УДК 621.3.019.3

В.Н. ЯРОШЕНКО*, Н.В. СЕСПЕДЕС ГАРСИЯ*, Ар.А. МУХА*

К ВОПРОСУ ОБ ОПРЕДЕЛЕНИИ ВЕСОВ МЕТРИК НЕКОТОРОГО АТРИБУТА ГАРАНТОСПОСОБНОСТИ СИСТЕМЫ

*Институт проблем математических машин и систем НАН Украины, Киев, Украина

Анотація. *Розглянуто питання аналітичної оцінки вагів метрик гарантоздатності систем. Розвивається базовий підхід до комплексної кількісної оцінки рівня гарантоздатності комп'ютерних систем.*
Ключові слова: *атрибутивна модель гарантоздатності, атрибути, метрики, нормовані оцінки, ваги.*

Аннотация. *Рассмотрены вопросы аналитической оценки весов метрик атрибутов гарантоспособности систем. Развивается базовый подход к комплексной количественной оценке уровня гарантоспособности компьютерных систем.*
Ключевые слова: *атрибутивная модель гарантоспособности, атрибуты, метрики, нормированные оценки, веса.*

Abstract. *The questions of analytical estimation of metric weights of systems dependability were considered. A basic approach to complex numerical estimation of the degree of systems of computer dependability was developed.*
Keywords: *attributive model of dependability, attributes, metrics, normalized estimations, weights.*

1. Введение

В [1] в качестве обобщенного показателя предлагается представить линейный функционал, составляющими которого были бы нормированные значения атрибутов и метрик с соответствующими весовыми коэффициентами. Выбор величин весовых коэффициентов при этом зависел бы от особенностей применения каждой конкретной системы. В тех случаях, когда метрики не имеют аналитических оценок, их измерение предлагается осуществлять экспертными методами.

В этой же статье [1] на основе количественных оценок метрик предлагается вычислять количественные оценки атрибутов и далее через них вычислять оценки достигнутого уровня гарантоспособности исследуемой системы для различных вариантов ее исполнения. В качестве иллюстрации, представленной ниже, подход посвящен анализу линейного функционала, рассматривающего атрибут как функцию составляющих его трех метрик. Считаем, что с целью минимизации аналитических выкладок общность предлагаемого подхода никак не пострадает, если ограничиться рассмотрением только трех метрик. В рассматриваемом подходе фигурируют метрики, оцениваемые как аналитическими выражениями, так и на основе метода экспертных оценок [2].

2. Установление взаимосвязи метрик и их весов

Пусть имеется система с конечным числом атрибутов, и пусть некоторый ее атрибут описывается тремя метриками с оценками A_1, A_2, A_3.

Предполагается, что, аналогично предложению в [1], система может быть представлена некоторым показателем в виде линейного функционала

$$\beta_1 A_1 + \beta_2 A_2 + \beta_3 A_3, \qquad (1)$$

где $A_i\,(i = 1,2,3)$ – оценки метрик с соответствующими неизвестными весами β_i.

Утверждение 1. Веса β_i являются некоторыми функциями от A_1, A_2, A_3.

Утверждение 2. Метрики $A_i (i = 1,2,3)$ представляются своими нормированными значениями относительно значений, установленных в спецификации (или в соответствующих нормативных документах).

2.1. Предварительные рассуждения и изложение предлагаемого подхода

Очевидно, что выражение

$$\beta_i A_i /(\beta_1 A_1 + \beta_2 A_2 + \beta_3 A_3) \ \left(i = 1, 2, 3\right) \tag{2}$$

можно рассматривать как долю (вес) слагаемого $\beta_i A_i$ в сумме $\beta_1 A_1 + \beta_2 A_2 + \beta_3 A_3$.

Утверждение 3. Веса β_i являются численным отражением результата взаимодействия процессов функционирования системы, описываемых метриками $A_i (i = 1,2,3)$.

Утверждение 4. Каждая из метрик A_i подвергается влиянию остальных метрик, а степень этого взаимовлияния зависит от количественных оценок, представляющих метрики.

В этой связи в качестве примера рассмотрим отношение $A_1 /(A_2 + A_3)$. При уменьшении суммы $A_2 + A_3$ (суммы оставшихся по отношению к A_1 метрик) можно априори предполагать, что влияние величины A_1 на вклад в сумму (1) величины $\beta_i A_i$ будет возрастать, а при увеличении суммы $A_2 + A_3$ убывать. Аналогичное рассуждение применимо к отношениям $A_2 /(A_1 + A_3)$ и $A_3 /(A_1 + A_2)$.

Такие интуитивные рассуждения основываются на том, что сумма относительных вкладов $\beta_i A_i / \sum_{i=1}^{3} \beta_i A_i$ величин $\beta_i A_i$ в их сумму $\sum_{i=1}^{3} \beta_i A_i$ равна 1, то есть

$$(\beta_1 A_1 + \beta_2 A_2 + \beta_3 A_3) / \sum_{i=1}^{3} \beta_i A_i = 1, \tag{3}$$

и по прагматическим соображениям левую часть равенства (3) можно приравнять некоторому выражению, также равному 1, но так, чтобы по возможности соблюдалась логическая справедливость рассуждений.

В связи со сказанным упомянутое выражение можно получить следующим образом.

Сумму отношений $\frac{A_1}{A_2 + A_3}$, $\frac{A_2}{A_1 + A_3}$, $\frac{A_3}{A_1 + A_2}$ можно считать суммарной численной характеристикой взаимовлияния метрик друг на друга, а отношение

$$\frac{A_1/(A_2 + A_3)}{A_1/(A_2 + A_3) + A_2/(A_1 + A_3) + A_3/(A_1 + A_2)} = \frac{A_1/(A_2 + A_3)}{M},$$

где M – обозначение знаменателя левой части равенства, можно называть весом влияния метрики A_1.

Аналогично $[A_2 / (A_1 + A_3)]/M$ – это вес влияния метрики A_2, а $[A_3 / (A_1 + A_2)]/M$ – вес влияния метрики A_3. Непосредственно видно, что сумма определяемых таким образом весов влияния этих трех метрик равна 1. Ниже веса влияния представляются в другом виде для их дальнейшего использования.

Итак, после очевидных алгебраических преобразований, приводящих к отсутствию в числителях и знаменателях выражений операций деления, получаем новые выражения упомянутых весов, обозначаемых как $B_i(i=1,2,3)$:

$$B_1=\frac{A_1(A_1+A_2)(A_1+A_3)}{A_1(A_1+A_2)(A_1+A_3)+A_2(A_2+A_1)(A_2+A_3)+A_3(A_3+A_1)(A_3+A_2)}= \\ =\frac{A_1(A_1+A_2)(A_1+A_3)}{S_A}, \tag{4}$$

где S_A – обозначение знаменателя первого члена цепочки равенства (4).

$$B_2=\frac{A_2(A_2+A_1)(A_2+A_3)}{S_A}, \tag{5}$$

$$B_3=\frac{A_3(A_3+A_1)(A_3+A_2)}{S_A}. \tag{6}$$

Из формул (4–6) видно, что сумма весов влияния метрик $\sum_{i=1}^{3}B_i=1$.

2.2. Гипотеза о зависимости соотношений вкладов $\beta_i A_i$ в их сумму $\sum_{i=1}^{3}\beta_i A_i$ и соответствующих B_i весов влияния метрик $A_i(i=1,2,3)$

Исходя из предположения, что соотношение вкладов величин $\beta_i A_i$ в сумму $\sum_{i=1}^{3}\beta_i A_i$ пропорционально соотношению весов влияния соответствующих метрик A_i, считаем, что, с учетом формул (4–6), справедливы равенства:

$$\frac{\beta_2 A_2/\sum_{i=1}^{3}\beta_i A_i}{\beta_1 A_1/\sum_{i=1}^{3}\beta_i A_i}=\frac{B_2}{B_1}=\frac{A_2(A_2+A_1)(A_2+A_3)/S_A}{A_1(A_1+A_2)(A_1+A_3)/S_A}, \tag{7}$$

$$\frac{\beta_3 A_3/\sum_{i=1}^{3}\beta_i A_i}{\beta_1 A_1/\sum_{i=1}^{3}\beta_i A_i}=\frac{B_3}{B_1}=\frac{A_3(A_3+A_1)(A_3+A_2)/S_A}{A_1(A_1+A_2)(A_1+A_3)/S_A}, \tag{8}$$

$$\frac{\beta_3 A_3/\sum_{i=1}^{3}\beta_i A_i}{\beta_2 A_2/\sum_{i=1}^{3}\beta_i A_i}=\frac{B_3}{B_2}=\frac{A_3(A_3+A_1)(A_3+A_2)/S_A}{A_2(A_2+A_1)(A_2+A_3)/S_A}. \tag{9}$$

После очевидных сокращений в числителях и знаменателях выражений в левых и правых частях цепочек равенств (7–9) получаем зависимости между искомыми весами $\beta_i(i=1,2,3)$ в следующем виде:

$$\beta_2=\frac{A_2+A_3}{A_1+A_3}\beta_1;\quad \beta_3=\frac{A_3+A_2}{A_1+A_2}\beta_1. \tag{10}$$

Зависимость $\beta_3=\frac{A_3+A_1}{A_2+A_1}\beta_2$ является очевидным следствием зависимостей из (10).

При получении выражений для искомых весов $\beta_i\,(i=1,2,3)$ воспользуемся предположением, что выполняется условие $\sum_{i-1}^{3}\beta_i=1$.

С учетом этого условия, а также выражений из (10), справедлива следующая цепочка равенств:

$$\beta_1+\frac{A_2+A_3}{A_1+A_3}\beta_1+\frac{A_3+A_2}{A_1+A_2}\beta_1=\beta_1\frac{(A_1+A_2)(A_1+A_3)+(A_2+A_1)(A_2+A_3)+(A_3+A_1)(A_3+A_2)}{(A_1+A_2)(A_1+A_3)}=1,$$

откуда

$$\beta_1=\frac{(A_1+A_2)(A_1+A_3)}{(A_1+A_2)(A_1+A_3)+(A_2+A_1)(A_2+A_3)+(A_3+A_1)(A_3+A_2)}=\frac{(A_1+A_2)(A_1+A_3)}{S_\beta}, \tag{11}$$

где S_β – обозначение знаменателя выражения из левой части цепочки (11).

С учетом зависимостей, представленных в (10), и равенства (11), получаем формулы для β_2 и β_3:

$$\beta_2=\frac{(A_2+A_1)(A_2+A_3)}{S_\beta};\quad \beta_3=\frac{(A_3+A_1)(A_3+A_2)}{S_\beta}. \tag{12}$$

Нетрудно видеть, что $\sum_{i=1}^{3}\beta_i=1$, так как сумма числителей дробей, представляющих выражения для $\beta_i\,(i=1,2,3)$, равна общему знаменателю этих дробей, то есть величине S_β.

2.3. Проверка корректности рассмотренного подхода

Выше было показано, что гипотеза о пропорциональности отношений вкладов любых двух метрик в сумму $\sum_{i=1}^{3}\beta_i A_i$ и отношений весов влияния этих метрик правомерна.

Используя полученные выше формулы, можно доказать, что имеет место более сильный факт, из которого вытекает упомянутая пропорциональность.

Факт состоит в том, что вклад $\beta_i A_i\,(i=1,2,3)$ в сумму $\sum_{i=1}^{3}\beta_i A_i$ равен весу влияния B_i соответствующей метрики A_i.

Докажем справедливость этого факта относительно метрики A_1, то есть что имеет место равенство $\frac{\beta_1 A_1}{\sum_{I=1}^{3}\beta_I A_I}=B_1$. Из формулы (11) следует, что

$$\beta_1 A_1=\frac{A_1(A_1+A_2)(A_1+A_3)}{S_\beta}, \tag{13}$$

а используя формулы (10–12), получаем следующее равенство:

$$\sum_{i-1}^{3}\beta_i A_i = \frac{A_1(A_1+A_2)(A_1+A_3)}{S_\beta}+\frac{A_2(A_2+A_1)(A_2+A_3)}{S_\beta}+\frac{A_3(A_3+A_1)(A_3+A_2)}{S_\beta}. \qquad (14)$$

Теперь видно, что отношение правых частей равенств (13) и (14) равно выражению, представляющему в (4) величину B_1. Итак, равенство $\frac{\beta_1 A_1}{\sum_{i=1}^{3}\beta_i A_i}=B_1$ справедливо.

Совершенно так же показывается, что имеют место равенства $\frac{\beta_2 A_2}{\sum_{i=1}^{3}\beta_i A_i}=B_2$ и $\frac{\beta_3 A_3}{\sum_{i=1}^{3}\beta_i A_i}=B_3$, где B_2 и B_3 – соответственно веса влияния метрик A_2 и A_3, выражаемые формулами (5, 6).

Получение формул (10–12) для весов β_i дает возможность представить этот функционал (сумму $\sum_{i=1}^{3}\beta_i A_i$) в явном виде, зависящем только от переменных – метрик $A_i\left(i=1,2,3\right)$.

Это представление имеет следующий вид:

$$\beta_1 A_1+\beta_2 A_2+\beta_3 A_3=\frac{A_1(A_1+A_2)(A_1+A_3)+A_2(A_2+A_1)(A_2+A_3)+A_3(A_3+A_1)(A_3+A_2)}{(A_1+A_2)(A_1+A_3)+(A_2+A_1)(A_2+A_3+(A_3+A_1)(A_3+A_2)}. \qquad (15)$$

3. Учет влияния неблагоприятной метрики на сумму $\sum_{i=1}^{3}\beta_i A_i$

Полезно отметить следующее. В изложенном подходе все три метрики подразумеваются благоприятными [2].

Определение 1. Благоприятной метрикой будем называть метрику, увеличение численного (нормированного) значения которой способствует повышению уровня гарантоспособности системы.

Примером такой метрики может быть, например, вероятность безотказной работы системы в течение некоторого заданного промежутка времени.

Определение 2. Неблагоприятной метрикой будем называть такую метрику, увеличение численного (нормированного) значения которой приводит к снижению уровня гарантоспособности системы.

В качестве примера такой метрики может послужить метрика – среднее время восстановления работоспособности системы.

В представленном выше подходе каждая из трех благоприятных метрик $A_i\left(i=1,2,3\right)$ атрибута вносила соответствующий положительный вклад $\beta_i A_i (i=1, 2, 3)$ в сумму $\sum_{i=1}^{3}\beta_i A_i$. Как изменилась бы эта сумма, если бы некоторые метрики атрибута оказались неблагоприятными?

Пусть атрибут характеризуется двумя благоприятными метриками A_1, A_2 и одной неблагоприятной метрикой A_3. По формулам (11) и (12) определяются величины $\beta_i (i=1,2,3)$, а значит, и $\beta_i A_i (i=1, 2, 3)$. Правомерно полагать, что теперь в изначально предлагаемом виде выражения $\sum_{i=1}^{3}\beta_i A_i$, слагаемые $\beta_1 A_1$ и $\beta_2 A_2$ будут положительными, а слагаемое $\beta_3 A_3$, соответствующее неблагоприятной метрике A_3, должно сменить знак на противоположный, то есть превратиться в $-\beta_3 A_3$.

При этом явный вид выражения $\sum_{i=1}^{3}\beta_i A_i$ будет таким:

$$\beta_1 A_1 + \beta_2 A_2 - \beta_3 A_3, \tag{16}$$

где $\beta_i A_i (i = 1, 2, 3)$ – положительные числа.

Корректность изложенного подхода позволит получать явные выражения для аналогов суммы $\sum_{i=1}^{3}\beta_i A_i$ в случаях атрибутов с числом метрик, большим трех.

Рассмотрим несколько примеров по определению численных значений величин $\beta_i (i = 1, 2, 3)$ и $\beta_1 A_1 + \beta_2 A_2 + \beta_3 A_3$.

Пример 1. Исходные данные: $A_1 = 1,2; A_2 = 1,0; A_3 = 0,8$.

По формулам (11) и (12) вычисляем

$$\beta_1 = \frac{(1,2+1)(1,2+0,8)}{(1,2+1)(1,2+0,8)+(1+1,2)(1+0,8)+(0,8+1,2)(0,8+1)} = \frac{4,4}{11,96} = 0,3679,$$

$$\beta_2 = \frac{(1+1,2)(1+0,8)}{11,96} = \frac{3,96}{11,96} = 0,3311,$$

$$\beta_3 = \frac{(0,8+1,2)(0,8+1)}{1196} = \frac{3,6}{11,96} = 0,3010.$$

Проверка показывает, что $\sum_{i=1}^{3}\beta_i = 0,9999 \approx 1$. Расчет численного значения суммы $\sum_{i=1}^{3}\beta_i A_i$ дает результат

$$\beta_1 A_1 + \beta_2 A_2 + \beta_3 A_3 = 0,3679\cdot 1,2 + 0,3311\cdot 1 + 0,3010\cdot 0,8 = 1,01338.$$

Пример 2. Исходные данные: $A_1 = 0,9; A_2 = 1,25; A_3 = 1,1$.

Использование тех же формул (11) и (12) позволяет вычислить

$$\beta_1 = \frac{(0,9+1,25)(0,9+1,1)}{(0,9+1,25)(0,9+1,1)+(1,25+0,9)(1,25+1,1)+(1,1+0,9)(1,1+1,25)} = \frac{4,3}{14,0525} = 0,3060,$$

$$\beta_2 = \frac{(1,25+0,9)(1,25+1,1)}{14,0525} = \frac{5,0525}{14,0525} = 0,3595,$$

$$\beta_3 = \frac{(1,1+0,9)(1,1+1,25)}{14,0525} = \frac{4,7}{14,0525} = 0,3345.$$

Проверочный расчет показывает, что $\sum_{i=1}^{3}\beta_i = 1$. Сумма $\sum_{i=1}^{3}\beta_i A_i$ дает следующий результат:

$$\beta_1 A_1 + \beta_2 A_2 + \beta_3 A_3 = 0,3060\cdot 0,9 + 0,3595\cdot 1,25 + 0,3345\cdot 1,1 = 1,09273.$$

Пример 3. Исходные данные: $A_1 = 1{,}0; A_2 = 0{,}95; A_3 = 1{,}15$.

Использование упомянутых формул (11, 12) приводит к следующим расчетам:

$$\beta_1 = \frac{(1+0{,}95)(1+1{,}15)}{(1+0{,}95)(1+1{,}15)+(0{,}95+1)(0{,}95+1{,}15)+(1{,}15+1)(1{,}15+0{,}95)} = \frac{4{,}1925}{12{,}8025} = 0{,}32747,$$

$$\beta_2 = \frac{(0{,}95+1)(0{,}95+1{,}15)}{12{,}8025} = \frac{4.095}{12{,}8025} = 0{,}31986,$$

$$\beta_3 = \frac{(1{,}15+1)(1{,}15+0{,}95)}{12{,}8025} = \frac{4{,}515}{12{,}8025} = 0{,}3527.$$

Проверка показывает, что $\sum_{i=1}^{3} \beta_i = 0{,}99999$, то есть близка к 1. Расчет суммы $\sum_{i=1}^{3} \beta_i A_i$ приводит к следующему результату:

$$\beta_1 A_1 + \beta_2 A_2 + \beta_3 A_3 = 0{,}32747 \cdot 1 + 0{,}31986 \cdot 0{,}95 + 0{,}3527 \cdot 1{,}15 = 1{,}036942.$$

Нетрудно видеть, что веса метрик β_i отслеживают долевое участие каждой метрики в обобщенном показателе уровня исполнения атрибута в целом.

4. Выводы

Предлагаемый подход позволяет получать выражения, аналогичные (15), и в тех случаях, когда атрибуты описываются числом метрик, большим трех. Это дает возможность вычислять количественные оценки атрибутов и далее через них достигнутый уровень гарантоспособности анализируемой системы с произвольным набором атрибутов и метрик.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Федухин А.В. Атрибуты и метрики гарантоспособных компьютерных систем / А.В. Федухин, Н.В. Сеспедес Гарсия // Математичні машини і системи. – 2013. – № 2. – С. 195 – 201.
2. К вопросу о сравнительной оценке гарантоспособных систем / А.В. Федухин, В.Н. Ярошенко, А.И. Сухомлин [и др.] // Математичні машини і системи. – 2014. – № 1. – С. 185 – 194.

Стаття надійшла до редакції 04.08.2014