

МАТЕМАТИЧНІ МОДЕЛІ НАДІЙНОСТІ ТИПОВИХ АПЕРТУР ФАЗОВАНИХ АНТЕННИХ РЕШІТОК, ЯКІ ВРАХОВУЮТЬ РАПТОВІ ТА ПОСТУПОВІ ВІДМОВИ МОДУЛІВ НАДВИСОКИХ ЧАСТОТ

*НДІ «Квант» Державного концерну «Укроборонпром», Київ, Україна

Анотація. У даній статті розглядаються математичні моделі надійності апертур ФАР РЛС під час різних законів розподілу часу до відмови модулів надвисоких частот, що враховують наявність раптових і поступових відмов. На основі отриманих формул і рівнянь будуються і аналізуються номограми для визначення ймовірності безвідмовної роботи, інтенсивності відмов і середнього наробітку до відмови типових апертур ФАР для п'яти типів законів розподілу часу до відмови: експоненціального, Вейбулла, дифузійного немонотонного, узагальненого показового і суміші двох розподілів – експоненціального і Вейбулла.

Ключові слова: моделі надійності, апертура, ФАР, ймовірність безвідмовної роботи, середній наробіток до відмови, інтенсивності відмов, закон розподілу часу до відмови, експоненціальний розподіл, розподіл Вейбулла, дифузійний немонотонний розподіл.

Аннотация. В данной статье рассматриваются математические модели надежности апертур ФАР РЛС при различных законах распределения наработки до отказа модулей сверхвысоких частот, учитывающих наличие внезапных и постепенных отказов. На основе полученных формул и уравнений строятся и анализируются номограммы для определения вероятности безотказной работы, интенсивности отказов и средней наработки до отказа типовых апертур ФАР для пяти типов законов распределения наработки до отказа: экспоненциального, Вейбулла, диффузионного немонотонного, обобщенного показательного и смеси двух распределений – экспоненциального и Вейбулла.

Ключевые слова: модели надежности, апертура, ФАР, вероятность безотказной работы, средняя наработка до отказа, интенсивность отказов, закон распределения времени до отказа, экспоненциальное распределение, распределение Вейбулла, диффузионное немонотонное распределение

Abstract. This article discusses the mathematical reliability models of Phased Array Apertures radar under various laws of distribution of time to failure of SHF modules, taking into account the presence of sudden and gradual failures. On the basis of received formulas and equations are constructed and analyzed nomograms for determining the probability of failure-free operation, the failure rate and mean time to failure of standard Phased Array Apertures for the five types of distribution laws of time to failure: exponential, Weibull, the diffused non-monotonic, generalized exponential and mixture of two distributions – exponential and Weibull.

Keywords: reliability models, aperture, Phased Array Apertures, the probability of failure-free operation, the average time to failure, failure rate, the distribution law of time to failure, the exponential distribution, Weibull distribution, diffused non-monotonic distribution.

1. Вступ

Розподіл структури апертур фазованих антенних решіток (ФАР) сучасних радіолокаційних станцій (РЛС) може включати дуже велике число (до десяти тисяч) модулів надвисоких частот (НВЧ). Висока надійність РЛС забезпечується за рахунок спеціального введення деякої надмірності (до 10%) в апертуру ФАР.

Для аналізування показників надійності апертур ФАР, як правило, використовуються методи розрахунку надійності розгалужених систем [1] та мажоритарних систем (з дробовою кратністю) [3], які враховують тільки раптові відмови модулів (експоненціальний розподіл). Однак під час більшої кількості НВЧ модулів (більше 200) в апертурі аналітичні

вирази для показників надійності розгалужених структур, які застосовуються у [1–3], стають громіздкими та малоприматними для проведення аналізу надійності. Тому значний інтерес становлять побудова та дослідження математичних моделей надійності для проведення інженерного аналізу надійності типових апертур ФАР з числом НВЧ модулів $n > 200$ з урахуванням раптових і поступових відмов модулів.

У даній статті розглядаються математичні моделі надійності апертур ФАР за різними законами розподілу часу до відмови НВЧ модулів, що ураховують наявність раптових і поступових відмов. На основі отриманих формул і рівнянь будуються і аналізуються номограми для визначення ймовірності безвідмовної роботи, інтенсивності відмов і середнього наробітку до відмови типових апертур ФАР для п'яти типів законів розподілу часу до відмови: експоненціального, Вейбулла, дифузійного немонотонного, узагальненого показового і суміші двох розподілів – експоненціального і Вейбулла.

2. Математична модель надійності апертури ФАР

Аналітичні вирази для показників надійності НВЧ модулів ФАР, що враховують раптові та поступові відмови, для п'яти різних законів розподілу часу до відмови представлені в табл. 1.

Таблиця 1. Формули для розрахунку показників надійності п'яти різних розподілів часу до відмови НВЧ модулів

Тип розподілу часу до відмови НВЧ модулів	Формули для ймовірності безвідмовної роботи, щільності розподілу часу до відмови і інтенсивності відмов НВЧ модулів, $\Lambda_M(z_0) = \frac{f_M(z_0)}{P_M(z_0)}$	Примітка, $z_0 = \frac{t_0}{T_{0M}}$
Експоненціальний розподіл	$P_M(z_0) = \exp(-z_0),$ $f_M(z_0) = \lambda_M \exp(-z_0),$ $\Lambda_M(z_0) = \lambda_M$	t_0 – час опера – тивної роботи, $T_{0M} = \frac{1}{\lambda_M}$ – середній наробіток до відмови
Розподіл Вейбулла	$P_M(z_0) = \exp\left[-(K_b z_0)^b\right],$ $f_M(z_0) = bK_b (K_b z_0)^{b-1} \exp\left[-(K_b z_0)^b\right],$ $\Lambda_M(z_0) = bK_b (K_b z_0)^{b-1}$	$T_{0M} = aK_b,$ $K_b = \Gamma\left(1 + \frac{1}{b}\right)$ – гамма-функція
Дифузійний немонотонний розподіл	$P_M(z_0) = \Phi\left(\frac{1-z_0}{v\sqrt{z_0}}\right) - \exp\left(\frac{2}{v^2}\right) \Phi\left(-\frac{1+z_0}{v\sqrt{z_0}}\right),$ $f_M(z_0) = \frac{1}{\mu v z_0 \sqrt{2\pi z_0}} \exp\left[-\frac{(1-z_0)^2}{2v^2 z_0}\right]$	$T_{0M} = \mu$
Узагальнений показовий розподіл	$P_M(z_0) = \left(1 - \frac{\eta}{\lambda}\right) \exp(-2z_0) + \frac{\eta}{\lambda} \exp\left(-\frac{2\eta}{\eta + \lambda} z_0\right),$ $f_M(z_0) = 2 \left[\left(\frac{\eta}{\lambda} - 1\right) \exp(-2z_0) - \frac{\eta^2}{\lambda(\eta + \lambda)} \exp\left(-\frac{2\eta}{\eta + \lambda} z_0\right) \right]$	$T_{0M} = \frac{2}{\eta + \lambda},$ $\eta = 4\lambda$

Суміш розподілів експоненціального та Вейбулла	$P_M(z_0) = 0,5 \exp(-0,625 z_0) + 0,5 \exp[-(2,5 K_b z_0)^m],$ $f_M(z_0) = \lambda \left\{ 0,5 \exp(-0,625 z_0) + 2b K_b (2,5 K_b)^{b-1} \exp[-(2,5 K_b z_0)^b] \right\}$	$T_{0M} = 0,5(T_{0EM} + T_{0WM}),$ $T_{0EM} = 1/\lambda,$ $T_{0WM} = 0,25/\lambda,$ $T_{0M} = 0,625/\lambda$
--	--	--

На рис. 1–2 представлені графіки ймовірності безвідмовної роботи, нормованої щільності розподілу часу до відмови та нормованої інтенсивності відмов у залежності від нормованого оперативного часу роботи НВЧ модуль:

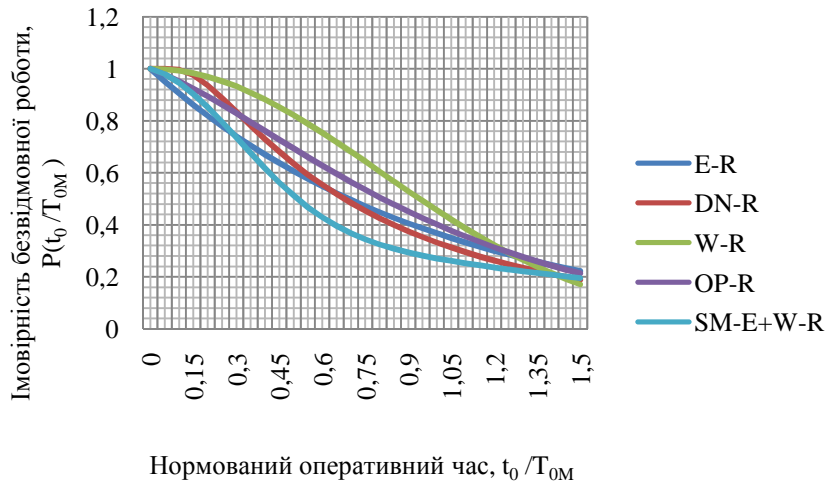


Рис. 1. Графіки ймовірності безвідмовної роботи для п'яти різних законів розподілу часу до відмови НВЧ модулів



Рис. 2. Графіки нормованої інтенсивності відмов для п'яти різних законів розподілу часу до відмови НВЧ модулів

чно формується так:

$$N(t_0 = T_{0A}) = N - m - 1. \quad (1)$$

Якщо $N(t_0 = T_{0A}) = NP_M(t_0 = T_{0A})$, то, з урахуванням виразу (1), формуються рівняння (2) та (3) для визначення середнього наробітку до відмови апертури ФАР:

$$P_M(T_{0A}) = 1 - \frac{m}{N} - \frac{1}{N} \quad (2)$$

або

щільності розподілу часу до відмови та нормованої інтенсивності відмов у залежності від нормованого оперативного часу роботи НВЧ модуль:

– для експоненціального розподілу (E-R);

– дифузійного немонотонного розподілу (DN-R);

– розподілу Вейбулла (W-R);

– узагальненого показового розподілу (OP-R);

– суміш розподілів – експоненціального та Вейбулла (E+W-R).

Визначення. Критерієм (умовою) відмови розподілу структури апертури ФАР, яка включає $N = n + m$ НВЧ модулів (n – основних та m – резервних модулів), є відмова $m + 1$ модуля у момент часу $t_0 = T_{0A}$.

Умова відмови апертури ФАР аналітично

$$\frac{N-m}{N} = P_M(T_{0A}), \quad (3)$$

де $P_M(t_0)$ – імовірність безвідмовної роботи НВЧ модулів.

За вирішеними рівняннями (3) виводяться формули (4) та (5) для визначення нормованого середнього наробітку до відмови T_{0A} апертури ФАР, що складається з модулів:

– для експоненціального розподілу наробітку до відмови НВЧ модулів:

$$\frac{T_{0A}}{T_{0M}} = -\ln\left(1 - \frac{m}{N} - \frac{1}{N}\right); \quad (4)$$

– для розподілу Вейбулла наробітку до відмови НВЧ модулів:

$$\frac{T_{0A}}{T_{0M}} = \frac{\left[-\ln\left(1 - \frac{m}{N} - \frac{1}{N}\right)\right]^{1/b}}{\Gamma\left(1 + \frac{1}{b}\right)}. \quad (5)$$

Нормований середній наробіток до відмови апертури є функцією коефіцієнта надмірності $K_{надм} = \frac{m}{N}$ апертури, тобто $\frac{T_{0A}}{T_{0M}} = f\left(\frac{m}{N}\right)$.

Для визначення середнього наробітку до відмови апертури ФАР під час дифузійного немонотонного розподілу, узагальненому показовому розподілі та суміші розподілів (експоненціальному та Вейбулла) часу до відмови НВЧ модулів застосовується рішення трансцендентних рівнянь (2) або (3).

Імовірність безвідмовної роботи $P_A(z_0)$, щільність розподілу $f_A(z_0)$, інтенсивності відмов $\Lambda_A(z_0)$ апертури ФАР, що включає n – робочих та m – резервних НВЧ модулів, визначаються із застосуванням моделі надійності резервованої системи із дробовою кратністю за такими формулами [2, 3]:

$$P_M(z_0) = \sum_{j=0}^m C_{n+m}^j [P_M(z_0)]^{n+m-j} [1 - P_M(z_0)]^j, \quad (6)$$

$$\frac{f_A(z_0)}{f_M(z_0)} = n C_{n+m}^m [1 - P_M(z_0)]^m [P_M(z_0)]^{n-1}, \quad (7)$$

$$\frac{\Lambda_A(z_0)}{\Lambda_M(z_0)} = \frac{n C_N^m [1 - P_M(z_0)]^m [P_M(z_0)]^n}{\sum_{j=0}^m C_N^j [P_M(z_0)]^{N-j} [1 - P_M(z_0)]^j}, \quad (8)$$

де $P_M(z_0)$ – імовірність безвідмовної роботи підрешітки (каналу) (для апертури приймальної ФАР) та НВЧ модуля (для апертури передавальної ФАР);

$z_0 = \frac{t_0}{T_{0M}}$ – нормований (відносно T_{0M}) час до відмови апертури ФАР.

3. Типові апертури приймальних та передавальних ФАР

Типові апертури приймальних ФАР характеризуються 5% надмірністю:

– апертура на 64 підрешітки, допустима відмова 3-х підрешіток. Тобто, загальна кількість підрешіток (основних та резервних) у приймальній ФАР складає $N = n + m = 64$, а кількість резервних – $m = 3$;

– апертура на 256 підрешіток, допустима відмова 12 підрешіток. Тобто, загальна кількість (основних та резервних) підрешіток у приймальній ФАР складає $N = n + m = 256$, а кількість резервних – $m = 12$.

Типові апертури передавальних ФАР характеризуються 10% надмірністю:

– апертура на 1024 НВЧ випромінювачів, допустима відмова 10% випромінювачів. Конструктивно випромінювачі скомпоновані у НВЧ модулі – по 4 випромінювачі у кожному модулі. Тобто, загальна кількість (основних та резервних) НВЧ модулів у передавальній ФАР складає $N = n + m = 256$, а кількість резервних НВЧ модулів складає $m = 25$;

– апертура на 4096 НВЧ випромінювачів, допустима відмова 10% випромінювачів. Конструктивно випромінювачі скомпоновані у НВЧ модулі – по 4 випромінювачі у кожному модулі. Тобто, загальна кількість (основних та резервних) НВЧ модулів у передавальній ФАР складає $N = n + m = 1024$, а кількість резервних НВЧ модулів складає $m = 102$.

4. Аналіз показників надійності типових апертур ФАР із застосуванням номограм

Номограми для розрахунку нормованого середнього наробітку до відмови апертури ФАР будуються на основі графічного рішення трансцендентного рівняння (2):

$$\frac{m}{N} = 1 - \frac{1}{N} - P_M \left(\frac{T_{0A}}{T_{0M}} \right). \quad (9)$$

На рис. 3 представлена номограма для розрахунку нормованого середнього наробітку до відмови апертур ФАР на 256 модулів НВЧ за різними законами розподілу модулів ФАР.

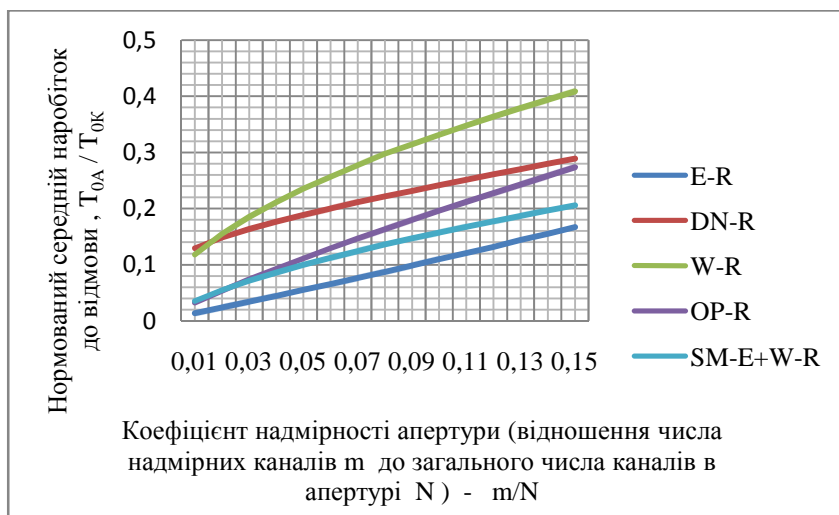


Рис. 3. Номограма для визначення нормованого середнього наробітку до відмови апертури ФАР, що складається із 256 модулів НВЧ, у залежності від коефіцієнта надмірності для п'яти різних законів розподілу часу до відмови НВЧ модулів

ку до відмови апертур ФАР на 256 модулів НВЧ за різними законами розподілу модулів ФАР.

На рис. 4–5 і табл. 2 представлені номограми (у графічному та чисельному вигляді) для розрахунку ймовірності безвідмовної роботи типових апертур ФАР (6) за різними законами розподілу НВЧ модулів ФАР.

На рис. 6–7 і табл. 3 представлені номограми і таблиця для розрахунку нормованих інтенсивностей відмов типових апертур ФАР (8) за різними законами розподілу НВЧ модулів ФАР.

ваних інтенсивностей відмов типових апертур ФАР (8) за різними законами розподілу НВЧ модулів ФАР.

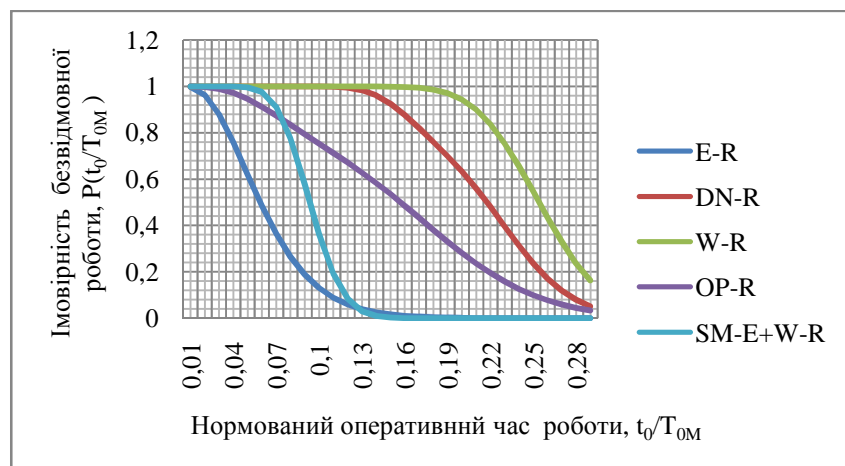


Рис. 4. Номограма для визначення ймовірності безвідмовної роботи апертури приймальної ФАР (апертура складається із 256 НВЧ каналів, у тому числі 12-ти резервних каналів) для п'яти різних законів розподілу часу до відмови НВЧ каналів

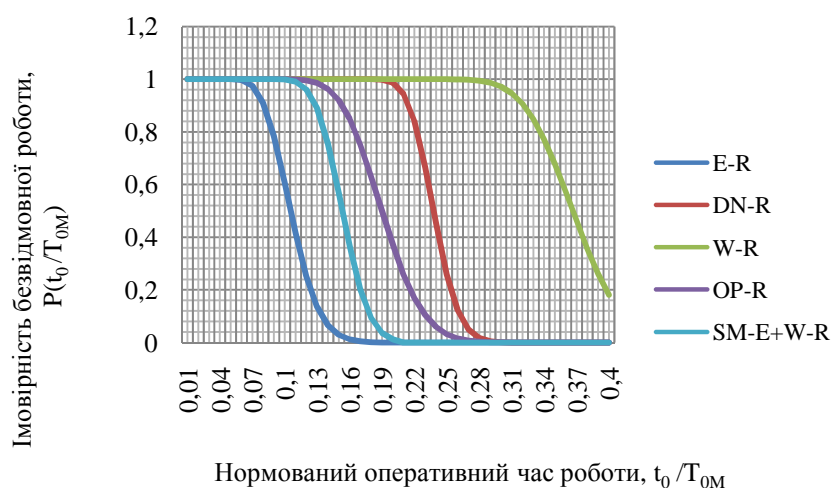


Рис. 5. Номограма для визначення ймовірності безвідмовної роботи апертури передавальної ФАР (апертура складається із 256 НВЧ модулів, у тому числі 25-ти резервних модулів) для п'яти різних законів розподілу часу до відмови НВЧ модулів

Таблиця 2. Визначення ймовірностей безвідмовної роботи типових апертур ФАР для різних розподілів часу до відмови НВЧ модулів

Імовірність безвідмовної роботи апертури ФАР					
z_0	E-R	DN-R	W-R	OP-R	SM(E+W)-R
Приймальна ФАР 64-3					
0,05	0,6190	1,0000	1,0000	0,9470	0,9510
0,10	0,1304	0,9999	0,9984	0,6364	0,5401
0,15	0,0163	0,9226	0,9740	0,2740	0,1208
0,20	0,0016	0,4110	0,8640	0,0804	0,0104
Приймальна ФАР 256-12					
0,05	0,5190	1,0000	1,0000	0,9950	0,9950
0,10	0,0032	1,0000	1,0000	0,5540	0,3647
0,15	0,0000012	0,9860	0,9993	0,0438	0,0024
0,20	0,000000	0,1641	0,9430	0,00053	0,000000
Передавальна ФАР 256-25					
0,05	0,9996	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000

0,10	0,6062	1,0000	1,0000	0,9997	0,9983
0,15	0,0290	1,0000	1,0000	0,9190	0,5670
0,20	0,00014	0,9866	1,0000	0,3719	0,0017

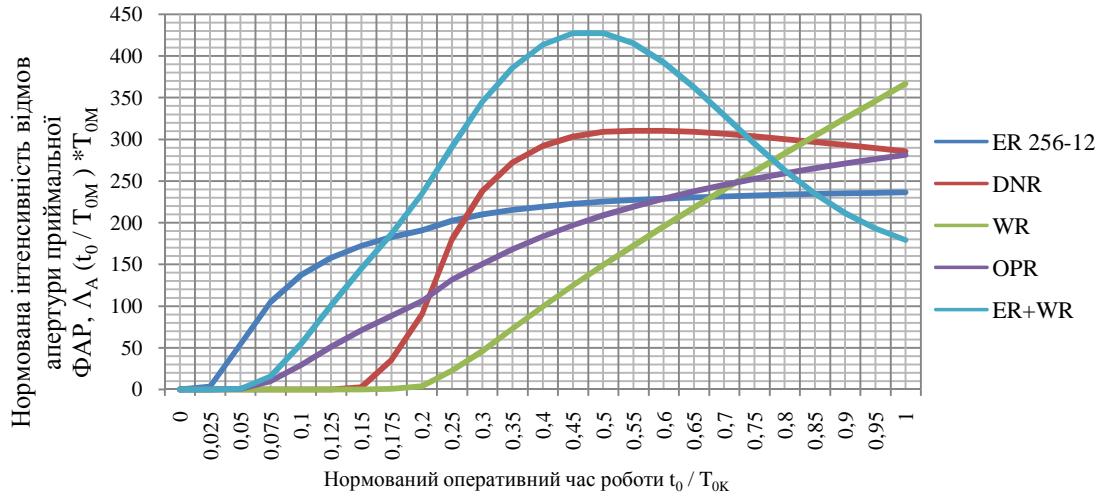


Рис. 6. Номограма для визначення нормованої інтенсивності відмов апертури приймальної ФАР (апертура складається із 256 НВЧ модулів (каналів), у тому числі 12-ти резервних модулів (каналів)) для п'яти різних законів розподілу часу до відмови НВЧ модулів

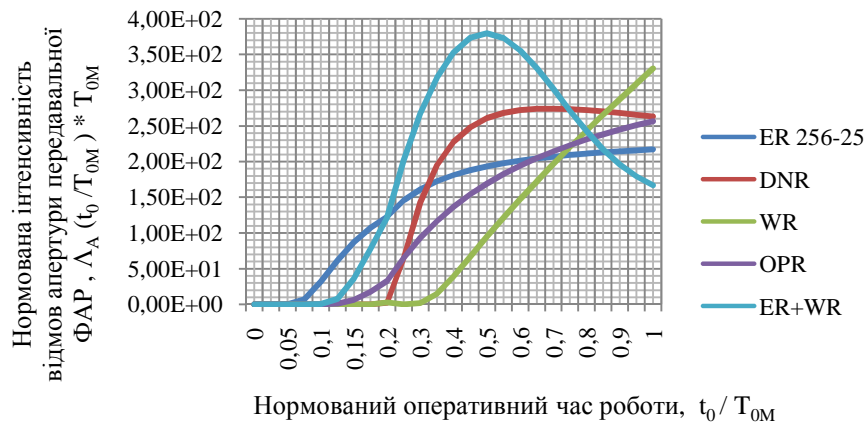


Рис. 7. Номограма для визначення нормованої інтенсивності відмов апертури передавальної ФАР (апертура складається із 256 НВЧ модулів, у тому числі 25-ти резервних модулів) для п'яти різних законів розподілу часу до відмови НВЧ модулів

Таблиця 3. Визначення нормованих інтенсивностей відмов типових апертур ФАР для різних розподілів часу до відмови НВЧ модулів

Нормована інтенсивність відмов апертури ФАР					
z_0	E-R	DN-R	W-R	OP-R	SM(E+W)-R
Приймальна ФАР 64-3					
0,05	22,5	0,00	0,013	3,60	3,92
0,10	37,7	0,03	0,12	12,5	20,12
0,15	44,7	5,9	1,12	20,9	39,8
0,20	48,7	27,7	4,02	28,0	58,5

Приймальна ФАР 256-12					
0,05	54,3	0,00	0,00	0,90	0,84
0,10	137	0,00	0,00	29,2	54,6
0,15	172,3	2,5	0,081	70,9	145
0,20	191	85,6	3,7	103,9	224,6
Передавальна ФАР 256-25					
0,05	0,11	0,00	0,00	0,00	0,00
0,10	31,6	0,00	0,00	0,05	0,333
0,15	87,0	0,00	0,00	6,1	35,7
0,20	123	2,2	2,8	32,8	121,4

5. Оцінка ефективності методів резервування НВЧ модулів апертур ФАР

Ефективність методів резервування НВЧ модулів апертур ФАР оцінюється виграшем у надійності: за середнім наробітком на відмову G_T і за ймовірністю відмови G_Q .

Виграшем у надійності називається відношення показника надійності резервованої системи до відповідного показника надійності нерезеровованої системи [3].

Формули для виграшу у надійності за середнім наробітком до відмови мають такий вигляд:

– для експоненціального розподілу часу до відмови НВЧ модулів:

$$G_T = -(N - m) \ln \left(1 - \frac{m}{N} - \frac{1}{N} \right); \quad (10)$$

– для розподілу Вейбулла часу до відмови НВЧ модулів:

$$G_T = \frac{(N - m) \left[-\ln \left(1 - \frac{m}{N} - \frac{1}{N} \right) \right]^{1/b}}{\Gamma \left(1 + \frac{1}{b} \right)}; \quad (11)$$

– для довільного розподілу часу до відмови НВЧ модулів:

$$G_T = \frac{(N - m) T_{0A}}{T_{0M}}, \quad (12)$$

де відношення $\frac{T_{0A}}{T_{0M}}$ визначається за рішенням трансцендентних рівнянь (2) або (3).

Виграш у надійності за ймовірністю до відмови визначається за формулою

$$G_Q = \frac{1 - [P_M(z_0)]^{N-m}}{1 - \sum_{j=0}^m [P_M(z_0)]^{N-j} [1 - P_M(z_0)]^j}. \quad (13)$$

У табл. 4 показані виграші у надійності за середнім наробітком до відмови G_T для типових структур ФАР за п'ятьма різними законами розподілу часу до відмови.

Таблиця 4. Визначення виграшей у надійності за середнім наробітком на відмову під час застосування типових апертур ФАР для різних розподілів часу до відмови НВЧ модулів

Виграш у надійності за середнім наробітком на відмову	Експоненціальний розподіл	Узагальнений показовий розподіл	Суміш із двох розподілів: експоненціального і Вейбулла	Розподіл Вейбулла	Дифузійний немонотонний розподіл
Приймальна ФАР 64-3					
G_T	3,93	7,81	6,74	17,5	12,1
Приймальна ФАР 256-12					
G_T	12,7	26,1	23,3	62,9	45,2
Передавальна ФАР 256-25					
G_T	24,7	44,9	35,7	85,3	55,25

У табл. 5 показані виграші у надійності за ймовірністю відмови G_Q для типових структур ФАР за п'ятьма різними законами розподілу часу до відмови (за нормований час до відмови $z_0 = 0,1$).

Таблиця 5. Визначення виграшів у надійності за ймовірністю відмови під час застосування типових апертур ФАР для різних розподілів часу до відмови НВЧ модулів

Виграш у надійності за ймовірністю відмови	Експоненціальний розподіл	Узагальнений показовий розподіл	Суміш із двох розподілів: експоненціального і Вейбулла	Розподіл Вейбулла	Дифузійний немонотонний розподіл
Приймальна ФАР 64-3					
$G_Q(z_0)$	1,15	2,61	2,10	233	1528
Приймальна ФАР 256-12					
$G_Q(z_0)$	1,003	2,24	1,574	$5,09 \cdot 10^6$	$7,7 \cdot 10^9$
Передавальна ФАР 256-25					
$G_Q(z_0)$	2,54	3809	579,3	$1,26 \cdot 10^{14}$	∞

6. Висновки

Представлені у цій статті математичні моделі можуть знайти широке застосування під час імовірнісного аналізу надійності РЛС із ФАР на ранніх стадіях проектування та для побудови системи оптимального технічного обслуговування. Вагому практичну цікавість можуть представляти формули та номограми для визначення показників надійності розподільних структур ФАР, які ураховують одночасний наступ раптових та поступових відмов НВЧ модулів ФАР.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Надежность технических систем: справочник / Ю.К. Беляев, В.А. Богатырев, В.В. Болотин [и др.]; под ред. И.А. Ушакова. – М.: Радио и связь, 1985. – 606 с.
2. Черкесов Г.Н. Оценка надежности систем с учетом ЗИП: учебн. пособие / Г.Н. Черкесов. – СПб.: БХВ-Петербург, 2012. – 478 с.
3. Половко А.М. Основы теории надежности: практикум / А.М. Половко, С.В. Гуров. – СПб.: БХВ-Петербург, 2006. – 560 с.

Стаття надійшла до редакції 11.03.2014