

С.В. СИРИК*

О ВЫБОРЕ СТАБИЛИЗИРУЮЩИХ ПАРАМЕТРОВ В КОНЕЧНОЭЛЕМЕНТНОМ МЕТОДЕ ПЕТРОВА-ГАЛЕРКИНА ПРИ РЕШЕНИИ ЗАДАЧ КОНВЕКЦИИ-ДИФфуЗИИ

* Национальный технический университет Украины "КПИ", Киев, Украина

Анотація. Розглянуто питання вибору та динамічного (адаптивного) налаштування стабілізуючих параметрів вагових функцій у скінченноелементному методі Петрова-Гальоркіна при інтегруванні рівнянь конвективно-дифузійного типу. На ряді обчислювальних прикладів продемонстровано ефективність відповідного методу Петрова-Гальоркіна.

Ключові слова: метод Петрова-Гальоркіна, метод скінченних елементів, задачі конвекції-дифузії, вагові функції, стабілізуючі параметри, стабілізовані методи.

Аннотация. Рассмотрены вопросы выбора и динамической (адаптивной) настройки стабилизирующих параметров весовых функций в конечноэлементном методе Петрова-Галеркина при интегрировании уравнений конвективно-диффузионного типа. На ряде вычислительных примеров продемонстрирована эффективность соответствующего метода Петрова-Галеркина.

Ключевые слова: метод Петрова-Галеркина, метод конечных элементов, задачи конвекции-диффузии, весовые функции, стабилизирующие параметры, стабилизированные методы.

Abstract. The choice and dynamical tuning of stabilization parameters of the weighting functions in finite-element Petrov-Galerkin method for solving convection-diffusion problems are considered. The efficiency of the corresponding Petrov-Galerkin method is illustrated and confirmed by a number of computational examples.

Keywords: Petrov-Galerkin method, finite element method, convection-diffusion problems, weighting (test) functions, stabilization parameters, stabilized methods.

1. Введение

В настоящее время метод Петрова-Галеркина (МПГ) в форме метода конечных элементов (МКЭ) является одним из наиболее универсальных методов построения численных схем для решения задач математической физики [1]. При использовании МПГ для расчета задач с доминированием конвективных процессов ключевым вопросом является корректный выбор весовых функций (ВФ), который предотвращал бы появление в численном решении нефизических осцилляций и неустойчивостей (обеспечил стабилизацию [1] численного решения) при сохранении приемлемой его точности. В работе [2] предложены структуры кусочно-полиномиальных ВФ МПГ для решения двумерных задач конвекции-диффузии (КД), а в работе [3] – для интегрирования задач с тремя пространственными переменными. Для настройки формы функций используются стабилизирующие параметры (СП), связанные с ребрами сетки разбиения. Анализ аппроксимации, устойчивости и сходимости для данных ВФ [2, 3] (а также их кусочно-степенных обобщений) для нестационарных одномерных случаев проведен в работе [4]. Данные ВФ впоследствии применялись для численного решения различных нестационарных задач КД (в том числе и в тех случаях, когда скорость в конвективном слагаемом с течением времени резко изменяется как по величине, так и по направлению), а также нелинейных уравнений Бюргерса [5, 6] и уравнений магнитной гидродинамики [7]; в цитированных работах также были предложены методы (способы) выбора СП, реализующие идею адаптивности (возможности подстраивать их под эволюционирующее во времени решение для обеспечения устойчивости счета).

В настоящей статье результаты работ [5–7], касающиеся выбора СП, получили дальнейшее развитие, и на примерах (считающихся "тяжелыми" для численного решения

по причине наличия в них доминирующих конвективных процессов, пограничных или внутренних слоев, решений солитонного типа и прочих особенностей, доставляющих осложнения при численном счете) показано эффективность ("робастность" [1]) предложенных вариантов выбора СП в плане точности и устойчивости численного решения.

2. Постановка задачи

Будем считать, что в качестве базисных функций $\{N_i(\vec{x})\}$ (каждая функция $N_i(\vec{x})$ ассоциирована с соответствующим узлом \vec{x}_i) используются кусочно-линейные финитные функции [1–7]. В качестве ВФ $W_i(\vec{x})$ используем функции работ [2–4]. Обозначим через $\Omega(i)$ многоугольник, образованный объединением тех элементов Ω_k , для которых узел i является одной из вершин. Множество $\Omega(i)$ является носителем для функции N_i , а также для функции W_i , которая определяется как [2–4]:

$$W_i(\vec{x}) = N_i(\vec{x}) + \sum_{k \in K_i} \alpha_{i,k} W_{(i,k)}(\vec{x}), \quad (1)$$

где K_i – множество номеров узлов k , каждый из которых соединен одним ребром с узлом i , $\alpha_{i,k}$ – СП, соответствующий ребру (i, k) и позволяющий регулировать изгиб ВФ на нем. Подробная конструкция функций $W_{(i,k)}$, а также всей ВФ W_i , приведена в [2, 3]. Целью данной работы является выбор совокупности СП $\{\alpha_{i,k}\}$ и их динамическая настройка, при котором бы обеспечивалась стабилизация (устранение нефизических осцилляций) численного решения при сохранении приемлемой точности получаемого решения.

3. Динамическая настройка стабилизирующих параметров

При интегрировании полудискретных аппроксимаций [1–7] в виде системы обыкновенных дифференциальных уравнений (СОДУ), построенной МПГ для аппроксимации уравнений КД, на $n+1$ -м шаге интегрирования предлагается выбирать СП $\{\alpha_{i,k}\}$ ВФ $W_i(\vec{x})$ в виде

$$\alpha_{i,k}^{(n+1)} = \theta_{i,k}^{(n+1)} F_{\beta}^{(n+1)}(\alpha(\gamma_{i,k}^{(n)})), \quad (2)$$

где $\beta^{(n+1)}$ – некоторое фиксированное неотрицательное число (зависящее от номера шага),

функция $F_{\beta}(z) \equiv \begin{cases} \beta z, & |\beta z| \leq 1 \\ \text{sign } z, & |\beta z| > 1 \end{cases}$, функция $\alpha(\gamma) \equiv \coth(\gamma) - 1/\gamma$ (при $\gamma = 0$ полагаем, что

$\alpha(0) \equiv \lim_{\gamma \rightarrow 0} (\coth(\gamma) - 1/\gamma) = 0$), число $\gamma_{i,k}^{(n)} = (\vec{u}^{(n)} \cdot \vec{h}_{i,k}) / (2\tilde{\kappa}_i^{(n+1)})$, $\vec{h}_{i,k} \equiv \vec{x}_k - \vec{x}_i$, $\vec{u}^{(n)}$ – вектор

скорости (векторная величина, которая умножается скалярно на градиент неизвестной искомой величины в рассматриваемом уравнении типа КД) в i -м узле на предыдущем n -м шаге интегрирования СОДУ (в качестве $\vec{u}^{(n)}$ также можно взять взвешенное среднее данных векторов в узлах i и k [7]), $\tilde{\kappa}_i^{(n+1)}$ – коэффициент, регулирующий величину вводимой в расчетную схему искусственной вязкости относительно i -го узла на $n+1$ -м шаге интегрирования (соответственно, в силу определения $\alpha(\gamma)$, чем меньше значение $\tilde{\kappa}_i^{(n+1)}$, тем большей будет искусственная вязкость). При изотропном (диагональном) диффузионном тензоре, в большинстве случаев, как показывают расчеты для устранения нефизических осцилляций, выбор данного коэффициента вязкости в виде κ (где κ – диффузионный ко-

эффицент при диффузионных членах решаемого уравнения КД) оказывается вполне достаточным. Параметр $\theta_{i,k}^{(n+1)}$ – некоторая константа, увеличение или уменьшение которой приводит соответственно к увеличению или уменьшению вводимой в численную схему искусственной диссипации. В большинстве случаев для нужд практических расчетов вполне достаточно выбирать ее из промежутка $[0; 2]$. Увеличение этой константы может понадобиться при возникновении в решении больших градиентов и нефизических осцилляций в соответствующих тонких слоях (поскольку увеличение искусственной диссипации приводит к "монотонизации" численных схем и сглаживанию неоднородностей, разрывов и скачков). Заметим, что при $\theta_{i,k}^{(n+1)} = 0$ по определению получаем классический МКЭ Галлеркина. Положив в (2) $\beta^{(n+1)} = +\infty$ и $\beta^{(n+1)} = 1$, получим соответственно

$$\alpha_{i,k}^{(n+1)} = \theta_{i,k}^{(n+1)} \operatorname{sign}(\alpha(\gamma_{i,k}^{(n)})) = \theta_{i,k}^{(n+1)} \operatorname{sign}(\gamma_{i,k}^{(n)}), \quad (3)$$

$$\alpha_{i,k}^{(n+1)} = \theta_{i,k}^{(n+1)} \alpha(\gamma_{i,k}^{(n)}). \quad (4)$$

Отметим, что выражения (2)-(4) для СП пригодны не только при интегрировании полудискретных аппроксимаций, но без изменений могут быть использованы при нахождении решений разностных схем (при переходе от предыдущего n -го временного слоя схемы на текущий $n+1$ -й). Естественно, при интегрировании систем уравнений настройка СП в ВФ для каждого уравнения системы осуществляется индивидуально. Для определения СП при решении стационарных задач используются те же формулы (2)-(4) (однако, теперь они априори являются независимыми от n). При $\theta_{i,k}^{(n+1)} = 1$ формула (4) дает выражение, которое для стационарного линейного одномерного уравнения КД с постоянными коэффициентами обеспечивает совпадение численного и точного решений в узлах равномерной сетки (то есть, получаем схему Ильина-Аллена-Саусвелла [1]). Дополнительные замечания, касающиеся выбора СП, упрощения их вычисления, а также стабилизации решений в окрестностях фронтов ударных волн приведены в [5] (см. замечания 1-5 в разделе 2 работы [5]).

4. Численное моделирование

Пример 1. Рассмотрим граничную задачу для стационарного двухмерного уравнения КД $\vec{v} \cdot \nabla u = \kappa \Delta u$ (тут \vec{v} – вектор скорости, κ – диффузионный коэффициент) в единичном квадрате Ω (центр квадрата находится в начале координат). Для упрощения записи будем обозначать $x \equiv x_1$, $y \equiv x_2$. Поле скоростей имеет вид $\vec{v}(x, y) = (-y; x)^T$ (вращение против часовой стрелки), $\kappa = 10^{-8}$. На границе квадрата Ω решение u равно нулю, а внутри квадрата, на прямой $x=0$, $-1/2 \leq y \leq 0$ имеется разрез, на котором $u = u(0, y) = w(y)$, где $w(y) = (\cos(4\pi y + \pi) + 1)/2$. Постановка граничных условий и линия разреза изображены на рис. 1 [8]. На рис. 2 показан график функции $w(y)$ при $-1/2 \leq y \leq 0$. На рис. 3 показано решение данной задачи [8] – "воронка", которая образуется при вращении графика функции $w(y)$ против часовой стрелки относительно начала координат. Данная задача использовалась в [8] для тестирования точности и работоспособности стабилизированных методов SUPG, GLS, USFEM и RFB (однако, в [8] было взято $\kappa = 10^{-6}$). Поскольку процесс конвекции в задаче является доминирующим над процессом диффузии (κ – малое), то при вращении графика $w(y)$ его высота должна оставаться практически такой же, какой она была на разрезе (то есть график не "проседает" под действием диффузии, распределенной в данном случае изотропно) [8]. Это, в свою очередь, для оценки точности и качества чис-

ленного метода позволяет использовать максимальную разницу между высотой $w(y)$ на линии разреза и высотой графика вычисленного решения на вертикальной линии узлов, находящихся слева от линии разреза на ближайшем расстоянии (для расчетов будем использовать сетку с прямоугольными треугольниками, ориентированными вдоль координатных осей). Обозначим данную разницу в текущей задаче через err_{\max} . Отметим, что в силу особенностей данной задачи ее можно рассматривать как "стресс-тест" для проверки того, вводит ли численный метод избыточную диффузию поперек потока [1, 6, 8]. В случае утвердительного ответа при полном повороте вокруг начала координат график под воздействием диффузии будет "разглажен", а величина err_{\max} , соответственно, будет большой [8]. Таким образом, данная задача предъявляет высокие требования к численным методам (в особенности, к их диссипативности) и считается весьма тяжелой для численного решения [8].

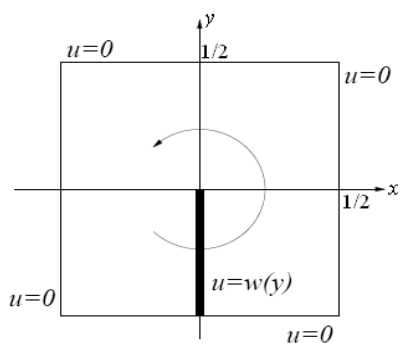


Рис. 1. Постановка граничных условий (пример 1)

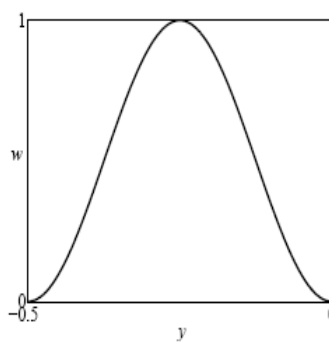


Рис. 2. График $w = w(y)$.

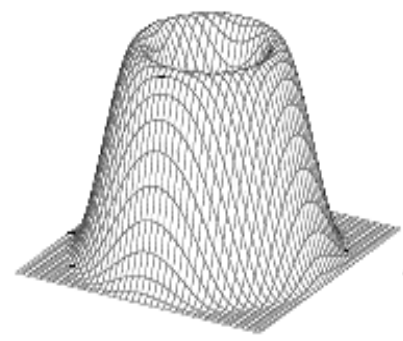


Рис. 3. Пространственный профиль решения (пример 1)

Для метода SUPG используем поэлементную стабилизацию [1, 3] с СП $\{\alpha_\tau\}$ вида

$$\alpha_\tau = h_\tau \alpha(Pe_\tau) / (2 \|\vec{v}\|), \quad (5)$$

где h_τ – диаметр элемента T_τ , $Pe_\tau = \|\vec{v}\| h_\tau / (2\kappa)$, $\|\vec{v}\|$ – евклидова норма вектора \vec{v} , вычисленного в центре элемента T_τ [8] по поводу данного выбора параметров. Данный выбор параметров в SUPG является оптимальным для одномерных стационарных задач КД с постоянными коэффициентами (дает решение, совпадающее с точным решением в узлах) и считается также вполне подходящим для большинства задач (в том числе, многомерных) [1, 8, 9] (особенно таких, в которых процесс конвекции не сильно доминирует над остальными процессами). Используем сначала равномерную сетку с треугольными элементами и числом узлов 21×21 . Для МПГ с ВФ (1) (используем здесь, для определенности, кусочно-квадратичные ВФ) и при выборе параметров в виде (4) для всех $\theta_{i,k} = 1/10$ получаем $err_{\max} \approx 0,097$, а график решения практически совпадает с истинным решением (рис. 3); при возрастании или убывании $\theta_{i,k}$ от данного значения погрешность растет. Так, для $\theta_{i,k} = 0$ (МКЭ Галеркина) получаем $err_{\max} \approx 0,145$ (а в численном решении имеются осцилляции, что противоречит физическому смыслу задачи), при $\theta_{i,k} = 1/2$ будет $err_{\max} \approx 0,109$, а при $\theta_{i,k} = 1$ получим $err_{\max} \approx 0,119$. Метод SUPG с выбором $\{\alpha_\tau\}$ в виде (5) дает $err_{\max} \approx 0,129$. В работе [8] для решения данной задачи также применялся метод SUPG с выбором $\{\alpha_\tau\}$ в виде $\alpha_\tau = \frac{h_\tau}{2 \|\vec{v}\|} \frac{\cos \phi + \sin \phi}{(1 + 3 \cos \phi \sin \phi)} \alpha(Pe_\tau)$, где ϕ – угол (локально-

го) направления потока (относительно декартовой системы координат, см. подробно в [8]). В работе [8] показано, что для стационарных двухмерных задач такой выбор стабилизирующих параметров в методе SUPG обеспечивает наилучшую точность в случае доминирования конвекции (по сравнению не только с другими вариантами выбора параметров, но, как показали расчеты [8], также и с другими стабилизированными методами, в особенности, методами GLS, USFEM и RFB); метод SUPG с таким выбором $\{\alpha_\tau\}$ дает $err_{\max} \approx 0,117$.

Рассмотрим теперь результаты расчетов для равномерной сетки 31×31 узлов. Снова же, при $\theta_{i,k} = 1/10$ получаем минимальную погрешность $err_{\max} \approx 0,043$. При $\theta_{i,k} = 0$ получим $err_{\max} \approx 0,072$, при $\theta_{i,k} = 1/2$ — $err_{\max} \approx 0,046$, при $\theta_{i,k} = 1$ — $err_{\max} \approx 0,048$. Для метода SUPG с (5) получим $err_{\max} \approx 0,05$, а для вышеописанного оптимального выбора параметров $\{\alpha_\tau\}$ — $err_{\max} \approx 0,046$. Для МПГ с ВФ (1), параметрами (4) и $\theta_{i,k} = 1/10$, а также для метода SUPG с вышеописанным оптимальным выбором параметров при использовании разбиения 21×21 узлов число обусловленности (в спектральной норме [10]) ≈ 126 (для разбиения 31×31 узлов приближенно равно 206); для метода SUPG с параметрами (5) и использовании разбиения 21×21 число обусловленности ≈ 210 (для разбиения 31×31 узлов — приближенно равно 352). Таким образом, расчеты свидетельствуют, что предлагаемая в данной работе версия МПГ способна в данной задаче обеспечить большую точность решения по сравнению с другими стабилизированными методами и, кроме того, по сравнению с методом SUPG, формирует систему уравнений с меньшим числом обусловленности и не вводит избыточную диффузию поперек потока (что следует из определения метода SUPG и рассчитанных значений err_{\max}).

Пример 2. Рассмотрим задачу для нестационарного двухмерного уравнения КД:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + v_1 \frac{\partial u}{\partial x_1} + v_2 \frac{\partial u}{\partial x_2} = \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\kappa \frac{\partial u}{\partial x_1} \right) + \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\kappa \frac{\partial u}{\partial x_2} \right) \quad (6)$$

в прямоугольной области, $0 \leq x_i \leq L_i$ ($i = 1, 2$) при постоянном коэффициенте κ и векторе скорости $\vec{v} = (v_1; v_2)^T = \text{const}$. Начальное условие задается в виде $u(0, x_1, x_2) = e^{x_1}$. Граничные условия являются продолжением по непрерывности начальных условий на границу области: $u(t, 0, x_2) = 1$, $u(t, L_1, x_2) = e^{L_1}$, $u(t, x_1, 0) = u(t, x_1, L_2) = e^{x_1}$. Аналитическое решение данной задачи для (6) выражается в виде [2]

$$u(t, x_1, x_2) = e^{at+bx_1+cx_2} \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{H_{ij}}{\Omega_{ij} - a} \left(e^{-at} - e^{-\Omega_{ij}t} \right) \sin \frac{\pi i x_1}{L_1} \sin \frac{\pi j x_2}{L_2} + e^{x_1},$$

где

$$H_{ij} = 4\pi^2 ij \left(\kappa(1-b)^2 + \kappa c^2 + a \right) \frac{1 + e^{L_1(1-b)} (-1)^{i+1}}{L_1^2 (1-b)^2 + \pi^2 i^2} \cdot \frac{1 + e^{-L_2 c} (-1)^{j+1}}{L_2^2 c^2 + \pi^2 j^2},$$

$$\Omega_{ij} = \kappa \left((\pi i / L_1)^2 + (\pi j / L_2)^2 \right).$$

Определим следующие значения параметров задачи: $L_1 = L_2 = 1$, $v_1 = v_2 = 50$, $\kappa = 10^{-1}$. Поскольку $\|\vec{v}\| / \kappa \approx 707$, то в данной задаче конвективные процессы значительно преобладают над процессом диффузии.

Для интегрирования возникающих СОДУ во всех приведенных примерах нестационарных задач использовались стандартный явный метод Рунге-Кутты 4-го порядка [11] и явный адаптивный метод 3-го порядка из работы [12]. Шаг по времени в текущем примере положим $\tau = 10^{-3}$ (начальный для метода из [12]. При этом в настройках выставлялись значения допустимой абсолютной и относительной ошибок [12] интегрирования, также равные 10^{-3}). Отметим, что в приведенных примерах оба метода интегрирования приводят к практически идентичным результатам. Отметим также, что рассмотренные и проанализированные в работе (стабилизированные) методы конечных элементов, а также предлагаемый вариант МПГ, осуществляют дискретизацию задач по пространственным переменным, в результате чего получается СОДУ. Для интегрирования получившихся СОДУ в большинстве случаев оказывается вполне достаточным использования методов низкого порядка [1, 8, 9, 13]. Однако, поскольку погрешности и неустойчивости при применении конечноэлементных методов к решению задач КД обусловлены преимущественно дискретизациями пространственных членов и, следовательно, имеют скорее "пространственное" происхождение, чем "временное" [1–9, 13], то в данном разделе при рассмотрении примеров нестационарных задач для интегрирования СОДУ были использованы методы высоких порядков (3-го и 4-го). Это было сделано для того, чтобы минимизировать влияние дискретизации по временной переменной на окончательный результат и в явном виде выделить преимущество МПГ с ВФ (1) над другими стабилизированными методами пространственной дискретизации, рассмотренными в примерах.

Рассмотрим сначала результаты расчетов на равномерной сетке 15×15 узлов с треугольными элементами. Гипотенузы треугольников ориентированы поперек потока (известно [8], что уменьшение угла между направлением потока и гипотенузами/диагоналями элементов приводит, как правило, к уменьшению погрешности, поэтому мы будем тестировать методы на наиболее "неудобном" с данной точки зрения расположении сетки). График численного решения МКЭ Галеркина в зависимости от переменной $x \equiv x_1$ при $t = 0,4$ и фиксированном $x_2 = 0,5$ приведен на рис. 4 (здесь и в дальнейшем на рисунках данного примера тонкой линией будет обозначаться истинное решение, а жирной – вычисленное). Видно, что численное решение является колебательным и не имеет ничего общего с истинным решением. Обозначим через err_{\max}^{loc} величину максимального отклонения на графике истинного решения от вычисленного, а через err_{\max}^{glob} – величину максимального (поточечного) отклонения на всей области. Тогда для МКЭ Галеркина имеем $err_{\max}^{loc} \approx 1,47$, а $err_{\max}^{glob} \approx 3,34$. Для метода SUPG с выбором параметров (5), а также для методов GLS и USFEM получаем $err_{\max}^{loc} \approx 0,72$, а $err_{\max}^{glob} \approx 1,55$ (рис. 5). При этом для интегрирования СОДУ адаптивным методом [12] понадобился $M = 341$ шаг, а показатель λ жесткости системы (отношение максимального модуля действительных частей собственных чисел к минимальному) равен 3,76. Видно, что данные методы сильно сглаживают решение (стремятся его "выровнять" в окрестности пограничного слоя), что свидетельствует об их чрезмерной диссипативности в данной (нестационарной) задаче. Отметим, что использование метода SUPG с оптимальным для двумерных стационарных задач выбором параметров [8] (см. пример 1) не приводит к существенному улучшению решения. Для него $err_{\max}^{loc} \approx 0,64$, $err_{\max}^{glob} \approx 1,54$, $\lambda \approx 1,88$, $M = 232$, однако решение имеет осцилляции в окрестности пограничного слоя (рис. 6).

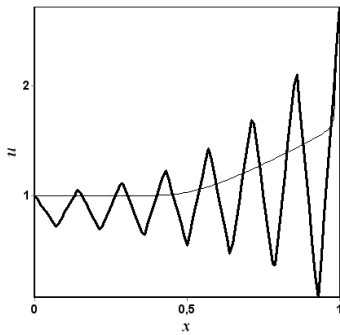


Рис. 4. Решение МКЭ Галеркина (пример 2)

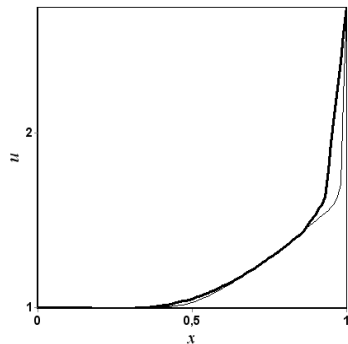


Рис. 5. Решение SUPG с выбором СП в виде (5)

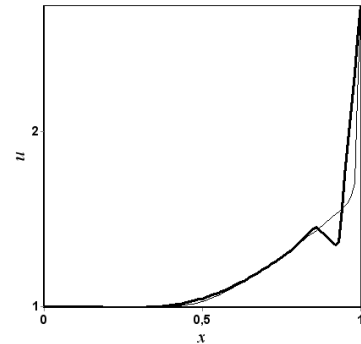


Рис. 6. Решение SUPG с оптимальным выбором СП

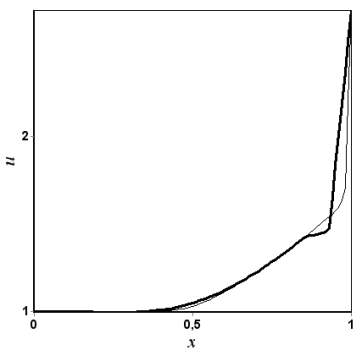


Рис. 7. Решение МПГ с СП (4) и $\theta_{i,k} = 1,5$ (15×15 узлов)

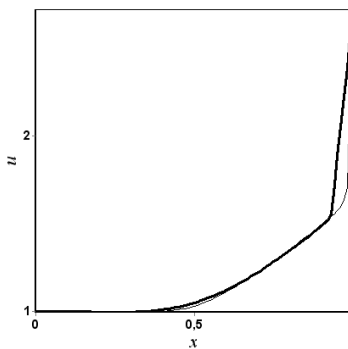


Рис. 8. Решение МПГ с СП (4) и $\theta_{i,k} = 1,75$ (15×15 узлов)

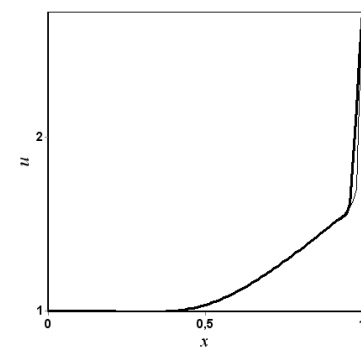


Рис. 9. Решение МПГ с СП (4) и $\theta_{i,k} = 1,75$ (25×25 узлов)

Для МПГ с ВФ (1) (для определенности используем кусочно-квадратичные функции), параметрами (4) и $\theta_{i,k} = 1$ получим $err_{\max}^{loc} \approx 0,61$, $err_{\max}^{glob} \approx 1,53$, $\lambda \approx 1,64$, $M = 233$. Однако решение будет иметь небольшие осцилляции возле приграничного слоя (график решения практически совпадает с графиком на рис. 6, поэтому здесь не приводится). При $\theta_{i,k} = 1,5$ получим $err_{\max}^{loc} \approx 0,66$ (рис. 7), $M = 252$ и $\lambda \approx 2,45$. Видно, что в окрестности пограничного слоя имеется тенденция к осцилляции (образуется небольшая "ступенька"), хотя и значительно меньшая, чем для метода SUPG (рис. 6). Увеличение $\theta_{i,k}$ позволяет удалить эту "ступеньку". Так, график решения для $\theta_{i,k} = 1,75$ приведен на рис. 8 (при этом $err_{\max}^{loc} \approx 0,67$, $err_{\max}^{glob} \approx 1,52$, $\lambda \approx 2,98$ и $M = 290$). Отметим, что использование параметров (3) в данном примере дает слегка худшие результаты. Так, для $\theta_{i,k} = 1,75$ будет $err_{\max}^{loc} \approx 0,66$, $M = 363$, однако в окрестности пограничного слоя наблюдается "ступенька" (аналогично ситуации на рис. 7), убрать которую можно еще увеличив $\theta_{i,k}$ (однако при этом будет расти err_{\max}^{loc}). Измельчение сетки ведет к уменьшению погрешности (хотя соотношения между погрешностями (в плане "больше" или "меньше") протестированных методов с различными вариантами СП, а также характер поведения решения в целом сохраняются). Так, для разбиения 25×25 узлов для МКЭ Галеркина получаем $err_{\max}^{loc} \approx 0,64$, $err_{\max}^{glob} \approx 3,47$, $\lambda \approx 2,02$ и $M = 551$. Для метода SUPG с (5) будет $err_{\max}^{loc} \approx 0,5$, $err_{\max}^{glob} \approx 1,49$, $\lambda \approx 3,69$, $M = 678$. Для рассматриваемого МПГ с ВФ (1), параметрами (4) и $\theta_{i,k} = 1$ получим $err_{\max}^{loc} \approx 0,34$, $err_{\max}^{glob} \approx 1,47$, $\lambda \approx 1,65$, $M = 502$; при $\theta_{i,k} = 1,5$ будет

$err_{\max}^{loc} \approx 0,42$, $err_{\max}^{glob} \approx 1,48$, $\lambda \approx 2,36$ и $M = 583$; при $\theta_{i,k} = 1,75$ будет $err_{\max}^{loc} \approx 0,45$, $err_{\max}^{glob} \approx 1,48$, $\lambda \approx 2,96$ и $M = 630$ (рис. 9).

Пример 3. Рассмотрим начально-краевую задачу при $x \in [a; b]$ для одномерного уравнения Бюргерса [5, 6]:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \lambda u \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\kappa \frac{\partial u}{\partial x} \right) + f \quad (7)$$

при $\lambda = 1$ и $f = 0$ с известным аналитическим решением

$$u(t, x) = \frac{x/(t+1)}{1 + \sqrt{(t+1)/\exp(1/8\kappa) \exp(x^2/(4\kappa(t+1)))}}.$$

Данная задача представляет собой модель ударной волны [14] и применялась в [14–17] для тестирования предложенных там численных методов, основанных на методе РКРМ и являющихся его дальнейшим усовершенствованием [14], а также методах, основанных на применении В-сплайнов, эрмитовых сплайнов и методов коллокаций [14–17]. Начальное (при $t = 0$) и граничные условия получаются из выписанного аналитического решения путем его непрерывного продолжения на гиперплоскости с $t = 0$ и $x = a$, $x = b$ соответственно. Для оценки уклонения численного решения \tilde{u} от аналитического u здесь и в дальнейших примерах используем величину $err_{\max} \equiv \max_i |\tilde{u}(x_i, t) - u(x_i, t)|$. Положим, $\kappa = 10^{-4}$, $a = 0$, $b = 1$. При использовании (3)

положим [5, 6] $\theta_{i,k}^{(n+1)} = \theta \cdot m$, где $m \equiv \max_{i,k} |\alpha(\gamma_{i,k}^{(n)})|$, константа $\theta = 1$, а при использовании (4) положим $\theta_{i,k}^{(n+1)} = 1$. В табл. 1 приведено значение величины err_{\max} (при $t = 2$) в зависимости от выбора СП $\alpha_{i,k}^{(n+1)}$ и количества N равноотстоящих узлов сетки.

Таблица 1. Значение err_{\max} (пример 3)

$\alpha_{i,k}^{(n+1)}$	Количество узлов пространственной сетки, N			
	200	250	300	350
(3)	0,33203	0,32471	0,31836	0,31259
(3)*	0,12784	0,11491	0,08867	0,06558
(4)	0,19181	0,18664	0,18053	0,15949
(4)*	0,28647	0,28646	0,28644	0,28643

* при расчете использовалось сосредоточение [5, 18].

Здесь и в дальнейших примерах на рисунках жирной линией обозначен график вычисленного решения в зависимости от x , тонкой – график известного аналитического. На рис. 10 представлен результат расчета задачи МПГ (здесь и в дальнейших примерах в МПГ используем кусочно-квадратичные ВФ (1)) при использовании формулы (3) и сосредоточения [5, 18], $N = 350$. На рис. 11 область укрупнения решения показана крупным планом. На рис. 12 показана область укрупнения решения при использовании формулы (4), $N = 350$, а на рис. 13 – при использовании МКЭ Галеркина с сосредоточением. Видно, что в последнем случае решение является осциллирующим (в силу преобладания конвекционных процессов и нелинейности); отметим, что в случае, когда сосредоточение не используется, осцилляции будут гораздо большими, поскольку сосредоточение, как известно [5, 18], увеличивает устойчивость схем и осуществляет их "монотонизацию". При использовании (3) без сосредоточения, а также при использовании (4) с сосредоточением погрешность боль-

ше (по сравнению с другими вариантами, перечисленными в табл. 1) и с возрастанием N она медленно убывает. При использовании МПГ с постоянными СП (не зависящими от индексов узлов сетки и момента времени t) решение получается неустойчивым и колебательным в окрестностях тонких слоев, а в случае, когда применяется сосредоточение — чрезмерно диссипативным и сглаженным. Так, на рис. 14 изображен результат решения при прежних условиях, с использованием сосредоточения и СП, тождественно равными единице. Видно, что решение чрезмерно сглажено в окрестности слоя. На рис. 15 показан соответствующий результат, когда сосредоточение не используется. Как видим, в таком случае появляются осцилляции. Увеличение СП не приводит к улучшению решения и исчезновению осцилляций (а при использовании сосредоточения решение становится еще более сглаженным, чем на рис. 14). Уменьшение СП также не приводит к улучшению решения (а при стремлении их к нулю получим МКЭ Галеркина, который порождает осцилляции независимо от того, использовалось сосредоточение или нет подобно ситуации на рис. 13). При интегрировании СОДУ здесь и в дальнейших примерах использовались методы, описанные в примере 2 (в данной задаче с шагом по времени $\tau = 10^{-4}$).

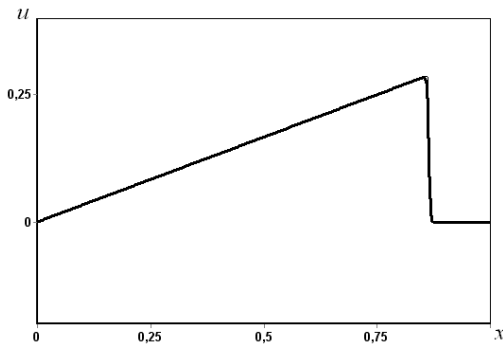


Рис. 10. Решение МПГ с СП (3) и использованием сосредоточения

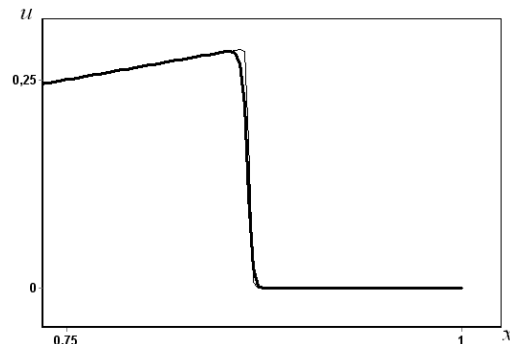


Рис. 11. Решение МПГ с СП (3) и сосредоточением (область укручения)

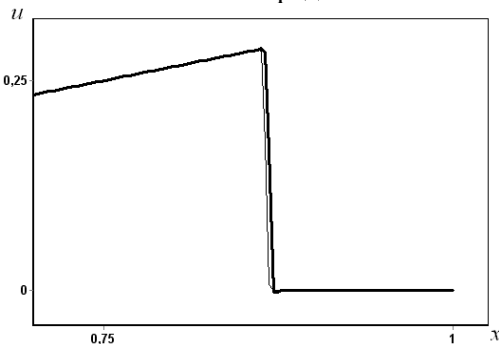


Рис. 12. Решение МПГ с СП (4) (область укручения)

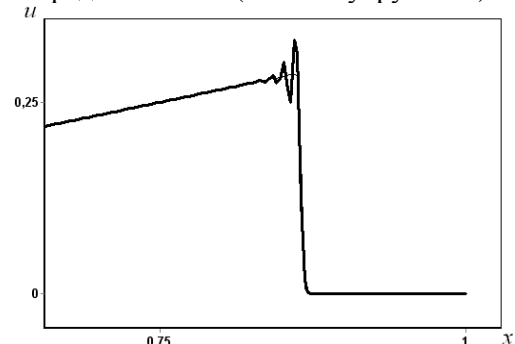


Рис. 13. Решение МКЭ Галеркина с использованием сосредоточения

Рассмотрим теперь данную задачу при условиях $\kappa = 0,005$, $a = 0$, $b = 1,2$ с шагом по времени $\tau = 0,01$ и по пространству $h = 0,0012$ (то есть $N = 1001$). При таких значениях параметров задача рассматривалась в [14] (однако там был взят еще более мелкий шаг h , $h = 0,001$). Тогда при использовании (3) ($\theta = 1$) с сосредоточением для моментов времени $t = 1,7$, $t = 2,5$, $t = 3$, $t = 3,5$ имеем $err_{\max} \approx 67 \cdot 10^{-5}$, $err_{\max} \approx 62 \cdot 10^{-5}$, $err_{\max} \approx 89 \cdot 10^{-5}$, $err_{\max} \approx 36 \cdot 10^{-5}$ соответственно. Для метода работы [14] с использованием пространств кусочно-линейных функций соответствующие значения err_{\max} равны $err_{\max} \approx 13,47 \cdot 10^{-4}$, $err_{\max} \approx 15,55 \cdot 10^{-4}$, $err_{\max} \approx 15,53 \cdot 10^{-4}$, $err_{\max} \approx 15,22 \cdot 10^{-4}$ [14].

Рассмотрим еще задачу при условиях $\kappa=0,005$, $a=0$, $b=1$ с шагом по времени $\tau=0,01$ и по пространству $h=0,005$. При таких значениях параметров задача рассматривалась в [14, 15]. Тогда, аналогично, при использовании (3) с сосредоточением для моментов времени $t=1,7$, $t=2,5$, $t=3,25$ имеем $err_{\max} \approx 48 \cdot 10^{-5}$, $err_{\max} \approx 18,5 \cdot 10^{-5}$, $err_{\max} \approx 63 \cdot 10^{-5}$ соответственно. Для метода QRKM (Quadratic Reproducing Kernel function Method), предложенного в работе [14], соответственно имеем $err_{\max} \approx 0,092 \cdot 10^{-3}$, $err_{\max} \approx 0,115 \cdot 10^{-3}$, $err_{\max} \approx 8 \cdot 10^{-3}$ (табл. 11 на стр. 433 в [14]). Для методов QBCM (Quadratic B-spline Collocation Method) и CBCM (Cubic B-spline Collocation Method), предложенных в работе [15] и основанных на использовании В-сплайнов, имеем соответственно значения [14, 15] $err_{\max} \approx 0,312 \cdot 10^{-3}$, $err_{\max} \approx 0,189 \cdot 10^{-3}$, $err_{\max} \approx 8,98 \cdot 10^{-3}$ и $err_{\max} \approx 27,577 \cdot 10^{-3}$, $err_{\max} \approx 25,152 \cdot 10^{-3}$, $err_{\max} \approx 21,049 \cdot 10^{-3}$. Таким образом, приведенные расчеты показывают, что предлагаемая версия МПГ с адаптивным выбором СП в виде (3) и использованием сосредоточения дает лучшие результаты (в том числе даже и на более грубых сетках), чем методы, предложенные в работах [14, 15].

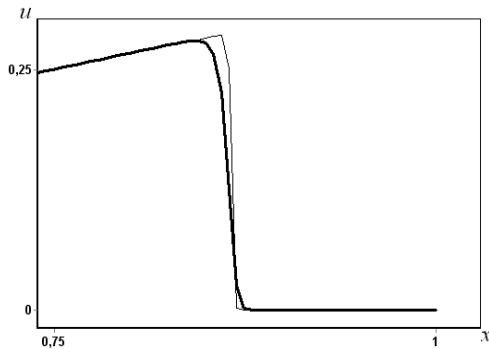


Рис. 14. Решение МПГ с СП, равными единице, и сосредоточением

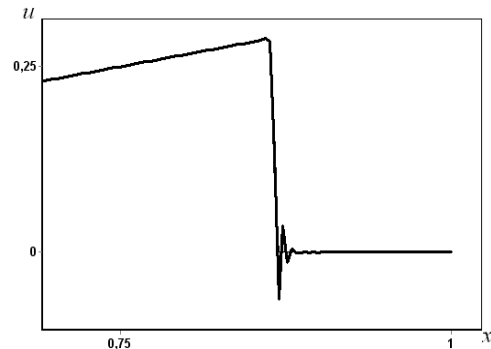


Рис. 15. Решение МПГ с СП, равными единице

Для сравнения с методами, предложенными в работах [16, 17], рассмотрим данную задачу при условиях $\kappa=0,005$, $a=0$, $b=1$, $\tau=0,001$ (при таких условиях она рассматривалась в указанных работах). Тогда при использовании (3) ($\theta=1/2$) с сосредоточением при $N=61$, $N=81$, $N=101$ и $N=121$ для фиксированного момента $t=3,6$ имеем $err_{\max} \approx 0,238 \cdot 10^{-3}$, $err_{\max} \approx 0,134 \cdot 10^{-3}$, $err_{\max} \approx 0,088 \cdot 10^{-3}$, $err_{\max} \approx 0,059 \cdot 10^{-3}$ соответственно. При использовании (4) (при прежних условиях) соответственно имеем $err_{\max} \approx 0,354 \cdot 10^{-3}$, $err_{\max} \approx 0,146 \cdot 10^{-3}$, $err_{\max} \approx 0,156 \cdot 10^{-3}$, $err_{\max} \approx 0,046 \cdot 10^{-3}$. Для метода работы [16] будем иметь $err_{\max} \approx 0,47 \cdot 10^{-3}$, $err_{\max} \approx 0,27 \cdot 10^{-3}$, $err_{\max} \approx 0,17 \cdot 10^{-3}$, $err_{\max} \approx 0,12 \cdot 10^{-3}$ соответственно (см. [16]), а для метода работы [17] — соответственно получаем $err_{\max} \approx 0,45 \cdot 10^{-3}$, $err_{\max} \approx 0,31 \cdot 10^{-3}$, $err_{\max} \approx 0,23 \cdot 10^{-3}$, $err_{\max} \approx 0,16 \cdot 10^{-3}$ [16, 17]. Таким образом, данные расчеты показывают, что предлагаемая версия МПГ с адаптивным выбором СП в виде (3) и использованием сосредоточения, а также с выбором параметров в виде (4) (без использования сосредоточения) дает в данном примере более точные результаты, чем методы работ [16, 17]. Отметим, что для интегрирования полудискретных аппроксимаций в [16] использовались методы Рунге-Кутты SSP-RK43 и SSP-RK54 (3-го, 4-го и 5-го порядков) (детально в [16]).

Пример 4. Рассмотрим начально-краевую задачу при $x \in [a; b]$ для одномерного уравнения Бюргерса (7) при $\lambda=1$ и $f=0$ с известным аналитическим решением

$$u(t, x) = \frac{2\pi\kappa \cdot \exp(-\pi^2\kappa t) \cdot \sin(\pi x)}{2 + \exp(-\pi^2\kappa t) \cdot \cos(\pi x)}. \text{ Данная задача применялась в [16, 19] для проверки и тестирования предложенных там численных методов решения уравнения Бюргерса. Положим, } a=0, b=1, h=1/40, \tau=10^{-4}.$$

Тогда при использовании (3) с сосредоточением (подробный выбор СП описан в примере 3) в фиксированный момент времени $t=10^{-3}$ для $\kappa=5/10$, $\kappa=2/10$ и $\kappa=1/10$ имеем $err_{\max} \approx 1,2741 \cdot 10^{-5}$, $err_{\max} \approx 2,2121 \cdot 10^{-6}$ и $err_{\max} \approx 0,5987 \cdot 10^{-6}$ соответственно. При использовании формул (4) соответственно получим $err_{\max} \approx 4,0752 \cdot 10^{-5}$, $err_{\max} \approx 6,6653 \cdot 10^{-6}$, $err_{\max} \approx 1,6787 \cdot 10^{-6}$. Соответствующие значения величины err_{\max} для метода работы [16] равны $err_{\max} \approx 7,44 \cdot 10^{-5}$, $err_{\max} \approx 1,22 \cdot 10^{-5}$ и $err_{\max} \approx 3,08 \cdot 10^{-6}$, а для метода работы [19] – $err_{\max} \approx 2,00 \cdot 10^{-5}$, $err_{\max} \approx 3,00 \cdot 10^{-6}$ и $err_{\max} \approx 2,00 \cdot 10^{-6}$ (табл. 3 работы [19] на стр. 575). Таким образом, приведенные расчеты показывают, что предлагаемая версия МПГ с адаптивным выбором СП в виде (3) и использованием сосредоточения дает в данном примере более точные результаты, чем методы, предложенные в работах [16, 19].

Пример 5. Рассмотрим начально-краевую задачу при $x \in [a; b]$ для одномерного уравнения Бюргерса (7) при $\lambda=1$ и $f=0$ с известным аналитическим решением

$$u(t, x) = \frac{\alpha + \mu + (\mu - \alpha)e^\eta}{1 + e^\eta}, \text{ где } \eta = \frac{(x - \mu t - \beta)\alpha}{\kappa}. \text{ Данная задача применялась в [16, 20, 21] для проверки и тестирования предложенных там численных методов решения уравнения Бюргерса. Ее решение представляет собой движущуюся "ступеньку" (решение типа "кинк"). Положим, } \alpha=0,4, \beta=0,125, \mu=0,6, \kappa=10^{-2}, \tau=10^{-2}, h=1/36$$

[16, 20]. Тогда при использовании (3) с сосредоточением (подробный выбор СП описан в примере 3) в фиксированный момент времени $t=1/2$ при различных $\theta=0$, $\theta=1/4$, $\theta=1/2$, $\theta=3/4$ и $\theta=1$ имеем соответственно $err_{\max} \approx 0,03693$, $err_{\max} \approx 0,03045$, $err_{\max} \approx 0,03239$, $err_{\max} \approx 0,04$, $err_{\max} \approx 0,04670$. Аналогично, при использовании (4) и $\theta_{i,k}^{(n+1)}$, приобретающем значения 0, 1/4, 1/2, 3/4 и 1 соответственно, имеем $err_{\max} \approx 0,005$, $err_{\max} \approx 0,00409$, $err_{\max} \approx 0,00604$, $err_{\max} \approx 0,00928$, $err_{\max} \approx 0,01246$. Поскольку в данной задаче нет сильного доминирования конвекции (число Пекле имеет порядок 10^2) и резких неоднородностей в решении, то, соответственно, нет нужды во введении сильной сглаживающей диссипации, поэтому наиболее эффективными оказались "мягкие" варианты выбора СП (в особенности, (4)) и при небольших значениях параметров θ и $\theta_{i,k}^{(n+1)}$. Для метода работы [16] при тех же условиях расчета имеем $err_{\max} \approx 0,00597$, а для конечноэлементного метода работы [20] – $err_{\max} \approx 0,045$ [16, 20].

Положим, теперь $h=1/18$ и $\tau=10^{-3}$ (такие значения параметров использовались в [21]). Тогда при использовании (4) и $\theta_{i,k}^{(n+1)}$, приобретающем значения 0, 1/4, 1/2, 3/4 и 1 соответственно, имеем $err_{\max} \approx 0,02494$, $err_{\max} \approx 0,01347$, $err_{\max} \approx 0,02165$, $err_{\max} \approx 0,03432$, $err_{\max} \approx 0,0481$. При указанных значениях параметров для конечноэле-

ментного метода SGA (Standard Galerkin Approach) имеем $err_{\max} \approx 0,096$, для конечноэлементного метода PAG (Product Approximation Galerkin) $err_{\max} \approx 0,082$, для метода CD (Compact finite Difference) $err_{\max} \approx 0,151$ (описание данных методов и указанные значения err_{\max} в [20, 21]). Таким образом, расчеты показывают, что и в данном примере предлагаемая версия МПГ с адаптивным выбором СП (3)–(4) способна дать более точные результаты, чем методы, предложенные в работах [16, 20, 21].

Пример 6. Рассмотрим начально-краевую задачу для одномерного уравнения Бюргера (7) при $\lambda = 1$ и $f = 0$ на отрезке $[0; 1]$ с известным аналитическим решением

$$u(t, x) = \kappa + \frac{\kappa \sqrt{\mu^2 - 1}}{\operatorname{ch}(x - \kappa t) + \mu} - \frac{\kappa \operatorname{sh}(x - \kappa t)}{\operatorname{ch}(x - \kappa t) + \mu}, \text{ где } \mu - \text{некоторая константа. Данное решение}$$

имеет солитонный тип [22] и применялось в работах [16, 22] для проверки и тестирования предложенных там численных методов. Положим, $\kappa = 75 \cdot 10^{-5}$, $\mu = -3$, $h = 10^{-2}$, $\tau = 10^{-2}$ (при таких условиях задача использовалась в [16, 22]). Тогда при использовании (3) с $\theta = 1$, пример 3) с сосредоточением в фиксированный момент времени $t = 1/20$ имеем $err_{\max} \approx 10^{-13}$. При использовании (4) ($\theta_{i,k}^{(n+1)} = 1$) имеем $err_{\max} \approx 2 \cdot 10^{-9}$. Для метода работы [16] получаем $err_{\max} \approx 2,1 \cdot 10^{-8}$ (табл. 10.1 в [16]), а для 12-точечной схемы работы [22] – $err_{\max} \approx 1,058 \cdot 10^{-4}$ (табл. 6 в [22]).

Пример 7. Рассмотрим начально-краевую задачу для уравнения (7) при $\lambda = 1$ и $f = 0$ на отрезке $[0; 1]$ с нулевыми граничными условиями первого рода и начальным условием $u_0(x) = \sin(\pi x)$. Отметим, что задача в такой постановке дает описание нелинейных стоячих медленных волн в корональных магнитных петлях [23] в солнечной плазме. Аналитическое решение начально-краевой найдено в [20, 23]. Возьмем сначала значение $\kappa = 10^{-4}$. В силу необходимости выполнения нулевого граничного условия вблизи точки $x = 1$ возникает тонкий приграничный слой. Сравним погрешность предлагаемой версии МПГ с погрешностями методов, использованных в работе [20] при $t = 1/2$ на наборе точек $x = 0,5$, $x = 0,556$, $x = 0,611$, $x = 0,667$, $x = 0,722$, $x = 0,778$, $x = 0,833$, $x = 0,889$, $x = 0,944$ (именно такой тестовый набор точек был взят в [20]). Взяв $h = 1/216$ и $\tau = 1/8$ [20] для конечноэлементного метода работы [20], получим $err_{\max} \approx 0,097$, для конечноэлементного метода работы [24] с кубическими В-сплайнами получим $err_{\max} \approx 0,078$ (табл. 3 в [20]), а для предлагаемой версии МПГ с (3) (при $\theta = 1$) и использования сосредоточения получим $err_{\max} \approx 0,022$ (при $\theta = 1,3$ получим $err_{\max} \approx 0,02$). Положим, теперь $h = 1/18$, $\tau = 10^{-3}$. Тогда для метода SGA получим $err_{\max} \approx 0,124$, для метода PAG – $err_{\max} \approx 0,105$, а для метода CD – $err_{\max} \approx 0,087$ (по поводу данных методов см. табл. 3 в [20]). Для МПГ с (3) (при $\theta = 1$) и сосредоточением получим $err_{\max} \approx 0,0617$. Для МПГ с сосредоточением и постоянными СП, равными единице, получим $err_{\max} \approx 0,063$ (а решение получается чрезмерно сглаженным возле приграничного слоя), а без использования сосредоточения получим $err_{\max} \approx 0,119$. Для МКЭ Галеркина решение получается колебательным вблизи приграничного слоя и имеет большую погрешность (с использованием сосредоточения будем иметь $err_{\max} \approx 0,839$, а без его использования – $err_{\max} \approx 0,975$).

Пример 8. Рассмотрим начально-краевую задачу для уравнения Бюргера (7) при $\lambda = -1$ и $f = 0$ на отрезке $[0; 1]$ с известным аналитическим решением

$u(t, x) = \frac{\text{sh}(x/(2\kappa))}{\text{ch}(x/(2\kappa)) + \exp(-t/(4\kappa))}$. Данная задача использовалась в [25] для тестирования

предложенных там неявных численных схем. Положим, $\kappa = 75 \cdot 10^{-5}$, $h = 1/20$, $\tau = 10^{-2}$ (при таких условиях проводились расчеты в [25]). Тогда при использовании (3) ($\theta = 1$) с сосредоточением в фиксированный момент времени $t = 1/20$ имеем $err_{\max} \approx 5 \cdot 10^{-2}$. При использовании (4) ($\theta_{i,k}^{(n+1)} = 1$) имеем $err_{\max} \approx 6,5 \cdot 10^{-2}$. Для 8-точечной неявной схемы работы [25] имеем $err_{\max} \approx 7 \cdot 10^{-2}$, а для симметричной схемы Кранка-Николсона – $err_{\max} \approx 5 \cdot 10^{-1}$ (табл. 4 в [25]).

Пример 9. Рассмотрим начально-краевую задачу для двухмерного уравнения Бюргера [6, 26–28]:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \lambda_1 u \frac{\partial u}{\partial x_1} + \lambda_2 u \frac{\partial u}{\partial x_2} = \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\kappa \frac{\partial u}{\partial x_1} \right) + \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\kappa \frac{\partial u}{\partial x_2} \right) + f$$

(где $\lambda_i = \lambda_i(t, \bar{x})$, $\kappa = \kappa(t, \bar{x})$, $f = f(t, \bar{x})$) при $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$, $\kappa = 1/20$, $f = 0$, $(x_1, x_2) \in [0; 1] \times [0; 1]$ с известным аналитическим решением

$u(t, x_1, x_2) = (1 + \exp((x_1 + x_2 - t)/(2\kappa)))^{-1}$ [26–28]. Данное решение служит моделью ударной

волны, волновой фронт которой движется вдоль линии $x_1 + x_2 - t$ (интерпретацию решения и его гидродинамическую суть см. в [26, 27]). Используем равномерное разбиение

21×21 узлов и положим $\tau = 10^{-3}$. Тогда, при использовании (4) (с $\theta_{i,k}^{(n+1)} = 0,2$) для моментов времени $t = 1/2$, $t = 3/4$, $t = 1$, $t = 5/4$, имеем соответственно $err_{\max} \approx 0,00032$, $err_{\max} \approx 0,00097$, $err_{\max} \approx 0,0007$, $err_{\max} \approx 0,00056$. Отметим, что увеличение или уменьшение

$\theta_{i,k}^{(n+1)}$, как показывают расчеты, ведет к (медленному) росту ошибки (по сравнению с ошибкой для $\theta_{i,k}^{(n+1)} = 0,2$); это, как уже отмечалось ранее, связано с тем, что коэффициент вязкости κ не является малой величиной, следовательно, конвекция в данной задаче не является доминирующей, поэтому небольшие значения коэффициентов $\theta_{i,k}^{(n+1)}$ приводят

к более точным решениям (однако при нулевых значениях $\theta_{i,k}^{(n+1)}$ погрешность увеличивается). Для meshless-метода ELMFS (Eulerian-Lagrangian Method of Fundamental Solutions) работы [26] при тех же условиях интегрирования задачи имеем соответственно $err_{\max} \approx 0,00061$, $err_{\max} \approx 0,00105$, $err_{\max} \approx 0,00299$, $err_{\max} \approx 0,00303$ (табл. 1 в работе [26]

на стр. 399). Рассмотрим теперь задачу при разбиении 20×20 узлов и положим $\tau = 10^{-2}$ (при таких условиях задача рассматривалась в [27]). Тогда на промежутке $0 \leq t \leq 5/4$ для МПГ с (4) имеем $err_{\max} \approx 0,007$. Для методов MFS-DRM (Method of Fundamental Solution - Dual Reciprocity Method) и Kansa работы [27] при тех же условиях решения имеем соответственно $err_{\max} \approx 0,0703$ и $err_{\max} \approx 0,0719$ (стр. 218 в [27]). Пусть теперь $\kappa = 1$, $\tau = 10^{-4}$ и

используется разбиение 11×11 узлов. Тогда при $t = 1/2$ для МПГ с (4) ($\theta_{i,k}^{(n+1)} = 1$) имеем $err_{\max} \approx 8,72 \cdot 10^{-7}$, а для метода LMAPS (Local Method of Approximate Particular Solutions) работы [28] – $err_{\max} \approx 6,9 \cdot 10^{-6}$ (табл. 1 в [28]; отметим, однако, что авторы [28] не указали в своей работе ни метода интегрирования своих полудискретных аппроксимаций, ни кон-

кретного значения шага по времени, с которым они решали данный пример). Таким образом, предлагаемая версия МПГ с выбором СП в виде (4) в данной задаче дает более высокую точность, чем методы работ [26–28]. Отметим, что для многомерных задач использование сосредоточения является "рискованным" (в силу того, что может ввести диффузию поперек потока [1], которая приведет к возникновению больших погрешностей), а вариант (3) выбора СП без сосредоточения показывает плохие результаты даже в одномерном случае (пример 3), поэтому при решении многомерных задач вариант (4) выбора СП является предпочтительным.

Пример 10. Рассмотрим задачу для системы Бюргерса [26, 28]:

$$\begin{cases} \frac{\partial u_1}{\partial t} + \lambda_1 u_1 \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \lambda_2 u_2 \frac{\partial u_1}{\partial x_2} = \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\kappa \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \right) + \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\kappa \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \right), \\ \frac{\partial u_2}{\partial t} + \lambda_1 u_1 \frac{\partial u_2}{\partial x_1} + \lambda_2 u_2 \frac{\partial u_2}{\partial x_2} = \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\kappa \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right) + \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\kappa \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \right) \end{cases}$$

при $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$, $\kappa = 1/100$, $(x_1, x_2) \in [0; 1] \times [0; 1]$ с аналитическим решением [26]

$$\begin{aligned} u_1(t, x_1, x_2) &= 3/4 - (1 + \exp((-4x_1 + 4x_2 - t) / (32\kappa)))^{-1} / 4, \\ u_2(t, x_1, x_2) &= 3/4 + (1 + \exp((-4x_1 + 4x_2 - t) / (32\kappa)))^{-1} / 4. \end{aligned}$$

Данное решение служит моделью ударной волны (гидродинамическую интерпретацию решения см. в [26]) и использовалось в работе [26] для проверки работоспособности предложенного там метода ELMFS (пример 9). Используем равномерное разбиение 11×11 узлов и положим $\tau = 0,005$. Тогда, при использовании (4) (с $\theta_{i,k}^{(n+1)} = 0,2$, см. комментарии к примеру 9) для моментов времени $t = 10^{-2}$, $t = 1/2$, $t = 2$ для u_1 имеем соответственно $err_{\max} \approx 3,07 \cdot 10^{-5}$, $err_{\max} \approx 7,32 \cdot 10^{-3}$, $err_{\max} \approx 7,54 \cdot 10^{-3}$, для величины u_2 погрешности такие же (с точностью до малых более высокого порядка). Для метода ELMFS работы [26] при тех же условиях интегрирования задачи соответствующие погрешности для u_1 имеют вид $err_{\max} \approx 5,39 \cdot 10^{-4}$, $err_{\max} \approx 7,66 \cdot 10^{-3}$, $err_{\max} \approx 1,03 \cdot 10^{-2}$ (для величины u_2 они будут такими же, см. табл. 3 и 4 в работе [26] на стр. 404-405). Для метода LMAPS работы [28] (см. комментарии к примеру 9) при тех же условиях и $t = 1/2$ имеем $err_{\max} \approx 7,4 \cdot 10^{-3}$ (табл. 2 в [28]). Таким образом, предлагаемая версия МПГ с выбором стабилизирующих параметров в виде (4) в данной задаче дает более высокую точность, чем методы работ [26, 28].

Пример 11. Рассмотрим важный случай системы уравнений магнитной гидродинамики (в предположении адиабатичности и бесконечной проводимости среды [7, 29]), в которой все величины зависят от одной пространственной координаты, например, координаты z [29]. Тогда имеем вектор скорости $\vec{u} = (u_x(t, z), u_y(t, z), u_z(t, z))$, магнитную индукцию $\vec{B} = (B_x(t, z), B_y(t, z), B_z(t, z))$, плотность $\rho = \rho(t, z)$ и давление $p = p(t, z)$. К этой ситуации сводится математическое описание распространения волн при возмущении какой-либо из МГД величин на границе рассматриваемой области, а также движение плазмы в конфигурациях, которые могут быть описаны (по крайней мере, в некотором приближении) единственной пространственной координатой (например, явление спикул [29]).

Введем сетку z_i , $i = 1..n$ на отрезке $z \in [L_1; L_2]$, $z_1 = L_1$, $z_n = L_2$. Начальные условия, соответствующие стационарному равновесному состоянию плазмы, имеют вид

$\vec{u} = \vec{u}_0 = 0$, $\vec{B} = \vec{B}_0 = 0$, $p = p_0 = C\rho_0 = C\rho$ (где C — некоторая константа), $\rho = \rho_0(z) = \rho_0(0)e^{-gz/C}$, где сила тяжести (направлена противоположно оси z) $g = \text{const}$. Соответственно, $p_0 = C\rho_0$. По компоненте скорости u_z на левом конце области дадим следующее синусоидальное возмущение:

$$\delta u_z(t) = \begin{cases} \sin(2\pi t / (3/20)), & 0 \leq t \leq 3/20, \\ 0, & t > 3/20. \end{cases}$$

Без ограничения общности, для демонстрации работоспособности обсуждаемой версии МПГ положим при расчетах $C=1/2$, $\rho_0(0)=1$, $g=1$ и коэффициент вязкости $\nu=10^{-2}$ [7]. Тогда при использовании МПГ с выбором СП в виде (3) с сосредоточением, $\theta=1$ (пример 3), $h=10^{-2}$ (используем плавающую сетку работы [30]) и $\tau=10^{-2}$ графики плотности ρ и компоненты u_z скорости в момент времени $t=0,15$ в зависимости от координаты z изображены на рис. 16 и 17 соответственно. На рис. 18 и 19 показаны графики соответствующих величин в момент времени $t=0,25$.

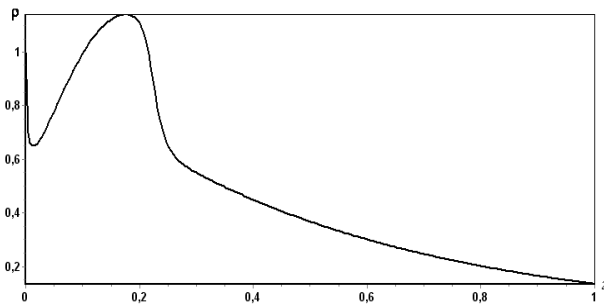


Рис. 16. График плотности ρ при $t=0,15$

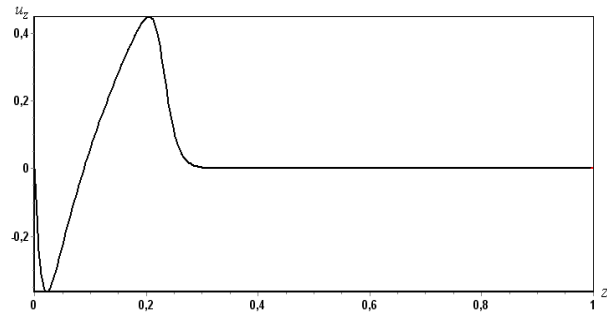


Рис. 17. График скорости u_z при $t=0,15$

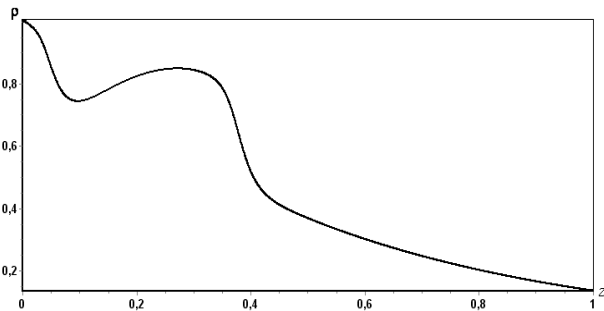


Рис. 18. График плотности ρ при $t=0,25$

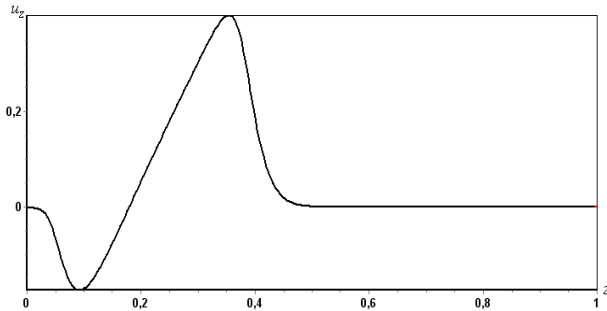


Рис. 19. График скорости u_z при $t=0,25$

Видно, что возмущение $\delta u_z(t)$ сохраняет свою форму, но с течением времени затухает по амплитуде, что объясняется действием диссипации (вязкость с коэффициентом ν) и нелинейности конвективного члена, причем, чем большим будет значение коэффициента вязкости ν , тем сильнее будет затухать амплитуда скорости с течением времени. Возмущение скорости приводит к возмущению плотности (и, в свою очередь, давления) на фоне равновесного установившегося распределения плотности $\rho_0(z) = \rho_0(0)e^{-gz/C}$. Как видно из рис. 16 и 18, происходит "скатывание" возмущения со стороны левого конца области. С течением времени данное возмущение затухает (поскольку затухает возмущение переменной скорости) и плазма, при отсутствии других внешних возмущений, постепенно переходит в равновесное состояние. Таким образом, полученные результаты расчетов полностью согласуются с физической картиной поведения рассматриваемого процесса.

5. Заключение

В настоящей статье получили дальнейшее развитие результаты работ [5–7], касающиеся выбора и динамической (адаптивной) настройки стабилизирующих параметров в конечно-элементном методе Петрова-Галеркина с предложенными в работах [2–4] весовыми (поворотными) функциями. На многочисленных примерах (разд. 4) продемонстрирована высокая эффективность метода Петрова-Галеркина с весовыми функциями (1) и предложенными вариантами выбора стабилизирующих параметров (разд. 3) при решении различных задач конвекции-диффузии (стационарных и нестационарных линейных задач, а также нелинейных уравнений и систем типа Бюргерса). Во всех приведенных примерах рассматриваемый метод Петрова-Галеркина оказался способным дать более точное решение, чем методы работ [8, 13–17, 19–22, 24–28], в которых данные примеры (те или иные) также применялись для проверки точности и работоспособности предложенных там методов. Расчеты показали, что в целом, в случае одномерных задач с наличием тонких слоев и ударных волн (особенно задач для уравнений Бюргерса), среди вариантов (3) и (4) выбора стабилизирующих параметров более эффективным (в плане точности и подавления осцилляций), как правило, оказывается "жесткий" вариант выбора (3) с одновременным использованием сосредоточения. В случае же, когда конвекция не является доминирующей над процессом диффузии, а также для многомерных задач, "мягкий" вариант (4) выбора стабилизирующих параметров в приведенных примерах оказывается более эффективным по сравнению с вариантом (3).

Благодарности. Автор выражает глубокую благодарность к.т.н., с.н.с. ИКИ НАНУ Сальникову Н.Н. и д.т.н., проф. Молчанову А.А. за плодотворное обсуждение работы и ценные замечания к ней.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Roos H.-G. Robust numerical methods for singularly perturbed differential equations / H.-G. Roos, M. Stynes, L. Tobiska. – Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag, 2008. – 604 p.
2. Сальников Н.Н. О построении конечномерной математической модели процесса конвекции-диффузии с использованием метода Петрова-Галеркина / Н.Н. Сальников, С.В. Сирик, И.А. Терещенко // Проблемы управления и информатики. – 2010. – № 3. – С. 94 – 109.
3. Сальников Н.Н. Построение весовых функций метода Петрова-Галеркина для уравнений конвекции-диффузии-реакции в трехмерном случае / Н.Н. Сальников, С.В. Сирик // Кибернетика и системный анализ. – 2014. – № 5. – С. 173 – 183.
4. Сирик С.В. Выбор весовых функций в методе Петрова-Галеркина для интегрирования линейных одномерных уравнений конвекции-диффузии / С.В. Сирик, Н.Н. Сальников, В.К. Белошапкин // Управляющие системы и машины. – 2014. – № 1. – С. 38 – 47.
5. Сирик С.В. Численное интегрирование уравнения Бюргерса методом Петрова-Галеркина с адаптивными весовыми функциями / С.В. Сирик, Н.Н. Сальников // Проблемы управления и информатики. – 2012. – № 1. – С. 94 – 110.
6. Молчанов А.А. Выбор весовых функций в методе Петрова-Галеркина для интегрирования двумерных нелинейных уравнений типа Бюргерса / А.А. Молчанов, С.В. Сирик, Н.Н. Сальников // Математичні машини і системи. – 2012. – № 2. – С. 136 – 144.
7. Сальников Н.Н. О построении конечномерных математических моделей для двумерных процессов магнитной гидродинамики с использованием метода Петрова-Галеркина / Н.Н. Сальников, С.В. Сирик, В.К. Белошапкин // Управляющие системы и машины. – 2014. – № 4. – С. 23 – 32.
8. Harari I. Streamline design of stability parameters for advection-diffusion problems / I. Harari, L.P. Franca, S.P. Oliveira // Journal of Computational Physics. – 2001. – Vol. 171 (1). – P. 115 – 131.
9. John V. Finite element methods for time-dependent convection–diffusion–reaction equations with small diffusion / V. John, E. Schmeyster // Comput. Methods Appl. Mech. Engrg. – 2008. – Vol. 198. – P. 475 – 494.
10. Хорн Р. Матричный анализ / Р. Хорн, Ч. Джонсон; пер. с англ. – М.: Мир, 1989. – 655 с.
11. Калиткин Н.Н. Численные методы / Калиткин Н.Н. – М.: Наука, 1978. – 512 с.

12. Скворцов Л.М. Простые явные методы численного решения жестких обыкновенных дифференциальных уравнений / Л.М. Скворцов // Вычислительные методы и программирование. – 2008. – Т. 9. – С. 154 – 162.
13. Brooks A.N. Streamline upwind Petrov-Galerkin formulations for convection dominated flows with particular emphasis on incompressible Navier–Stokes equations / A.N. Brooks, T.J.R. Hughes // Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering. – 1982. – Vol. 32 (1 – 3). – P. 199 – 259.
14. Xie S.-S. Numerical solution of one-dimensional Burgers' equation using reproducing kernel function / S.-S. Xie, S. Heo, S. Kim [et al.] // J. Comput. Appl. Math. – 2008. – Vol. 214. – P. 417 – 434.
15. Dag I. B-spline collocation methods for numerical solutions of the Burgers equation / I. Dag, D. Irk, A. Sahin // Math. Problems in Eng. – 2005. – Vol. 5. – P. 521 – 538.
16. Mittal R.C. Numerical solutions of nonlinear Burgers equation with modified cubic B-splines collocation method / R.C. Mittal, R.K. Jain // Applied Mathematics and Computation. – 2012. – Vol. 218. – P. 7839 – 7855.
17. Korkmaz A. Polynomial based differential quadrature method for numerical solution of nonlinear Burgers equation / A. Korkmaz, I. Dag // Journal of the Franklin Institute. – 2011. – Vol. 348 (10). – P. 2863 – 2875.
18. Сирик С.В. О применении сосредоточения в методе конечных элементов Петрова-Галеркина при решении задач конвекции-диффузии / С.В. Сирик, Н.Н. Сальников // Доповіди НАН України. – 2014. – № 5. – С. 39 – 44.
19. Ganaie I.A. Numerical solution of Burgers equation by cubic Hermite collocation method / I.A. Ganaie, V.K. Kukreja // Applied Mathematics and Computation. – 2014. – Vol. 237. – P. 571 – 581.
20. Dogan A. A Galerkin finite element approach to Burgers' equation / A. Dogan // Applied Mathematics and Computation. – 2004. – Vol. 157. – P. 331 – 346.
21. Christie I. Product approximation for nonlinear problems in the finite element method / I. Christie, D.F. Griffiths, A.R. Mitchell [et al.] // IMA. J. Numer. Anal. – 1981. – Vol. 1. – P. 253 – 266.
22. Hesameddini E. Soliton and numerical solutions of the Burgers Equation and comparing them / E. Hesameddini, R. Gholampour // Int. J. Math. Anal. – 2010. – Vol. 4 (52). – P. 2547 – 2564.
23. Ruderman M.S. Nonlinear damped standing slow waves in hot coronal magnetic loops / M.S. Ruderman // Astronomy & Astrophysics. – 2013. – Vol. 553 (A23). – P. 1 – 6.
24. Ali A.H.A. A collocation solution for Burgers equation using cubic B-spline finite elements / A.H.A. Ali, G.A. Gardner, L.R.T. Gardner // Comput. Meth. Appl. Mech. Eng. – 1992. – Vol. 100. – P. 325 – 337.
25. Tabatabaei A.H. Some implicit methods for the numerical solution of Burgers equation / A.H. Tabatabaei, E. Shakour, M. Dehghan // Applied Mathematics and Computation. – 2007. – Vol. 191. – P. 560 – 570.
26. Young D.L. The Eulerian-Lagrangian method of fundamental solutions for two-dimensional unsteady Burgers' equations / D.L. Young, C.M. Fan, S.P. Hu [et al.] // Engineering Analysis with Boundary Elements. – 2008. – Vol. 32. – P. 395 – 412.
27. Li J. Numerical comparisons of two meshless methods using radial basis functions / J. Li, Y.C. Hon, C.S. Chen // Engineering Analysis with Boundary Elements. – 2002. – Vol. 26. – P. 205 – 225.
28. Zhang X. Local method of approximate particular solutions for two-dimensional unsteady Burgers' equations / X. Zhang, H. Tian, W. Chen // Computers and Mathematics with Applications. – 2014. – Vol. 66. – P. 2425 – 2432.
29. Ладиков-Роев Ю.П. Математические модели сплошных сред / Ю.П. Ладиков-Роев, О.К. Черемных. – К.: Наукова думка, 2010. – 551 с.
30. Молчанов О.А. Проекційні методи інтегрування рівнянь магнітної гідродинаміки / О.А. Молчанов, М.М. Сальников, С.В. Сірик // III наукова конференція магістрантів та аспірантів «Прикладна математика та комп'ютеринг»: тези доповідей, (Київ, 13-15 квітня 2011). – К.: Просвіта, 2011. – С. 272 – 278.

Стаття надійшла до редакції 21.10.2014