

$$\left(\sqrt{\frac{1}{m+1} \sum_{i=0}^m \left(C \int_0^{t_i} e^{A(t_i-\tau)} Bu(\tau) d\tau - y^*(t_i) \right)^2} \rightarrow \min \right) \Leftrightarrow \Leftrightarrow \left(\frac{1}{m+1} \sum_{i=0}^m \left(C \int_0^{t_i} e^{A(t_i-\tau)} Bu(\tau) d\tau - y^*(t_i) \right)^2 \rightarrow \min \right), \quad (5)$$

и параметры модели определяются как $\hat{\theta} = \arg \min_{\theta \in D} (\|\mathbf{r}(\theta) - \mathbf{r}^*\|)^2$ [2].

Идентификация системы осуществляется сначала в детерминированном случае ($\forall i \xi(t_i) = 0$), а затем и в условиях неопределенности, когда реализации $\xi(t_i)$ априори неизвестны, но ограничены неравенством $\|\xi(t_i)\| \leq \varepsilon, \varepsilon > 0$. В эксперименте в качестве $\xi(t_i)$ была принята реализация равномерно распределенной псевдослучайной величины на отрезке $[-\varepsilon; \varepsilon]$ (дискретный белый шум). Согласно с основным постулатом теории реализаций, описание модели в виде (1) определяет множество эквивалентных моделей, связанных несобственным преобразованием. Поэтому для определения параметров системы (1) в процессе идентификации достаточно найти оценку параметров в канонической жордановой форме. Пусть все собственные числа матрицы A однократные, из них $-\lambda_j, j = \overline{1, N}$ — вещественные, $-\alpha_i \pm \beta_j, i = \overline{1, M}$ — пары комплексных, $N + 2M = n$. Тогда каноническая жорданова форма матрицы A имеет вид

$$A_{жс} = \begin{pmatrix} -\lambda_1 & \mathbf{L} & 0 & & & & & & & & \\ \mathbf{M} & \mathbf{O} & \mathbf{M} & & & & & & & & 0 \\ 0 & \mathbf{L} & -\lambda_N & & & & & & & & \\ & & & \begin{bmatrix} -\alpha_1 & \beta_1 \\ -\beta_1 & -\alpha_1 \end{bmatrix} & \mathbf{L} & & & & & & 0 \\ & & 0 & & \mathbf{M} & \mathbf{O} & & & & & \mathbf{M} \\ & & & 0 & & \mathbf{L} & \begin{bmatrix} -\alpha_M & \beta_M \\ -\beta_M & -\alpha_M \end{bmatrix} & & & & \end{pmatrix} \quad (6)$$

Считаем, что система устойчива по Ляпунову, т.е. $\lambda_j > 0, \alpha_i > 0$.

Учитывая вид исходящего сигнала, можно принять $B = \begin{pmatrix} 1 \\ \mathbf{M} \\ 1 \end{pmatrix}$, причем

параметры идентифицированной системы будут соответствовать одной из реализаций системы (1). Тогда запишем $y(t)$ в виде функции, зависящей от $\lambda_j, \alpha_i, \beta_i, c_p$. Для каждого t определяется интервал $[t_{q-1}, t_q]$, которому принадлежит t , где $q = \min_s \{s | t_s > t\}$, $s = \overline{0, m}$:

$$\begin{aligned} y(t) = & \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^{q-1} (u_j c_i \varphi_i e^{\alpha_i(t_j-t)} (\beta_j \cos(\beta_i(t_j-t)) + \alpha_i \sin(\beta_i(t_j-t))) + \\ & + u_j c_i \varphi_i e^{\alpha_i(t_{j+1}-t)} (-\beta_j \cos(\beta_i(t_{j+1}-t)) + \alpha_i \sin(\beta_i(t_{j+1}-t))) \\ & - u_j c_{i+1} \varphi_i e^{\alpha_i(t_j-t)} (\alpha_i \cos(\beta_i(t_j-t)) + \beta_i \sin(\beta_i(t_j-t))) + \\ & + u_j c_{i+1} \varphi_i e^{\alpha_i(t_{j+1}-t)} (\alpha_i \cos(\beta_i(t_{j+1}-t)) + \beta_i \sin(\beta_i(t_{j+1}-t)))) + \\ & + \sum_{i=1}^M ((u_q c_i \varphi_i e^{\alpha_i(t_q-t)} (\beta_i \cos(\beta_i(t_q-t)) - \alpha_i \sin(\beta_i(t_q-t))) - u_q c_i \varphi_i \beta_i - \\ & - u_q c_{i+1} \varphi_i e^{\alpha_i(t_q-t)} (\alpha_i \cos(\beta_i(t_q-t)) + \beta_i \sin(\beta_i(t_q-t))) + u_q c_{i+1} \varphi_i \alpha_i) + \\ & + \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^{q-1} \frac{u_j c_i}{\lambda_i} (e^{\lambda_i(t_{j+1}-t)} - e^{\lambda_i(t_j-t)}) + \\ & + \sum_{i=1}^N \frac{u_q c_i}{\lambda_i} (1 - e^{\lambda_i(t_q-t)}) \} \text{ где } \varphi_i = \frac{1}{\alpha_i^2 + \beta_i^2}. \end{aligned} \quad (7)$$

Следует отметить, что если n — порядок модели, n_r — количество вещественных корней, то количество глобальных экстремумов функции (4) будет $\frac{n-n_r}{2}! n_r!$.

Проиллюстрируем это на небольшом примере. Рассмотрим модель

третьего порядка без комплексных корней. Пусть $\theta^* = (1, 2, 3, 1, 2, 3)$ — точка глобального экстремума функции (4). По виду исходящего сигнала (7) видно, что, например, $\theta^{**} = (2, 1, 3, 2, 1, 3)$ также будет точкой глобального экстремума функции (4). Количество всех возможных перестановок координат вектора параметров θ^* , как известно из комбинаторики, равно $P_{\frac{n-n_r}{2}} = \frac{n-n_r}{2}!$ (в случае комплексных корней) и $P_{n_r} = n_r!$ (для вещественных корней). Тогда количество всех возможных пар перестановок будет равным $\frac{n-n_r}{2}!n_r!$. Таким образом, мы получили, что у функции (4) в случае параметрической идентификации количество глобальных экстремумов будет равным $\frac{n-n_r}{2}!n_r!$, и, несмотря на то что θ^* и θ^{**} дают одну и ту же приближающую модель, из этого следует невыпуклость целевой функции и, как следствие, невозможность гарантирования сходимости, например, градиентного метода.

Среди возможных альтернатив рассматривались методы: Нелдера-Мида (заявлена применимость на сильно зашумленных функциях), но он был отклонен вследствие плохой работы даже на самых слабых контрольных примерах (сходился к локальным экстремумам), метод случайного поиска (был отклонен из-за слишком долгой работы и сходимости к локальным экстремумам), а также генетические методы. Среди последних был выбран метод дифференциальной эволюции из-за хорошей адаптивности метода. В работе [5] была показана высокая вероятность сходимости метода к глобальному экстремуму, и данный факт был доказан на практике на примере рассматриваемой задачи.

Метод дифференциальной эволюции. *Описание метода.* Данный метод является методом многомерной оптимизации, относится к классу стохастических алгоритмов и использует идеи генетических алгоритмов.

Это прямой метод, т.е. он требует только значений целевой функции в конечном количестве точек и не требует значений ее производных. Он пригоден для нахождения глобального экстремума недифференцируемых, нелинейных, мультимодальных функций многих переменных.

Алгоритм. Генерируется множество хромосом — векторов n -мерного пространства, в котором определена целевая функция, — так называемое поколение. На каждой итерации алгоритм генерирует новое поколение векторов следующим образом: для каждого вектора из старого поколения выбираются три различных случайных вектора $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$ среди векторов старого поколения, за исключением самого вектора, и генерируется так называемый мутантный вектор по формуле $\mathbf{a} = \mathbf{a}_1 + u(\mathbf{a}_2 - \mathbf{a}_3)$, где u — один

из параметров метода, положительная действительная константа в интервале $[0, 2]$. Число векторов в каждом поколении постоянное. Над мутантным вектором выполняется операция «скрещивания», которая заключается в том, что некоторые его координаты заменяются на соответствующие координаты исходного вектора. Полученный после скрещивания вектор называется пробным вектором. Если он оказывается «лучше» предыдущего вектора (т.е. значение целевой функции уменьшилось), то в новом поколении вектор заменяется пробным вектором, а в противном случае — остается неизменным. Условием завершения цикла является выполнение конечного заданного количества итераций, обеспечивающего необходимую точность решения [5].

Поскольку все вычисления выполнялись на кластерном компьютере, был разработан алгоритм параллельных вычислений для метода дифференциальной эволюции. Как видим, формирование каждой хромосомы нового поколения является независимым, поэтому этот процесс можно выполнять параллельно для групп хромосом.

Полученную схему параллельных вычислений можно описать так:

1. Начало работы: главное ядро рассылает всем задействованным ядрам список номеров хромосом в новом поколении, которые они должны сформировать, а также всю необходимую информацию для подсчета значения целевой функции. Главное ядро случайным образом формирует начальное поколение. Счетчик поколений установить равным нулю.

2. Главное ядро рассылает всем задействованным ядрам текущее значение хромосом поколения.

3. Все ядра формируют свою часть поколения (так, как это описано в классическом варианте дифференциальной эволюции).

4. Все ядра отправляют главному ядру сформированные части поколения.

5. Главное ядро собирает новое поколение. Счетчик поколений инкрементировать. Сравнить счетчик поколений с предельным значением: если достигнуто — остановиться, иначе — перейти на шаг 2.

Результаты вычислительных экспериментов

Адаптация метода. Наличие $\frac{n-n_r}{2}!n_r!$ глобальных экстремумов в целевой функции вызывает определенные трудности в использовании метода дифференциальной эволюции, а именно: при малых размерах поколения и слишком большом количестве глобальных экстремумов на конечных этапах идентификации возникают ситуации, когда для мутаций выбираются хромосомы, группирующиеся около различных экстремумов, и, как результат, такие мутантные векторы не включаются в следующее поколение. Возникновение подобных ситуаций значительно замедляет сходимость метода. Чтобы избежать этого, было увеличено отношение численности поколений к порядку модели, в конечном варианте численность поколения

определяется как $N = 150n$. Количество поколений было определено эмпирически, и в окончательном варианте было выбрано $P = 95N$.

Для структурной идентификации среди моделей одного порядка выбиралась та, у которой была наименьшей погрешность по выходу и одновременно эта погрешность не сильно ($< 5\%$) отличалась при различных входящих воздействиях.

Проверка эффективности метода. Все исследования можно условно разбить на две группы: параметрическая идентификация и структурная идентификация. Был выбран следующий критерий качества идентификации: для параметрической идентификации погрешность по параметрам должна быть ничтожно мала (меньше 10^{-20}) при небольших значениях нормы шума. Для структурной идентификации был выбран другой критерий: создавались две выборки откликов на две различные реализации входящего сигнала и затем выполнялась идентификация параметров. В случае если параметры этих двух моделей отличаются незначительно (не более 5%), то идентификация считается качественной.

Для параметрической идентификации были отобраны модели всех сложностей до четвертого порядка, все испытания показали качественность идентификации в соответствии с приведенным выше критерием.

Таблица 1

Модель порядка 1

Параметры объекта	Номер испытания		Относительное различие, %
	1	2	
c_1	2,84883	2,85129	0,1
λ_1	10	10	0,0
Среднеквадратическая ошибка	3,99392	3,88892	2,6

Таблица 2

Модель порядка 2 с двумя комплексными корнями

Параметры объекта	Номер испытания		Относительное различие, %
	1	2	
c_1	2,33	2,28035	2,0
c_2	3,90973	3,89577	0,4
α_1	2,07342	2,05687	0,8
β_1	2,35593	2,36476	0,4
Среднеквадратическая ошибка	0,121381	0,121581	0,2

Для структурной идентификации эксперимент был выполнен по следующему сценарию: генерировалась модель высокого порядка (седьмого с двумя комплексными парами), на исходящий сигнал накладывался

дискретный равномерный белый шум уровня 10^{-10} и производилась идентификация моделями более низких порядков (до четвертого). В табл. 1–3 приведены оценки параметров моделей после двух экспериментов, а также относительное различие между параметрами приближающих моделей в различных экспериментах.

Таблица 3

Модель порядка 3 с двумя комплексными корнями

Параметры объекта	Номер испытания		Относительное различие, %
	1	2	
c_1	1,32	1,32771	0,3
c_2	0,714925	0,716891	0,3
c_3	4,67615	4,66814	0,2
α_1	1,06107	1,06249	0,1
β_1	1,87005	1,87117	0,1
λ_1	7,29052	7,27307	0,2
Среднеквадратическая ошибка	0,002709	0,00269	0,7



Рис. 2. Сравнение исходной и приближенной моделей

Как видим, в модели первого порядка значение параметра λ равно 10, это вызвано тем, что у генерирующей системы комплексная динамика и ее нельзя корректно описать чисто действительными моделями, поэтому эмпирическая модель пытается сразу выйти в установившийся режим. Иллюстрация данного эффекта приведена на рис. 2. Модели второго и третьего порядков с двумя комплексными корнями удовлетворяют критерию качества идентификации, расположение параметров λ и $\alpha \pm i\beta$ на комплексной плоскости приведено на рис. 3–4. Кроме того, был получен следующий результат: увеличение порядка модели ведет к уменьшению погрешности.

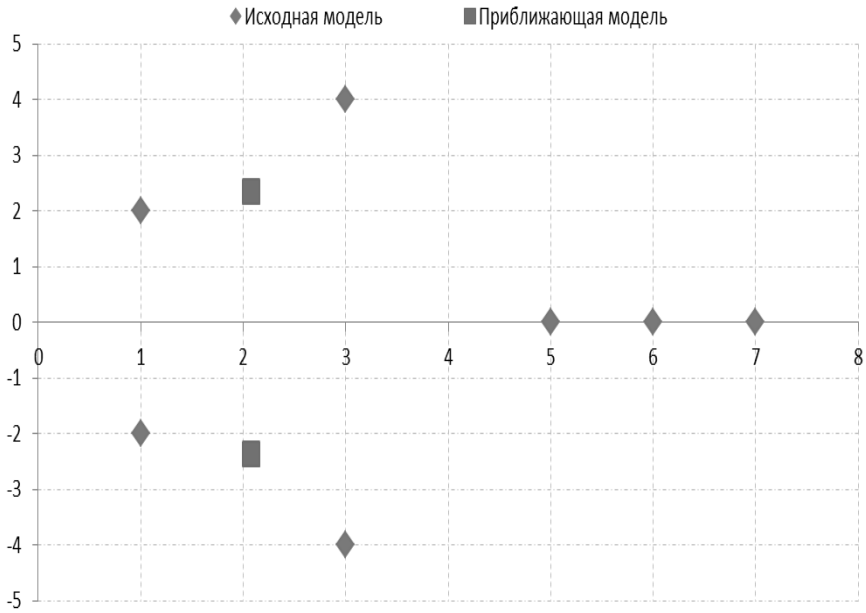


Рис. 3. Расположение параметров λ и $\alpha \pm i\beta$ для приближающей модели второго порядка с двумя комплексными корнями

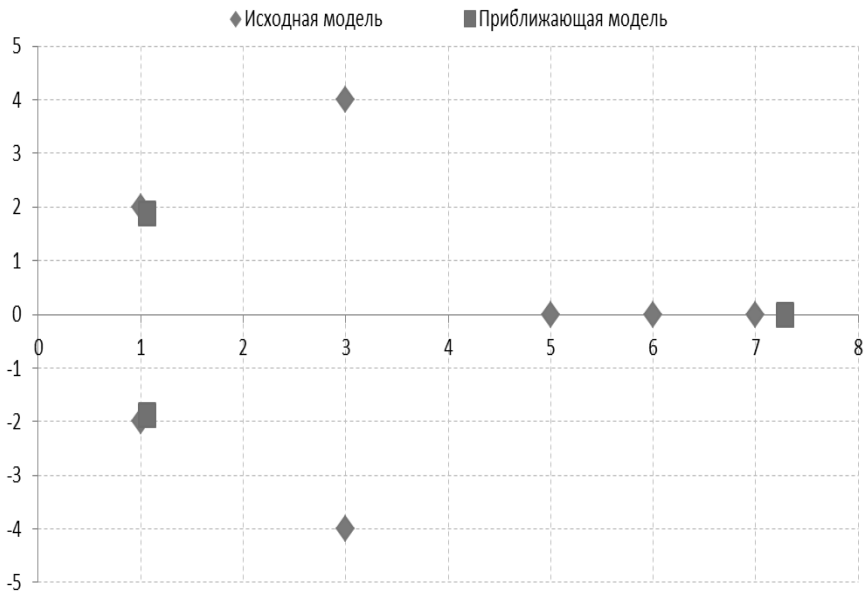


Рис. 4. Расположение параметров λ и $\alpha \pm i\beta$ для приближающей модели третьего порядка с двумя комплексными корнями

В процессе работы алгоритма на каждой итерации необходимо рассчитывать $2N$ значений целевой функции (значение функции от пробного вектора и соответствующего вектора в старом поколении). Таким образом, общее число расчетов функции можно считать равным $2NP$. При работе на

кластерном суперкомпьютере с использованием 20 ядер при идентификации чисто действительной системы четвертого порядка время работы алгоритма составило около 60 минут. Отсюда можно сделать вывод о высоких требованиях к ресурсам вычислительной техники, на которой будет выполняться идентификация по алгоритму, предложенному в данной статье. Для сравнения: при использовании одного ядра время работы той же идентификации составило бы 20 часов, а при попытке запуска алгоритма на персональном компьютере — более 2000 часов.

Выводы

Анализ особенностей целевой функции привел к выводу, что классические численные методы оптимизации будут малоэффективными, поэтому был выбран генетический алгоритм – метод дифференциальной эволюции, а также его модификация с использованием технологии параллельных вычислений на кластерном суперкомпьютере. Проверка работы алгоритма на тестовых примерах показала его высокое качество. В случае параметрической идентификации погрешность по параметрам была ничтожно мала, в случае структурной идентификации были получены приемлемые результаты, которые указывают на устойчивую работу алгоритма. Время работы алгоритма идентификации наиболее сложной из рассмотренных в эксперименте моделей (порядка трех с двумя комплексными корнями) составило 60 минут при использовании 20 ядер суперкомпьютера.

1. Сейдж Э.П. Идентификация систем управления / Э.П. Сейдж, Дж.Л. Мелса, А.С. Мандель ; Пер. с англ. В.А. Лотоцкого, А.С. Манделя. — М. : Наука, 1974. — 248 с.
Sage A.P., Mense J.L. *System Identification*. Moscow: Nauka, 1974. 248 p.
2. Льюнг Л. Идентификация систем. Теория для пользователя : Пер. с англ. / Л. Льюнг ; — М. : Наука, 1991. — 432 с.
Ljung L. *System Identification: Theory for the User*. Moscow: Nauka, 1991. 432 p.
3. О структурно-параметрической идентификации в условиях ограниченной неопределенности и аппроксимирующих моделях многомерных систем / В.Ф. Губарев, А.В. Гуммель, А.А. Кришталь, В.Ю. Олес // Проблемы управления и информатики. — 2011. — № 3. — С. 42–56.
Gubarev V.F., Gummel A.V., Kryshstal A.A., Oles V.Yu. On the Structural and Parametric Identification Under the Limited Uncertainty and Approximating Models of Multidimensional Systems // *Problems of Control and Informatics*, 2011, no. 3, pp. 42–56.
4. Терновский В.В. Об использовании прямых вариационных методов в прикладных задачах / В.В. Терновский, М.М. Хапаев // ДАН. — 2011. — Т. 436. — № 4. — С. 459–461.
Ternovskii V.V., Khapaev M.M. On the use of direct variational methods in applications. *Doklady Akademii Nauk*, 2011, vol. 436, no. 4, pp. 459–461.
5. Rainer S., Price K. Differential Evolution — A Simple and Efficient Adaptive Scheme for Global Optimization over Continuous Spaces // *Journal Of Global Optimization*, 1997, no. 11, P. 341–359.

Получено 13.05.2013