УДК 519.6

А.В. ШОЛОХОВ

ОБ ЭЛЛИПСОИДАЛЬНОЙ АППРОКСИМАЦИИ СУММЫ ДВУХ ЭЛЛИПСОИДОВ ПО МИНИМУМУ ОБЪЕМА

Ключевые слова: *гарантированное оценивание, множество достижимости, эллипсоидальная аппроксимация, многомерный объем эллипсоида, оператор растяжения–сжатия, выпуклая собственная функция.*

ВВЕДЕНИЕ

Эллипсоидальная аппроксимация множеств достижимости динамических систем при гарантированном оценивании является распространенным методом [1]. При действии на динамическую систему неопределенных возмущений, принимающих значения из эллипсоидального множества, для получения оценок состояния системы необходимо аппроксимировать сумму двух эллипсоидальных множеств. При этом решается задача оптимизации аппроксимирующего эллипсоида в смысле минимума какой-либо его характеристики. Рассмотрим оптимизацию по критерию минимума объема. Решение данной задачи дано в [1], однако для этого требуется одновременная диагонализация двух квадратичных форм и решение задачи условной минимизации с использованием множителей Лагранжа. В данной статье предложено иное решение. Также рассмотрен случай одновременной вырожденности матриц суммируемых эллипсоидов при решении задачи минимизации. Предлагаемый способ решения применим и для минимизации проекции аппроксимирующего эллипсоида на заданное подпространство [2].

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Даны два эллипсоида: E_1 и E_2, заданные в виде

$$E_j(a_j, Q_j) = \{x \in R^n : (x - a_j)^{\mathrm{T}} Q_j^{-1} (x - a_j) \le 1\}, \quad j = 1, 2, \tag{1}$$

либо

$$E_j(a_j, Q_j) = \{x \in R^n : \langle x, l \rangle \le \langle a_j, l \rangle + \sqrt{l^{\mathrm{T}} Q_j l} \quad \forall\, l \in R^n\}, \quad j = 1, 2. \tag{2}$$

Здесь $a_j \in R^n$ — центр j-го эллипсоида в n-мерном евклидовом пространстве; $Q_j \in R^{n \times n}$ — симметрическая вещественная матрица j-го эллипсоида, положительно-определенная в записи (1) или неотрицательно-определенная в записи (2).

Запишем условие включения суммы двух эллипсоидов в аппроксимирующий эллипсоид E_Σ с матрицей Q_Σ, воспользовавшись аппаратом опорных функций [3]:

$$\sqrt{l^{\mathrm{T}} Q_\Sigma l} \ge \sqrt{l^{\mathrm{T}} Q_1 l} + \sqrt{l^{\mathrm{T}} Q_2 l} \quad \forall\, l \in R^n. \tag{3}$$

В формуле (3) справа записана сумма опорных функций эллипсоидов E_1 и E_2, а слева — опорная функция аппроксимирующего эллипсоида E_Σ. На основе (3) определим параметрическое выражение, позволяющее получать матрицу Q_Σ эллипсоида, оптимального по заданному критерию.

Утверждение 1. Для эллипсоида, заданного матрицей

$$Q_\Sigma = \gamma_1 Q_1 + \gamma_2 Q_2 \quad \forall\, \gamma_1, \gamma_2 > 0, \ \gamma_1^{-1} + \gamma_2^{-1} = 1, \tag{4}$$

выполняется включение $E_\Sigma \supset E_1 + E_2$.

Доказательство. Поскольку левая и правая части (3) неотрицательны, возведение их в квадрат только усилит неравенство

$$l^{\mathrm{T}} Q_{\Sigma} l \geq l^{\mathrm{T}} Q_1 l + 2\sqrt{l^{\mathrm{T}} Q_1 l l^{\mathrm{T}} Q_2 l} + l^{\mathrm{T}} Q_2 l \quad \forall\, l \in R^n. \tag{5}$$

В (5) подставим вместо Q_{Σ} правую часть (4) с учетом $\gamma_2 = \gamma_1 (\gamma_1 - 1)^{-1}$:

$$\gamma_1 l^{\mathrm{T}} Q_1 l + \gamma_1 (\gamma_1 - 1)^{-1} l^{\mathrm{T}} Q_2 l \geq l^{\mathrm{T}} Q_1 l + 2\sqrt{l^{\mathrm{T}} Q_1 l l^{\mathrm{T}} Q_2 l} + l^{\mathrm{T}} Q_2 l. \tag{6}$$

Перегруппировав члены в (6), получим

$$(\gamma_1 - 1) l^{\mathrm{T}} Q_1 l + (\gamma_1 - 1)^{-1} l^{\mathrm{T}} Q_2 l \geq 2\sqrt{l^{\mathrm{T}} Q_1 l l^{\mathrm{T}} Q_2 l}. \tag{7}$$

Из $\gamma_2 = \gamma_1 (\gamma_1 - 1)^{-1}$ и условия $\gamma_1, \gamma_2 > 0$ имеем $\gamma_1 - 1 > 0$. Умножим (7) на $\gamma_1 - 1$ и перенесем в (7) все члены влево:

$$\begin{aligned} & l^{\mathrm{T}} Q_2 l - 2(\gamma_1 - 1)\sqrt{l^{\mathrm{T}} Q_1 l l^{\mathrm{T}} Q_2 l} + (\gamma_1 - 1)^2 l^{\mathrm{T}} Q_1 l = \\ & = \left((\gamma_1 - 1)\sqrt{l^{\mathrm{T}} Q_1 l} - \sqrt{l^{\mathrm{T}} Q_2 l} \right)^2 \geq 0\,. \end{aligned} \tag{8}$$

Из (8) следует справедливость неравенства (6) и утверждения 1.

Ставится задача: минимизировать многомерный объем аппроксимирующего эллипсоида. Покажем, что эту задачу можно представить как минимизацию строго выпуклой вниз собственной функции $f(\gamma_1)$ [3] с параметрами из элементов Q_1, Q_2, дифференцируемую на всем множестве значений $1 < \gamma_1 < \infty$. Далее индекс при γ_1 опустим.

МИНИМИЗАЦИЯ АППРОКСИМИРУЮЩЕГО ЭЛЛИПСОИДА В СМЫСЛЕ МИНИМУМА ОБЪЕМА

Объем эллипсоида пропорционален его определителю [1], поэтому достаточно будет минимизировать определитель.

Случай 1. Один из эллипсоидов вырожден. Тогда (4) запишем следующим образом:

$$Q_{\Sigma} = \gamma (\gamma - 1)^{-1} Q_1 ((\gamma - 1) I_n + Q_1^{-1} Q_2),\ Q_1 > 0,\ Q_2 \geq 0 \tag{9}$$

Здесь $I_n \in R^{n \times n}$ — единичная матрица; $\operatorname{rank} Q_2 = m,\ 0 < m \leq n.$

Определитель выражения (9) представим как

$$|Q_{\Sigma}| = \gamma^n (\gamma - 1)^{-n} |Q_1| |(\gamma - 1) I_n + Q_1^{-1} Q_2|. \tag{10}$$

Из (10) следует, что для минимума $|Q_{\Sigma}|$ достаточно минимизировать выражение $\gamma^n (\gamma - 1)^{-n} |(\gamma - 1) I_n + Q_1^{-1} Q_2|$. Тогда запишем

$$f(\gamma) = \frac{\gamma^n}{(\gamma - 1)^n} |(\gamma - 1) I_n + Q_1^{-1} Q_2|, \tag{11}$$

$$\frac{df(\gamma)}{d\gamma} = \frac{-n\gamma^{n-1}}{(\gamma - 1)^{n+1}} |(\gamma - 1) I_n + Q_1^{-1} Q_2| + \frac{\gamma^n}{(\gamma - 1)^n} \frac{d}{d\gamma} |(\gamma - 1) I_n + Q_1^{-1} Q_2|. \tag{12}$$

Для производной определителя в (12) используем следующую формулу [4]:

$$\frac{d|Q_{\Sigma}(\gamma)|}{d\gamma} = |Q_{\Sigma}(\gamma)| \operatorname{tr} \left(Q_{\Sigma}^{-1}(\gamma) \frac{dQ_{\Sigma}(\gamma)}{d\gamma} \right),\ |Q_{\Sigma}(\gamma)| \neq 0\,. \tag{13}$$

Тогда $\frac{d}{d\gamma}|(\gamma-1)I_n+Q_1^{-1}Q_2|=|(\gamma-1)I_n+Q_1^{-1}Q_2|\operatorname{tr}((\gamma-1)I_n+Q_1^{-1}Q_2)^{-1}$. Выражение $(\gamma-1)I_n+Q_1^{-1}Q_2$ представим в виде $V((\gamma-1)I_n+\Lambda)U^{\mathrm{T}}$, где $U,V\in R^{n\times n}$, $VU^{\mathrm{T}}=I_n$ — матрицы собственных векторов [5] в общем случае несимметричной матрицы $Q_1^{-1}Q_2$; $\Lambda\in R^{n\times n}$ — диагональная матрица собственных чисел матрицы $Q_1^{-1}Q_2$, $\operatorname{rank}Q_1^{-1}Q_2=\operatorname{rank}Q_2=m\le n$ [5], среди которых $m\ne 0$ и $n-m=0$. Собственные векторы, соответствующие нулевым собственным значениям, выбираются произвольно с сохранением свойств ортогональности $VU^{\mathrm{T}}=I_n$ и единичной нормы. Так как у прямой матрицы и обратной к ней собственные векторы совпадают, собственные числа являются взаимно обратными [5], а также $\operatorname{tr}VAU^{\mathrm{T}}=\operatorname{tr}VU^{\mathrm{T}}A=\operatorname{tr}A$ [5], выражение $\operatorname{tr}((\gamma-1)I_n+Q_1^{-1}Q_2)^{-1}$ можно представить как $\sum_{i=1}^{n-m}(\gamma-1)^{-1}+\sum_{i=1}^{m}(\lambda_i+\gamma-1)^{-1}$. Приравняв (12) к нулю, выполнив подстановки и сокращения, получим

$$(n-m)(\gamma-1)-m+\gamma(\gamma-1)\sum_{i=1}^{m}\frac{1}{\gamma-1+\lambda_i}=0. \tag{14}$$

Покажем, что функция (11) собственная и строго выпуклая [3]. Представим (11) в виде

$$f(\delta)=\frac{(\delta+1)^n}{\delta^n}|\delta I_n+Q_1^{-1}Q_2|=\frac{(\delta+1)^n}{\delta^{n-m}}\prod_{i=1}^{m}(\delta+\lambda_i),\ \ m\le n,\ \ \delta=\gamma-1. \tag{15}$$

В правой части (15) определитель записан как произведение собственных чисел матрицы $\delta I_n+Q_1^{-1}Q_2$, которые можно представить в виде $\delta+\lambda_i$, где λ_i обозначает как нулевые собственные значения, которых $n-m$, так и отличные от нуля. Поскольку определитель $|\delta I_n+Q_1^{-1}Q_2|$ можно записать как $|Q_1^{-1/2}||\delta I_n+$ $+Q_1^{-1/2}Q_2Q_1^{-1/2}||Q_1^{1/2}|$, то числа λ_i будут вещественными и неотрицательными в силу симметричности и неотрицательной определенности матрицы $Q_1^{-1/2}Q_2Q_1^{-1/2}$ [5]. В этом случае числитель функции $f(\delta)$ можно представить как полином степени $n+m$ с положительными вещественными коэффициентами [6]. Запишем $f(\delta)=\varphi(\delta)\psi(\delta)$, где $\varphi(\delta)=(\delta+1)^n\prod_{i=1}^{m}(\delta+\lambda_i)$, $\psi(\delta)=\delta^{-(n-m)}$ и $\lambda_i\ne 0$. На множестве значений $0<\delta<\infty$ функция $\varphi(\delta)$ строго выпуклая, положительная и возрастающая, а функция $\psi(\delta)$ строго выпуклая, положительная и убывающая. Произведение этих функций представляет собой строго выпуклую положительную функцию [7], при этом $\lim f(\delta)\xrightarrow[\delta\to 0,\,\delta\to\infty]{}\infty$. Тогда на основании свойств выпуклой функции по теореме Ролля о корнях производной [8] функция $f(\delta)$ имеет единственную точку, в которой ее производная обращается в нуль и функция $f(\delta)$ достигнет минимума. По полученным результатам сформулируем теорему.

Теорема 1. Матрица эллипсоида E_Σ, аппроксимирующего сумму двух эллипсоидов, один из которых может быть вырожденным, имеющая минимальный определитель, получается из равенства (4), где оптимальные значения $\gamma_{1,*}$ и $\gamma_{2,*}=\frac{\gamma_{1,*}}{\gamma_{1,*}-1}$ определяются единственным положительным корнем уравнения (14).

Замечание 1. Покажем, что уравнение (14) соответствует уравнению в работе [1]. Разделим (14) на γ и выполним перенос слагаемых:

$$(\gamma-1)\sum_{i=1}^{m}\frac{1}{\gamma-1+\lambda_i}+\frac{(n-m)(\gamma-1)}{\gamma}=\frac{m}{\gamma}, \tag{16}$$

сделаем замену $\delta=\gamma-1$, разделим (16) на δ, к левой и правой частям прибавим слагаемое $\dfrac{n-m}{\delta}$ и в левой части внесем его под знак суммы. После преобразований получим

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\delta+\lambda_i}=\frac{n}{\delta(\delta+1)};\ \lambda_i\neq 0_i,\ 1\le i\le m;\ \lambda_i=0,\ m<i\le n. \tag{17}$$

Уравнение (17) при замене обозначений параметров совпадает с уравнением для получения оптимального эллипсоида в работе [1].

Покажем, что λ_i, $i=1,\ldots,n$, из уравнения (16) — корни уравнения $|Q_2-\lambda Q_1|=0$.

Решение этого уравнения приводит к аналогичному уравнению в работе [1] .

Поскольку определитель произведения матриц равен произведению определителей матриц и из условия $|Q_1|>0$, можно записать $|Q_2-\lambda Q_1|=|Q_1||Q_1^{-1}Q_2-\lambda I_n|=0$ и далее $|Q_1^{-1}Q_2-\lambda I_n|=0$. Отсюда следует идентичность указанных уравнений.

Замечание 2. Задача имеет геометрическое толкование. Представим (4) в виде

$$Q_\Sigma=\gamma\sqrt{Q_1}\left(I_n+\frac{1}{(\gamma-1)}\sqrt{Q_1^{-1}}Q_2\sqrt{Q_1^{-1}}\right)\sqrt{Q_1}. \tag{18}$$

Здесь $\sqrt{\cdot}$ — квадратный корень из матрицы (см. [5]).

Из (18) следует, что один из эллипсоидов (в данном случае E_2) может быть вырожденным. Выражение в скобках обозначим и запишем в виде

$$P_{B^{-2}}(G)=I_n+\frac{1}{(\gamma-1)}\sqrt{Q_1^{-1}}Q_2\sqrt{Q_1^{-1}}=I_n-G(I_m-B^{-2})(G^{\mathrm T}G)^{-1}G^{\mathrm T}. \tag{19}$$

Здесь $G=\sqrt{Q_1^{-1}}S_2\sqrt{\Lambda_2}$; $\Lambda_2\in R^{m\times m}$, $m=\operatorname{rank}Q_2$ — диагональная матрица ненулевых собственных чисел матрицы Q_2; $S_2\in R^{n\times m}$ — матрица собственных векторов матрицы Q_2, соответствующих ненулевым собственным числам, при этом $S_2\sqrt{\Lambda_2}(S_2\sqrt{\Lambda_2})^{\mathrm T}=Q_2$; $I_m\in R^{m\times m}$ — единичная матрица; $B^{-2}\in R^{m\times m}$ — диагональная матрица с диагональными элементами $\beta_i^{-2}>1$, $i=1,\ldots,m$. Правая часть (19) — оператор растяжения–сжатия [9] с коэффициентами β_i^{-1}, $i=1,\ldots,m$, по m направлениям, определяемым столбцами матрицы G [10]. Согласно (19) $(\gamma-1)^{-1}GG^{\mathrm T}=-G(I_m-B^{-2})(G^{\mathrm T}G)^{-1}G^{\mathrm T}$. Представим B^{-2} как функцию от γ.

Преобразуем $\dfrac{1}{(\gamma-1)}GG^{\mathrm T}=\dfrac{1}{(\gamma-1)}GG^{\mathrm T}G(G^{\mathrm T}G)^{-1}G^{\mathrm T}=-G(I_m-B^{-2})\times$ $\times(G^{\mathrm T}G)^{-1}G^{\mathrm T}$ и примем

$$B^{-2}=I_m+\frac{1}{(\gamma-1)}G^{\mathrm T}G. \tag{20}$$

Определитель матрицы (18) с учетом (19) и свойства оператора растяжения– сжатия по m направлениям $|P_{B^{-2}}(G)|=\prod_{i=1}^{m}\beta_i^{-2}$ [10] запишем как $|Q_\Sigma|=\gamma^n\prod_{i=1}^{m}\beta_i^{-2}|Q_1|$. Отсюда следует, что для минимума $|Q_\Sigma|$ необходим минимум $\gamma^n\prod_{i=1}^{m}\beta_i^{-2}$. Тогда

$$f(\gamma)=\gamma^n\left|I_m+\frac{1}{(\gamma-1)}G^{\mathrm{T}}G\right|=\frac{\gamma^n}{(\gamma-1)^m}|(\gamma-1)I_m+G^{\mathrm{T}}G|. \tag{21}$$

Продифференцируем (21) по γ:

$$\frac{df(\gamma)}{d\gamma}=\frac{d}{d\gamma}\left(\frac{\gamma^n}{(\gamma-1)^m}\right)|(\gamma-1)I_m+G^{\mathrm{T}}G|+\left(\frac{\gamma^n}{(\gamma-1)^m}\right)\frac{d}{d\gamma}|(\gamma-1)I_m+G^{\mathrm{T}}G|. \tag{22}$$

Здесь $\frac{d}{d\gamma}|(\gamma-1)I_m+G^{\mathrm{T}}G|=|(\gamma-1)I_m+G^{\mathrm{T}}G|\operatorname{tr}((\gamma-1)I_m+G^{\mathrm{T}}G)^{-1}$ (см. [4]).

Приравняем (22) к нулю и сократим общие не равные нулю множители:

$$(n-m)\gamma-n+\gamma(\gamma-1)\operatorname{tr}((\gamma-1)I_m+G^{\mathrm{T}}G)^{-1}=0. \tag{23}$$

Представим $(\gamma-1)I_m+G^{\mathrm{T}}G=(\gamma-1)I_m+S_P\Lambda_P S_P^{\mathrm{T}}=S_P((\gamma-1)I_m+\Lambda)S_P^{\mathrm{T}}$. Здесь Λ_P — диагональная матрица собственных чисел $\lambda_{P,i}$, $i=1,..,m$, матрицы $G^{\mathrm{T}}G$; $S_P\in R^{m\times m}$ — ортогональная матрица $S_P^{\mathrm{T}}S_P=I_m$ собственных векторов матрицы $G^{\mathrm{T}}G$. Поскольку собственные числа обратной матрицы являются обратными собственным числам исходной матрицы, равенство (23) можно переписать в следующем виде:

$$(n-m)(\gamma-1)-m+\gamma(\gamma-1)\sum_{i=1}^{m}\frac{1}{\delta+\lambda_{P,i}}=0.$$

Докажем, что $\lambda_{P,i}$, $i=1,..,m$, равны λ_i, $i=1,..,m$, из уравнения (14), которые являются ненулевыми корнями уравнения $|Q_2-\lambda Q_1|=0$. Представим $|Q_2-\lambda Q_1|=$ $=\left|\sqrt{Q_1}\left(\sqrt{Q_1^{-1}}Q_2\sqrt{Q_1^{-1}}-\lambda I_n\right)\sqrt{Q_1}\right|=0$ и далее на основе свойств определителя произведения матриц [5] запишем $\left|\sqrt{Q_1}\right|\left|\sqrt{Q_1^{-1}}Q_2\sqrt{Q_1^{-1}}-\lambda I_n\right|\left|\sqrt{Q_1}\right|=0$. Поскольку матрица Q_1 положительно-определенная по условию, то $|\sqrt{Q_1}|>0$. Тогда $\left|\sqrt{Q_1^{-1}}Q_2\sqrt{Q_1^{-1}}-\lambda I_n\right|=0$. Так как $\sqrt{Q_1^{-1}}Q_2\sqrt{Q_1^{-1}}=GG^{\mathrm{T}}$ и ненулевые собственные числа произведений матриц $G^{\mathrm{T}}G$ и GG^{T} совпадают [5], решением уравнения $\left|\sqrt{Q_1^{-1}}Q_2\sqrt{Q_1^{-1}}-\lambda I_n\right|=0$ будут $\lambda_i\neq 0_i$, $1\le i\le m$; $\lambda_i=0$, $m<i\le n$, что и требовалось доказать.

Случай 2. Оба суммируемых эллипсоида вырождены. Один из эллипсоидов, например множества возмущений движения динамической системы, изначально может быть вырожденным [11]. Однако нельзя исключить ситуации, когда и эллипсоид множества возможных состояний системы, ввиду периодического получения дополнительной информации или вследствие свойств динамики системы, может выродиться. Вырождение обоих эллипсоидов может быть как в общем, так и в различных подпространствах. В первом варианте размерность объема понижается.

Пусть rank $Q_1 = p < n$ с ненулевыми собственными числами $\lambda_{1,i}$, $i = 1, \ldots, p$, и rank $Q_2 = m < n$. Представим $Q_1 = S_1 D_1 S_1^{\mathrm{T}}$; $S_1 \in R^{n\times n}$ — невырожденная матрица такая, что $|S_1 S_1^{\mathrm{T}}| = \prod_{i=1}^{p} \lambda_{1,i}$. Столбцы матрицы S_1 — собственные векторы матрицы Q_1. Те из них, которые соответствуют ненулевым собственным значениям $\lambda_{1,i}$ матрицы Q_1, имеют норму, равную $\sqrt{\lambda_{1,i}}$. Собственные векторы, соответствующие нулевым собственным значениям матрицы Q_1, имеют единичную норму и ортогональны остальным векторам-столбцам матрицы S_1. Матрица S_1^{-1} может быть получена из матрицы S_1 делением соответствующих j-х столбцов на $\sqrt{\lambda_{1,i}}$ $(j = i)$ и последующим транспонированием; $D_1 \in R^{n\times n}$ — диагональная матрица, диагональ которой состоит из p единиц, соответствующих ненулевым собственным значениям матрицы Q_1, и $n - p$ нулей. Так как преобразование невырожденное, то rank $S_1^{-1} Q_2 S_1^{-\mathrm{T}} =$ rank $Q_2 = m < n$. Запишем (4) следующим образом:

$$Q_\Sigma = \frac{\gamma}{\gamma - 1}((\gamma - 1) S_1 D_1 S_1^{\mathrm{T}} + Q_2) = \frac{\gamma}{\gamma - 1} S_1 S_2 ((\gamma - 1) D_1 + D_2) S_2^{\mathrm{T}} S_1^{\mathrm{T}}.$$

Здесь $S_2 S_2^{\mathrm{T}} = S_2^{\mathrm{T}} S_2 = I_n \in R^{n\times n}$ — невырожденное ортогональное преобразование, приводящее матрицу $S_1^{-1} Q_2 S_1^{-\mathrm{T}}$ к диагональному виду D_2, т.е. $S_2 D_2 S_2^{\mathrm{T}} = S_1^{-1} Q_2 S_1^{-\mathrm{T}}$; $D_2 \in R^{n\times n}$ — диагональная матрица, диагональ которой состоит из m положительных чисел, соответствующих ненулевым собственным значениям матрицы Q_2, и $n - m$ нулей. Если матрица $(\gamma - 1) D_1 + D_2$ вырожденная, т.е. нулевые диагональные элементы матриц D_1 и D_2 совпадают, то переходим к пониженной размерности матрицы $Q_\Sigma \in R^{k\times k}$, $k < n$, вычеркиванием совпадающих нулевых строк и столбцов. Уравнение (11) запишем как $f(\gamma) = \gamma^k (\gamma - 1)^{-k} |(\gamma - 1)\tilde{D}_1 + \tilde{D}_2|$, где $\tilde{D}_1, \tilde{D}_2 \in R^{k\times k}$ — матрицы, полученные из D_1, D_2 вычеркиванием совпадающих нулевых строк и столбцов. Аналогично (14) получим

$$-k + \gamma(\gamma - 1)\left(\sum_{i=1}^{p} \frac{1}{\gamma - 1 + \tilde{\lambda}_{2,i}} + \sum_{i=p+1}^{k} \frac{1}{\tilde{\lambda}_{2,i}} \right) = 0.$$

Здесь $\tilde{\lambda}_{2,i}$ для $i = 1, .., p$ — диагональные элементы матрицы $\tilde{D}_2$, в том числе и нулевые, соответствующие единицам главной диагонали матрицы $\tilde{D}_1$; $\tilde{\lambda}_{2,i}$ для $i = p+1, \ldots, k$ — ненулевые диагональные элементы матрицы $\tilde{D}_2$, которым соответствуют нулевые диагональные элементы матрицы $\tilde{D}_1$.

Решение задачи аппроксимации в случае 2 требует больше арифметических операций. При ограниченных вычислительных ресурсах и возможности вырождения обоих эллипсоидов можно рекомендовать применять алгоритм согласно случаю 1 до тех пор, пока будет вырожден только один эллипсоид. Перейти от алгоритма 1 к алгоритму 2 можно, например, по ограничению на обусловленность матрицы Q_1.

Случай 3. Для минимальной аппроксимации проекции суммы двух эллипсоидов на заданное подпространство [2] выражение (4) запишем следующим образом:

$$V^{\mathrm{T}} Q_\Sigma V = \gamma_1 V^{\mathrm{T}} Q_1 V + \gamma_2 V^{\mathrm{T}} Q_2 V, \; V \in R^{n\times l}, \; V^{\mathrm{T}} V = I_l, \; l \le n.$$

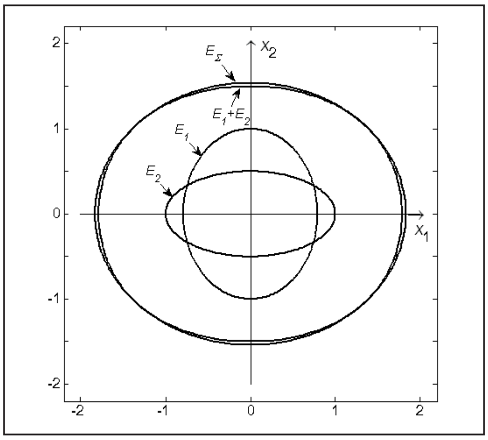

Рис. 1

Здесь V — матрица из ортогональных вектор-столбцов с единичной нормой, определяющих в заданной системе координат требуемое подпространство. Решение этой задачи аналогично предыдущим алгоритмам.

При численном моделровании в MATLAB были приняты следующие значения: $Q_1 = \mathrm{diag}\,\{0{,}625; 1\}$, $Q_2 = \mathrm{diag}\,\{1; 0{,}25\}$ — диагональные матрицы. Получена матрица $Q_\Sigma = \mathrm{diag}\,\{1{,}958; 2{,}675\}$ оптимального по минимуму объема эллипсоида.

На рис. 1 показаны суммируемые эллипсоиды E_1, E_2, их геометрическая сумма и аппроксимирующий эллипсоид E_Σ.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Решение задачи оптимальной эллипсоидальной аппроксимации по критерию минимума объема суммы двух эллипсоидов получено более простым способом, чем в работе [1]. Кроме того, решение этой задачи, когда оба суммируемых эллипсоида вырождены, может использоваться в практических случаях, когда известное решение (см. [1]) применить невозможно.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Черноусько Ф.Л. Оценивание фазового состояния динамических систем. Метод эллипсоидов. — М.: Наука, 1988. — 320 с.
2. Черноусько Ф.Л. Об оптимальном эллипсоидальном оценивании для динамических систем, подверженных неопределенным возмущениям // Кибернетика и системный анализ. — 2002. — № 2. — С. 85–95.
3. Пшеничный Б.Н. Выпуклый анализ и экстремальные задачи. — М.: Наука, 1980. — 320 с.
4. Магнус Я.Р., Нейдеккер Х. Матричное дифференциальное исчисление с приложениями к статистике и эконометрике. — М.: Физматлит, 2002. — 496 с.
5. Хорн Р., Джонсон Ч. Матричный анализ. — М.: Мир, 1989. — 655 с.
6. Винберг Э.Б. Курс алгебры. — М.: Факториал Пресс, 2001. — 544 с.
7. Вирченко Н.А., Ляшко И.И., Швецов К.И. Графики функций: Справочник. — К.: Наук. думка, 1981. — 320 с.
8. Шилов Г.Е. Математический анализ (функции одного переменного). — М.: Наука, 1969. — Ч. 1–2. — 528 с.
9. Шор Н.З. Метод отсечения с растяжением пространства для решения задач выпуклого программирования // Кибернетика. — 1977. — № 1. — С. 94–95.
10. Бакан Г.М., Куссуль Н.Н., Шелестов А.Ю. Размытая эллипсоидальная идентификация параметров многомерных линейных статических объектов // Автоматика. — 1993. — № 5. — С. 50–60.
11. Бакан Г.М., Шолохов А.В. К определению множества достижимости линейной управляемой системы // Проблемы управления и информатики. — 2005. — № 4. — С. 15–24.

Поступила 10.09.2010