УДК 519.85

О.А. ЕМЕЦ, Е.М. ЕМЕЦ, Ю.Ф. ОЛЕКСИЙЧУК

ПРЯМОЙ МЕТОД ОТСЕЧЕНИЙ ДЛЯ ЗАДАЧ КОМБИНАТОРНОЙ ОПТИМИЗАЦИИ С ДОПОЛНИТЕЛЬНЫМИ ОГРАНИЧЕНИЯМИ

Ключевые слова: *комбинаторная оптимизация, полиразмещение, комбинаторный метод отсечений.*

ВВЕДЕНИЕ

Точные методы решения евклидовых комбинаторных задач можно условно разделить на методы отсечения и комбинаторные.

Разработке методов комбинаторной оптимизации, исследованию свойств выпуклых оболочек комбинаторных множеств посвящено много публикаций (в частности, [1–12]). В [13] рассмотрен прямой метод для решения линейных целочисленных задач оптимизации. Для методов комбинаторного отсечения одной из проблем является использование описания комбинаторных многогранников в виде линейных ограничений, количество которых увеличивается экспоненциально с ростом количества элементов комбинаторных множеств. Поэтому перспективными считаются методы, в которых надо строить лишь часть комбинаторных ограничений или не строить их вообще.

В данной работе с использованием идей из [13] предложен и обоснован метод решения евклидовых комбинаторных задач на полиразмещениях с некоторыми дополнительными условиями.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим евклидову задачу комбинаторной оптимизации на полиразмещениях: найти упорядоченную пару $\langle x^*, f(x^*)\rangle$:

$$f^* = f(x^*) = \max_{x\in E_{\eta n}^{ks}} f(x),$$

$$x^* = \arg\max_{x\in E_{\eta n}^{ks}} f(x) \tag{1}$$

при линейных ограничениях

$$\sum_{j=1}^{k} a_{ij}x_j \le a_{i0} \quad (i=1,2,\ldots,t) \tag{2}$$

и некоторых дополнительных ограничениях

$$h_i(x)=0 \quad (i=1,2,\ldots,q), \tag{3}$$

где $E_{\eta n}^{ks}$ — евклидово множество полиразмещений [2, 3], элементы которого — целые числа, $f(x)$ — линейная функция, $h_i(x)$ — некоторые известные функции любого класса.

Множеством полиразмещений согласно [2, 3] будем считать множество, определяемое следующим образом.

Пусть J_n — множество n первых натуральных чисел, т.е. $J_n=\{1,2,\ldots,n\}$. Под мультимножеством $G=\{g_1,g_2,\ldots,g_\eta\}$ будем понимать совокупность элементов, среди которых могут быть и одинаковые (неразличимые) [2].

Любое мультимножество A можно представить его основой $S(A)$, т.е. множеством всех его разных элементов, и первичной спецификацией $[A]$ — списком кратностей элементов основы мультимножества. Мультимножество B с основой $S(B)$ называется подмультимножеством A, если $S(B) \subset S(A)$ и для каждого элемента $a \in S(B)$ справедливо неравенство $k_B(a) \le k_A(a)$, где $k_X(a)$ — кратность элемента a в мультимножестве X. Суммой $A + B$ мультимножеств A и B называют мультимножество с основой $S(A + B) = S(A) \cup S(B)$ и кратностями элементов, равными сумме кратностей соответствующих элементов в мультимножествах A и B.

Рассмотрим упорядоченное разбиение мультимножества G на s непустых подмультимножеств $G_1, G_2, \ldots, G_s$, т.е. $\sum_{i=1}^{s} G_i = G$, а также k-выборку из мультимножества G вида

$$g = (g_1^1, g_2^1, \ldots, g_{p_1}^1, g_1^2, g_2^2, \ldots, g_{p_2}^2, \ldots, g_1^s, g_2^s, \ldots, g_{p_s}^s), \tag{4}$$

где $g_j^l \in G_l$, $j \in J_{p_l}$, p_l — количество элементов в выборке из мультимножества G_l, $l \in J_s$, $\sum p_l = k$.

Множество $A_{\eta n}^{ks}(G)$, элементы которого — разные упорядоченные k-выборки вида (4) из мультимножества G, называют [2, 3] евклидовым комбинаторным множеством полиразмещений, а его элементы — полиразмещениями.

Отображение

$$\varphi: A_{\eta n}^{ks} \to E_\varphi \subset R^k \tag{5}$$

называют [2, 3] погружением $A_{\eta n}^{ks}$ в арифметическое евклидово пространство, если между $A_{\eta n}^{ks}$ и E_φ существует взаимно однозначное соответствие, установленное правилом: для

$$g = (g_1, g_2, \ldots, g_k) = (g_1^1, g_2^1, \ldots, g_{p_1}^1, g_1^2, g_2^2, \ldots, g_{p_2}^2, \ldots, g_1^s, g_2^s, \ldots, g_{p_s}^s) \in A_{\eta n}^{ks},$$

$$x = \varphi(g), \; x = (x_1, x_2, \ldots, x_k) \in E_\varphi$$

имеем $x_j = g_j \;\; \forall j \in J_k$.

Обозначим погруженное евклидово комбинаторное множество на полиразмещениях $E_{\eta n}^{ks}(G)$, или $E_{\eta n}^{ks}$. Ненулевой вектор $x \in R^k$ называется лексикографически положительным (обозначение $x \succ 0$), если положительна его первая ненулевая координата. Вектор $x \in R^k$ лексикографически больше вектора $y \in R^k$ (обозначение $x \succ y$), если $x - y \succ 0$.

Целой частью действительного числа a (обозначение $[a]$) называется самое большое целое число, которое не больше a. Дробной частью числа a (обозначение $\{a\}$) называется разность $a - [a]$.

ПРЯМОЙ МЕТОД ОТСЕЧЕНИЙ ДЛЯ ЗАДАЧ КОМБИНАТОРНОЙ ОПТИМИЗАЦИИ

Введем дополнительные условия на мультимножество G.

Условие 1. Пусть в G содержится минимум k нулей, причем подмультимножества G_i содержат минимум p_i нулей, $i = J_s$, а остальные элементы — целые. Это условие назовем условием достаточного количества нулей и целочисленности (условие ДКНЦ).

Условие 2. Начальное нулевое решение удовлетворяет условиям (3).

Рассмотрим алгоритм решения задачи (1)–(3) с этими условиями. Здесь используются формы симплекс-таблиц, как в [13], с обозначениями из [14]. В последней строке в столбцах P_j — оценки Δ_j, в P_0 — значение целевой функции. Производящей назовем строку, по которой строится отсечение.

Шаг 0. Построить симплекс-таблицу соответственной задачи линейного программирования (без учета комбинаторных условий): $f(x) \to \max$ при условии (2). К симплекс-таблице присоединяется строка (L-строка), соответствующая ограничению, которое выражает верхнюю границу небазисных переменных

$$x_L + \sum_{j \in J} x_j = a_{L0}. \tag{6}$$

Здесь J — множество небазисных переменных, $a_{L0} = \sum_{i=1}^{k} \bar{x}_i$, где $\bar{x}_i$ — максимально возможное или большее, чем максимально возможное, значение переменной x_i при условиях задачи (1)–(3), $x_L \geq 0$ — базисная переменная, введенная для получения равенства из присоединенного неравенства.

Шаг 1. Проверить условие оптимальности для решения задачи линейного программирования (ЗЛП): если оценки $\Delta_j \geq 0$, то решение оптимальное и остановка; иначе — переход на шаг 2.

Шаг 2. Выбрать направляющий столбец с номером σ как столбец, который удовлетворяет условиям $a_{L\sigma} > 0$ и $r_\sigma \prec r_j$ для всех $j \neq \sigma$, $j \in J$ при $a_{L\sigma} > 0$, где $r_j = \left(\frac{\Delta_j}{a_{Lj}}, \frac{a_{1j}}{a_{Lj}}, \ldots, \frac{a_{nj}}{a_{Lj}} \right)$.

Шаг 3. Выбрать номер v производящей строки, на основании которой будет строиться отсечение, из множества номеров строк

$$V(\sigma) = \left\{ i \,\middle|\, 0 \leq \left[\frac{a_{io}}{a_{i\sigma}} \right] \leq \Theta_\sigma \right\}, \tag{7}$$

где $\Theta_\sigma = \min\limits_{\substack{a_{i\sigma} > 0 \\ i \in J_{k+t}}} \frac{a_{i0}}{a_{i\sigma}}$, по следующим правилам.

1. Пусть $V_t(\sigma)$ — множество $V(\sigma)$, которое соответствует t-й симплекс-таблице. Если $V_t(\sigma)$ содержит больше одного элемента: $V_t(\sigma) = \{v_1, v_2, \ldots, v_m\}$, то выбираем строку v_α, которая в последовательности $V_1(\sigma), V_2(\sigma), \ldots, V_t(\sigma)$ появилась раньше (не позже) других $v_i \in V_t(\sigma)$ и сохранялась до $V_t(\sigma)$. Перейти к п. 2.

2. Последовательно выбирать строку v из п. 1, пока $v \in V(\sigma)$. Если $v \notin V(\sigma)$, перейти к п. 1 [13].

Шаг 4. Добавить в симплекс-таблицу отсечение

$$x_{m+1} = \left[\frac{a_{v0}}{a_{v\sigma}} \right] + \sum_{j \in J} \left[\frac{a_{vj}}{a_{v\sigma}} \right] (-x_j) \tag{8}$$

и проверить, удовлетворяет ли следующее допустимое решение новой ЗЛП комбинаторным ($x \in E_{\eta n}^{ks}$) и дополнительным ограничениям (3). Если да — перейти к шагу 7. Иначе — $d = 1$, перейти к шагу 5.

Шаг 5. Заменить отсечение (8) отсечением

$$x_{m+1} = \left(\left[\frac{a_{v0}}{a_{v\sigma}} \right] - d \right) + \sum_{j \in J} \left(\left[\frac{a_{vj}}{a_{v\sigma}} \right] - d + q \right) (-x_j), \tag{9}$$

где $q = 1$, если $\left\{ \frac{a_{v0}}{a_{v\sigma}} \right\} < \left\{ \frac{a_{vj}}{a_{v\sigma}} \right\}$, иначе $q = 0$.

Перейти к шагу 6.

Шаг 6. Проверить, удовлетворяет ли следующее допустимое решение ЗЛП комбинаторным и дополнительным ограничениям. Если да — перейти к шагу 7. Иначе — увеличить d на единицу, перейти к шагу 5.

Шаг 7. Провести симплекс-преобразование, где направляющим выступает столбец с номером σ, а направляющей строкой — добавленное отсечение.

Шаг 8. Удалить строку из симплекс-таблицы, которая соответствует добавленному отсечению. Перейти к шагу 1.

ОБОСНОВАНИЕ МЕТОДА

Отсечение называется правильным, если при добавлении его в систему ограничений задачи (1)–(3) область допустимых решений не меняется.

Докажем, что отсечения (8) и (9) правильные.

Пусть на некотором шаге направляющим является σ-й столбец, а производящей строкой — v-я строка. Разделив производящую строку на $a_{v\sigma}$, получаем строку

$$a_1x_1 + \ldots + a_{\sigma-1}x_{\sigma-1} + x_\sigma + a_{\sigma+1}x_{\sigma+1} + \ldots + a_m x_m \le a_0. \tag{10}$$

Пусть, не нарушая общности, будем считать $\{a_i\} > \{a_0\}$ для $\forall\, i \in J_l$ и $\{a_i\} \le \{a_0\}$ для всех остальных i.

Теорема 1. Отсечение (8), записанное в виде неравенства

$$[a_1]x_1 + \ldots + [a_{\sigma-1}]x_{\sigma-1} + x_\sigma + [a_{\sigma+1}]x_{\sigma+1} + \ldots + [a_m]x_m \le [a_0] \tag{11}$$

является правильным для задачи (1)–(3).

Доказательство. Докажем, что (8) не отсекает от допустимой области соответствующей ЗЛП ни одной точки с целочисленными координатами, а значит, и допустимой точки исходной задачи, т.е. является правильным для задачи (1)–(3).

Допустим противное, т.е. существует такая точка с целочисленными координатами $x' = (x'_1, \ldots, x'_m)$, что

$$[a_1]x'_1 + \ldots + [a_{\sigma-1}]x'_{\sigma-1} + x'_\sigma + [a_{\sigma+1}]x'_{\sigma+1} + \ldots + [a_m]x'_m > [a_0]. \tag{12}$$

Учитывая, что в (12) все переменные целые, имеем

$$[a_1]x'_1 + \ldots + [a_{\sigma-1}]x'_{\sigma-1} + x'_\sigma + [a_{\sigma+1}]x'_{\sigma+1} + \ldots + [a_m]x'_m - 1 \ge [a_0]. \tag{13}$$

Отнимем из (13) неравенство (10) с учетом, что $a = [a] + \{a\}$:

$$-\{a_1\}x'_1 - \ldots - \{a_{\sigma-1}\}x'_{\sigma-1} - \{a_{\sigma+1}\}x'_{\sigma+1} - \ldots - \{a_m\}x'_m - 1 \ge -\{a_0\} \tag{14}$$

или

$$\{a_1\}x'_1 + \ldots + \{a_{\sigma-1}\}x'_{\sigma-1} + \{a_{\sigma+1}\}x'_{\sigma+1} + \ldots + \{a_m\}x'_m + 1 \le \{a_0\}, \tag{15}$$

откуда следует $\{a_0\} \ge 1$, что противоречит тому, что $\{a_0\}$ — дробная часть числа.

Получили противоречие; следовательно, сделанное предположение неверно, что доказывает теорему.

Теорема 2. Отсечение (9), записанное в виде неравенства

$$([a_1] - d + 1)x_1 + \ldots + ([a_l] - d + 1)x_l + ([a_{l+1}] - d)x_{l+1} + \ldots + ([a_{\sigma-1}] - d)x_{\sigma-1} +$$
$$+ x_\sigma + ([a_{\sigma+1}] - d)x_{\sigma+1} + \ldots + ([a_m] - d)x_m \le [a_0] - d, \tag{16}$$

отсекает от допустимой области соответственной ЗЛП только такие точки с целочисленными координатами: $x_\sigma = [a_0]$, $x_\sigma = [a_0] - 1, \ldots, x_\sigma = [a_0] - d + 1$ (в соответственном базисе).

Доказательство. Факт отсечения указанных точек подтверждается непосредственной проверкой.

Докажем от противного, что никакая другая точка не отсекается. Допустим, что существует такая ненулевая целочисленная точка $x' = (x'_1, \ldots, x'_m)$, что

$$([a_1] - d + 1)x'_1 + \ldots + ([a_l] - d + 1)x'_l + ([a_{l+1}] - d)x'_{l+1} + \ldots + ([a_{\sigma-1}] - d)x'_{\sigma-1} +$$
$$+ x'_\sigma + ([a_{\sigma+1}] - d)x'_{\sigma+1} + \ldots + ([a_m] - d)x'_m > [a_0] - d\,. \qquad (17)$$

Учитывая, что в (17) все переменные целые, имеем

$$([a_1] - d + 1)x'_1 + \ldots + ([a_l] - d + 1)x'_l + ([a_{l+1}] - d)x'_{l+1} + \ldots + ([a_{\sigma-1}] - d)x'_{\sigma-1} +$$
$$+ x'_\sigma + ([a_{\sigma+1}] - d)x'_{\sigma+1} + \ldots + ([a_m] - d)x'_m - 1 \ge [a_0] - d. \qquad (18)$$

Отнимем из (18) неравенство (10) с учетом, что $a = [a] + \{a\}$:

$$\sum_{i=1}^{l} (-\{a_i\} - d + 1)x'_i + \sum_{i=l+1, i \ne s}^{m} (-\{a_i\} - d)x'_i - 1 \ge -\{a_0\} - d\,. \qquad (19)$$

Далее имеем

$$\sum_{i=1}^{l} (\{a_i\} + d - 1)x'_i + \sum_{i=l+1,\, i \ne \sigma}^{m} (\{a_i\} + d)x'_i + 1 - d \le \{a_0\}. \qquad (20)$$

Возможны варианты:

1) среди чисел x_i, $i = 1, 2, \ldots, l$, существует хотя бы одно ненулевое (например, x_k), тогда

$$\sum_{i=1}^{l} (\{a_i\} + d - 1)x'_i + \sum_{i=l+1,\, i \ne \sigma}^{m} (\{a_i\} + d)x'_i + 1 - d \ge$$
$$\ge \sum_{i=1}^{l} (\{a_i\} + d - 1)x'_i + 1 - d \ge (\{a_k\} + d - 1)x'_k + 1 - d \ge$$
$$\ge (\{a_k\} + d - 1) + 1 - d = \{a_k\} > \{a_0\}; \qquad (21)$$

2) $x_1 = x_2 = \ldots = x_l = 0$, тогда среди чисел x_i, $i = l, l+1, \ldots, \sigma - 1, \sigma + 1, \ldots, m$, существует хотя бы одно ненулевое (например, x_h):

$$\sum_{i=1}^{l} (\{a_i\} + d - 1)x'_i + \sum_{i=l+1,\, i \ne \sigma}^{m} (\{a_i\} + d)x'_i + 1 - d =$$
$$= \sum_{i=l+1,\, i \ne \sigma}^{m} (\{a_i\} + d)x'_i + 1 - d \ge (\{a_h\} + d)x'_h + 1 - d \ge$$
$$\ge (\{a_h\} + d) + 1 - d = \{a_h\} + 1 > \{a_0\}. \qquad (22)$$

Неравенство (22) несправедливо. Следовательно, сделанное предположение неверно, что доказывает теорему.

ПРИМЕР

Решить задачу

$$f(x) = 3x_1 + 2x_2 + x_3 \to \max,$$

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + x_3 \le 7; \\ x_1 - x_2 + 3x_3 \le 3; \\ 4x_1 + 3x_2 + 3x_3 \le 10; \end{cases}$$

$$(x_1 - 3)^2 + x_2^2 + x_3^2 > 1\,;$$

$$(x_1, x_2, x_3) \in E_{10.6}^{32}(G) = E, \quad G = \{0^3, 1^3, 2, 3^2, 4^2, 5\};$$

$(x_1, x_2) \in E(G_1)$, $G_1 = \{0^2, 1^2, 3, 4^2\}$, $E(G_1)$ — множество 2-размещений из мультимножества G_1; $x_3 \in E(G_2)$, $G_2 = \{0, 1, 2, 3, 5\}$, $E(G_2)$ — множество 1-размещений из мультимножества G_2.

Решение. Запишем вспомогательную ЗЛП (ВЗЛП) в каноническом виде:

$$f(x) = 3x_1 + 2x_2 + x_3 \to \max,$$

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 = 7, \\ x_1 - x_2 + 3x_3 + x_5 = 3, \\ 4x_1 + 3x_2 + 3x_3 + x_6 = 10, \end{cases} \qquad x_j \ge 0 \quad \forall j \in J_6.$$

Шаг 0. Строим симплекс-таблицу ВЗЛП, присоединяем L-строку: $x_1 + x_2 + x_3 + x_L = 14$ (табл. 1; базисные столбцы для удобства не записываем). В симплекс-таблицу для построения отсечения добавлены два дополнительных (последних) столбца.

Таблица 1

Номер строки	Переменные	Значения переменных x_i	P_0	P_1	P_2	P_3	$\frac{a_{i0}}{a_{i\sigma}}$	$\left[\frac{a_{i0}}{a_{i\sigma}}\right]$
1	x_4	0	7	1	3	1	7	5
2	x_5	0	3	1	–1	3	3	3
3	x_6	0	10	4	3	3	2,5	2
4	x_1	3	0	–1	0	0	–	–
5	x_2	2	0	0	–1	0	–	–
6	x_3	1	0	0	0	–1	–	–
7	x_L	0	14	1	1	1		
Оценка, Δ			0	–3	–2	–1		

Шаг 1. Есть отрицательные оценки Δ_j, переходим к следующему шагу.

Шаг 2. Направляющий столбец — первый (P_1), поскольку вектор $r_1 = \left(\frac{-3}{1}, \frac{1}{1}, \frac{1}{1}, \frac{4}{1}, \frac{-1}{1}, \frac{0}{1}, \frac{0}{1}\right)$ лексикографически меньше, чем $r_2 = \left(\frac{-2}{1}, \ldots\right)$ и $r_3 = \left(\frac{-1}{1}, \ldots\right)$.

Шаг 3. Вычислим $\Theta_1 = \min\limits_{\substack{a_{i1}>0 \\ i \in J_7}} \frac{a_{i0}}{a_{i1}} = 2{,}5$, $V_1(1) = \{3\}$. Производящая строка — третья.

Шаг 4. Согласно (8) получаем отсечение $x_1 + x_7 = 2$. После симплекс-преобразования столбца P_0 получаем точку $x^* = (2, 0, 0)$, которая не удовлетворяет комбинаторным и дополнительному (нелинейному) ограничениям. Положим $d = 1$, переходим на шаг 5.

Шаг 5. Согласно (9) получаем отсечение $x_1 + x_7 = 1$.

Шаг 6. После симплекс-преобразования столбца P_0 получаем точку $x^* = (1, 0, 0)$, которая удовлетворяет комбинаторным ограничениям $x^* \in E$ и дополнительному нелинейному. Переходим на шаг 7.

Шаг 7. Проводим симплекс-преобразования, направляющая строка — отсечение, направляющий столбец — первый (P_1) (табл. 2).

Шаг 8. Удаляем строку-отсечение из табл. 3, переходим на шаг 1.

В первом шаге имеются отрицательные оценки. Аналогично получаем второе отсечение $-2x_7 + x_2 + x_8 = 1$.

Таблица 2

Номер строки	Переменные	Значения переменных, x_i	P_0	P_1	P_2	P_3
1	x_4	0	7	1	3	1
2	x_5	0	3	1	–1	3
3	x_6	0	10	4	3	3
4	x_1	3	0	–1	0	0
5	x_2	2	0	0	–1	0
6	x_3	1	0	0	0	–1
7	x_L	0	14	1	1	1
8	x_7		1	1	0	0
Оценка, Δ			0	–3	–2	–1

Таблица 3

Номер строки	Переменные	Значения переменных, x_i	P_0	P_7	P_2	P_3	$\frac{a_{i0}}{a_{i\sigma}}$	$\left[\frac{a_{i0}}{a_{i\sigma}}\right]$
1	x_4	0	6	–1	3	1	2	2
2	x_5	0	2	–1	–1	3	–	–
3	x_6	0	6	–4	3	3	2	2
4	x_1	3	1	1	0	0	–	–
5	x_2	2	0	0	–1	0	–	–
6	x_3	1	0	0	0	–1	–	–
7	x_L	0	13	–1	1	1		
8	x_8		1	–2	1	0		
Оценка, Δ			3	3	–2	–1		

Таблица 4

Номер строки	Переменные	Значения переменных, x_i	P_0	P_7	P_8	P_3	$\frac{a_{i0}}{a_{i\sigma}}$	$\left[\frac{a_{i0}}{a_{i\sigma}}\right]$
1	x_4	0	3	5	–3	1	3	3
2	x_5	0	3	–3	1	3	1	1
3	x_6	0	3	2	–3	3	1	1
4	x_1	3	1	1	0	0	–	–
5	x_2	2	1	–2	1	0	–	–
6	x_3	1	0	0	0	–1	–	–
7	x_L	0	12	1	–1	1		
8	x_9		1	0	–1	1		
Оценка, Δ			5	–1	2	–1		

В табл. 4–7 получено еще четыре отсечения для различных этапов.

В табл. 8 все оценки Δ_j не меньше нуля. Оптимальное решение исходной задачи найдено: $f(x^*) = 6$, $x^* = (1,1,1) \in E$.

Отметим, что на разных этапах получены такие допустимые решения задачи (1)–(3): $(0,0,0)$, $(1,0,0)$, $(1,1,0)$, $(1,1,1)$.

Таблица 5

Номер строки	Переменные	Значения переменных, x_i	P_0	P_7	P_8	P_9	$\frac{a_{i0}}{a_{i\sigma}}$	$\left[\frac{a_{i0}}{a_{i\sigma}}\right]$
1	x_4	0	2	5	–2	–1	0,4	0
2	x_5	0	0	–3	4	–3	–	–
3	x_6	0	0	2	0	–3	0	0
4	x_1	3	1	1	0	0	1	1
5	x_2	2	1	–2	1	0	–	–
6	x_3	1	1	0	–1	1	–	–
7	x_L	0	11	1	0	–1		
8	x_{10}		0	1	0	–2		
Оценка, Δ			6	–1	1	1		

Таблица 6

Номер строки	Переменные	Значения переменных, x_i	P_0	P_{10}	P_8	P_9	$\frac{a_{i0}}{a_{i\sigma}}$	$\left[\frac{a_{i0}}{a_{i\sigma}}\right]$
1	x_4	0	2	–5	–2	9	0,22222	0
2	x_5	0	0	3	4	–9		
3	x_6	0	0	–2	0	1	0	0
4	x_1	3	1	–1	0	2	0,5	0
5	x_2	2	1	2	1	–4	–	–
6	x_3	1	1	0	–1	1	1	1
7	x_L	0	11	–1	0	1		
8	x_{11}		0	–2	0	1		
Оценка, Δ			6	1	1	–1		

Таблица 7

Номер строки	Переменные	Значения переменных, x_i	P_0	P_{10}	P_8	P_{11}	$\frac{a_{i0}}{a_{i\sigma}}$	$\left[\frac{a_{i0}}{a_{i\sigma}}\right]$
1	x_4	0	2	13	–2	–9	0,15385	0
2	x_5	0	0	–15	4	9	–	–
3	x_6	0	0	0	0	–1	–	–
4	x_1	3	1	3	0	–2	0,33333	0
5	x_2	2	1	–6	1	4	–	–
6	x_3	1	1	2	–1	–1	0,5	0
7	x_L	0	11	1	0	–1		
8	x_{12}		0	1	–1	–1		
Оценка, Δ			6	–1	1	1		

Таблица 8

Номер строки	Переменные	Значения переменных, x_i	P_0	P_{12}	P_8	P_{11}
1	x_4	0	2	–13	11	4
2	x_5	0	0	15	–11	–6
3	x_6	0	0	0	0	–1
4	x_1	3	1	–3	3	1
5	x_2	2	1	6	–5	–2
6	x_3	1	1	–2	1	1
7	x_L	0	11	–1	1	0
Оценка, Δ			6	1	0	0

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Предложен и обоснован прямой метод отсечений для решения условных комбинаторных задач на полиразмещениях при условии ДКНЦ. Заметим, что область, которую образуют все ограничения исходной задачи (кроме комбинаторных), не обязательно должна быть выпуклой.

Среди достоинств метода отметим то, что на каждом этапе имеется допустимое решение исходной задачи (1)–(3).

Направлением дальнейших исследований может быть получение теоретической оценки сложности алгоритма. Целесообразно рассмотреть возможность распространения данного метода на другие типы комбинаторных оптимизационных задач.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Сергиенко И.В., Каспшицкая М.Ф. Модели и методы решения на ЭВМ комбинаторных задач оптимизации. — К.: Наук. думка, 1981. — 288 с.
2. Стоян Ю.Г., Ємець О.О. Теорія і методи евклідової комбінаторної оптимізації. — К.: ІСДО, 1993. — 188 с. (http://informatics.org.ua/uploads/books/stoyan sub emets sub eko.pdf)
3. Стоян Ю.Г., Ємець О.О., Ємець Є.М. Оптимізація на полірозміщеннях: теорія та методи. — Полтава: РВЦ ПУСКУ, 2005. — 103 с.
4. Стоян Ю.Г., Ємець О.О., Ємець Є.М. Множини полірозміщень в комбінаторній оптимізації // Доп. НАН України. — 1999. — № 8. — С. 37–41.
5. Емец О.А., Барболина Т.Н. Комбинаторная оптимизация на размещениях: Монография. — К.: Наук. думка, 2008. — 159 с.
6. Ємець О.О., Колєчкіна Л.М. Задачі комбінаторної оптимізації з дробово-лінійними цільовими функціями. — К.: Наук. думка, 2005. — 117 с.
7. Ємець О.О., Роскладка О.В. Задачі оптимізації на полікомбінаторних множинах: властивості та розв'язування. — Полтава: РВЦ ПУСКУ, 2006. — 129 с.
8. Ємець О.О., Барболіна Т.М. Розв'язування задач нелінійної умовної оптимізації на розміщеннях методом відсікання // Укр. мат. журн. — 2003. — **55**, № 5. — С. 604–611.
9. Донец Г.А., Колечкина Л.Н. Метод упорядочения значений линейной функции на множестве перестановок // Кибернетика и системный анализ. — 2009. — № 2. — С. 50–61.
10. Ємець О.О., Роскладка А.А. Про оцінки мінімумів цільових функцій при оптимізації на сполученнях // Укр. мат. журн. — 1999. — **51**, № 8. — С. 1118–1121.
11. Емец О.А., Барболина Т.М. Решение линейных задач оптимизации на размещениях методом отсечения // Кибернетика и системный анализ. — 2003. — № 6. — С. 131–141.
12. Емец О.А., Барболина Т.М. Решение задач евклидовой комбинаторной оптимизации методом построения лексикографической эквивалентности // Там же. — 2004. — № 5. — С. 115–125.
13. Ху Т. Целочисленное программирование и потоки в сетях. — М.: Мир, 1974. — 519 с.
14. Акулич И.Л. Математическое программирование в примерах и задачах: Учеб. пособие для студентов эконом. спец. вузов. — М.: Высш. шк., 1986. — 319 с.

Поступила 27.12.2010