УДК 519.21

А.А. ФОМИН-ШАТАШВИЛИ, Т.А. ФОМИНА, А.Д. ШАТАШВИЛИ

ОБ ЭКВИВАЛЕНТНОСТИ ВЕРОЯТНОСТНЫХ МЕР, ПОРОЖДЕННЫХ РЕШЕНИЯМИ НЕЛИНЕЙНЫХ ЭВОЛЮЦИОННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В ГИЛЬБЕРТОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ, ВОЗМУЩЕННЫХ ГАУССОВСКИМИ ПРОЦЕССАМИ. I

Ключевые слова: *эволюционные дифференциальные уравнения, эволюционное семейство ограниченных операторов, плотность Радона–Никодима, эквивалентность вероятностных мер, производящий оператор, оператор Гильберта–Шмидта.*

Известно, что в прикладных задачах науки и техники, как правило, практически всегда при исследованиях приходится оперировать дифференциальными уравнениями со случайными слагаемыми или коэффициентами, описывающими поведение систем в случайных средах. Очевидно, что решения таких уравнений порождают вероятностные меры в бесконечномерных пространствах.

Одной из важнейших задач теории случайных процессов является установление достаточных условий для эквивалентности упомянутых выше вероятностных мер относительно некоторых стандартных хорошо изученных мер и определение в явном виде соответствующих плотностей Радона–Никодима, естественно, в терминах известных величин, а в данном случае в терминах коэффициентов изучаемых уравнений, их характеристик или абстрактных преобразований. Существование таких плотностей дает возможность эффективно решать прикладные задачи с использованием методов интегрирования по известным стандартным распределениям (например, гауссовским, винеровским и т.д.), для которых существуют уже готовые алгоритмы.

В работах [1–42] изучались задачи абсолютной непрерывности и эквивалентности вероятностных мер для различных классов нелинейных преобразований и нелинейных дифференциальных уравнений с гауссовским возмущением, которые применялись при вычислении оптимальных оценок в задачах экстраполяции и фильтрации для решения рассматриваемых дифференциальных уравнений [7, 8, 12, 34–39].

Настоящую статью можно рассматривать как продолжение исследований в этом направлении для нелинейных эволюционных дифференциальных уравнений в гильбертовом пространстве $\boldsymbol{H}$, а также исследований, начатых в работе [44] для случайных полей, являющихся решениями краевых задач Дирихле и Неймана для нелинейных эллиптических дифференциальных уравнений в конечномерном евклидовом пространстве.

В отличие от раннее изучаемых уравнений в настоящей статье впервые рассматриваются нелинейные дифференциальные уравнения с неограниченными линейными операторами, которые являются семейством производящих операторов для эволюционного семейства ограниченных операторов. С использованием понятия расширенного стохастического интеграла, а также результатов работы [9] здесь устанавливаются достаточные условия для эквивалентности изучаемых вероятностных мер и в явном виде вычисляются соответствующие плотности Радона–Никодима.

Обозначим $\{\Omega, \wp, P\}$ фиксированное вероятностное пространство, $\boldsymbol{H}$ — сепарабельное вещественное гильбертово пространство со скалярным произведением (x, y) и нормой $||x||$, $x, y \in \boldsymbol{H}$. Далее $\boldsymbol{L}_2 = \boldsymbol{L}_2\{[0, a], \boldsymbol{H}\}$ будем обозначать пространство функций, определенных на отрезке $[0, a]$ со значениями из $\boldsymbol{H}$ и интегрируемых с квадратом по норме $\boldsymbol{H}$. Пространство $\boldsymbol{L}_2$ является гильбертовым. Обозначим в нем скалярное произведение $(f, g)_L$, норму $||f||_L$, $f, g \in \boldsymbol{L}_2$, и представим их как

$$(f, g)_L = \int_0^a (f(t), g(t))\, dt, \quad ||f||_L = \int_0^a |f(t)|^2\, dt, \tag{1}$$

где $f, g \in \boldsymbol{L}_2$; $f(t), g(t) \in \boldsymbol{H}$.

Пусть далее $B(t, s)$ обозначает операторную функцию, действующую при каждом $t, s \in [0, a]$ в пространстве $\boldsymbol{H}$. Обозначим $||B(t, s)||$ норму операторной функции в пространстве $\boldsymbol{H}$. Известно, что операторная функция $B(t, s)$ как ядро порождает в пространстве $\boldsymbol{L}_2$ интегральный оператор $\boldsymbol{B}$ по следующему принципу:

$$(\boldsymbol{B}\varphi)_t = \int_0^a B(t, s)\varphi(s) ds, \quad \varphi \in L_2. \tag{2}$$

Обозначим в $\boldsymbol{L}_2$ норму оператора $\boldsymbol{B}$ через $|\boldsymbol{B}|_L$ по принципу

$$|\boldsymbol{B}|_L^2 = \int_0^a \int_0^a |B(t, s)|^2\, dt ds < \infty. \tag{3}$$

Норма оператора, определенная по формуле (3), называется гильберто-шмидтовской нормой, а оператор $\boldsymbol{B}$ с этой нормой называется оператором Гильберта–Шмидта.

Рассмотрим в гильбертовом пространстве $\boldsymbol{H}$ нелинейное эволюционное дифференциальное уравнение

$$\frac{dy(t)}{dt} - A(t)y(t) + A_1(t)y(t) + f(t, y(t)) = \xi(t), \tag{4}$$

$$0 \le t \le a, \quad y(0) = \xi(0) = 0 \pmod{\boldsymbol{P}}, \tag{5}$$

для которого будем предполагать следующее.

Условие 1: а) операторы $A(t)$ являются семейством линейных неограниченных операторов с плотной, независимой от t областью определения $\boldsymbol{D}(A) \subseteq \boldsymbol{H}$;

б) операторы $A(t)$ являются производящими операторами эволюционного семейства $U(t, s)$ ограниченных операторов при $0 \le t, s \le a$, действующих в $\boldsymbol{H}$, сильно непрерывно зависящих от t и s и удовлетворяющих условию

$$\int_0^a \int_0^a |U(t, s)|^2\, dt ds < \infty; \tag{6}$$

отсюда видно, что по определению (2) и (3) интегральный оператор $\boldsymbol{U}$ в пространстве $\boldsymbol{L}_2$, порожденный ядром $U(t, s)$, является оператором Гильберта–Шмидта;

в) линейные операторы $A_1(t)$ являются неограниченными операторами с той же плотной, независимой от t областью определения $\boldsymbol{D}(A) \subseteq \boldsymbol{H}$, но такими, что операторы

$$U_1(t, s) = U(t, s) A_1(s) \tag{7}$$

при каждом $0 \le t, s \le a$ являются ограниченными операторами, а интегральный оператор $\boldsymbol{U}_1$, порожденный ядром $U_1(t, s)$, является оператором Гильберта–Шмидта, т.е.

$$\int_0^a \int_0^a |U_1(t, s)|^2\, dt ds < \infty; \tag{8}$$

г) число -1 не принадлежит спектру оператора $U_1(t, s)$.

Условие 2. $\xi(t)$ — гауссовский случайный процесс, определенный на отрезке $[0, a]$ со значениями из $\boldsymbol{H}$ с нулевым математическим ожиданием $M\xi(t)=0$, а его корреляционная операторная функция $R_{\xi}^{2}(t,s)$, $0 \le t, s \le a$, удовлетворяет условию

$$\int_{0}^{a} |R_{\xi}^{2}(t,t)|\, dt < \infty. \tag{9}$$

Иначе говоря, операторная функция $R_{\xi}^{2}(t,s)$, действующая в $\boldsymbol{H}$ как ядро, в пространстве $\boldsymbol{L}_2$ порождает ядерный корреляционный оператор $\boldsymbol{R}_{\xi}^{2}$ гауссовского случайного элемента $\xi \in \boldsymbol{L}_2$.

Пусть корреляционная операторная функция представима в виде

$$R_{\xi}^{2}(t,s) = \int_{0}^{a} R_{\xi}(t,u) R_{\xi}^{*}(u,s)\, du, \tag{10}$$

где операторная функция $R_{\xi}(t,s)$ и сопряженная к ней функция $R_{\xi}^{*}(t,s)$ при каждых $0 \le t, s \le a$ как ядра порождают в пространстве $\boldsymbol{L}_2$ интегральные операторы Гильберта–Шмидта соответственно $\boldsymbol{R}_{\xi}$ и $\boldsymbol{R}_{\xi}^{*}$.

Условие 3. Нелинейная функция $f(t, y(t))$, определенная на $[0, a] \times \boldsymbol{H}$, принимает свои значения из $\boldsymbol{H}$, является интегрируемой функцией с квадратом по норме $\boldsymbol{H}$ для всех $y(t) \in \boldsymbol{H}$ и дифференцируема по y. При этом производная $f_y'(t, y(t))$ для всех $t \in [0; a]$ является оператором Гильберта–Шмидта, действующим в $\boldsymbol{H}$.

Как известно из работ [47, 48], при выполнении условий 1–3 уравнение (4) имеет единственное решение $(\mathrm{mod}\, \boldsymbol{P})$.

Если в пространстве $\boldsymbol{L}_2$ формально связать корреляционные операторы $\boldsymbol{R}_x^2$ и $\boldsymbol{R}_{\xi}^2$ гауссовских элементов x и ξ соотношением

$$\boldsymbol{R}_x^2 = \boldsymbol{C}\boldsymbol{R}_{\xi}^2\boldsymbol{C}^*, \tag{11}$$

то его можно расписать более подробно:

$$\boldsymbol{R}_x^2 = \boldsymbol{R}_x\boldsymbol{R}_x^* = \boldsymbol{C}\boldsymbol{R}_{\xi}\boldsymbol{R}_{\xi}^*\boldsymbol{C}^*, \tag{12}$$

откуда имеем

$$\boldsymbol{R}_x = \boldsymbol{C}\boldsymbol{R}_{\xi},\ \boldsymbol{R}_x^* = \boldsymbol{R}_{\xi}^*\boldsymbol{C}^*. \tag{13}$$

Одновременно с нелинейным дифференциальным уравнением (4) рассмотрим линейное дифференциальное уравнение

$$\frac{dx(t)}{dt} - A(t)x(t) + A_1(t)x(t) = \xi(t), \tag{14}$$

$$0 \le t \le a,\ x(0) = \xi(0) = 0\ (\mathrm{mod}\, \boldsymbol{P}), \tag{15}$$

где семейство операторов $A(t)$ и $A_1(t)$, а также гауссовский случайный процесс $\xi(t)$ удовлетворяют условиям 1, 2.

Как известно из теории эволюционных дифференциальных уравнений [45], уравнения (4) и (14) могут быть представлены в следующем виде:

$$y(t) + \int_{0}^{a} U(t,s)A_1(s)y(s)\, ds + \int_{0}^{a} U(t,s)f(s, y(s))\, ds = \int_{0}^{a} U(t,s)\xi(s) ds, \tag{16}$$

$$x(t) + \int_{0}^{a} U(t,s)A_1(s)x(s)\, ds = \int_{0}^{a} U(t,s)\xi(s)\, ds. \tag{17}$$

Если ввести обозначение $z(t) = y(t) - x(t)$, то из (16) и (17) получим

$$z(t) + \int_0^a U(t, s) A_1(s) z(s) ds = -\int_0^a U(t, s) f(s, y(s)) ds. \tag{18}$$

В пространстве $\boldsymbol{L}_2$ уравнения (16)–(18) записываются в виде

$$y + \boldsymbol{U}_1 y + \boldsymbol{U} f(\cdot, y) = \boldsymbol{U}\xi, \tag{19}$$

$$x + \boldsymbol{U}_1 x = \boldsymbol{U}\xi, \tag{20}$$

$$z + \boldsymbol{U}_1 z = -\boldsymbol{U} f(\cdot, y). \tag{21}$$

Из (21) следует

$$(\boldsymbol{I} + \boldsymbol{U}_1) z = -\boldsymbol{U} f(\cdot, y) \tag{22}$$

или

$$z = -[\boldsymbol{I} + \boldsymbol{U}_1]^{-1} \boldsymbol{U} f(\cdot, y), \tag{23}$$

откуда

$$y - x = -[\boldsymbol{I} + \boldsymbol{U}_1]^{-1} \boldsymbol{U} f(\cdot, y),$$

окончательно имеем

$$y + [\boldsymbol{I} + \boldsymbol{U}_1]^{-1} \boldsymbol{U} f(\cdot, y) = x. \tag{24}$$

Далее, если предположить, что число -1 является регулярной точкой, т.е. не принадлежит спектру оператора $\boldsymbol{U}_1$, то оператор $\boldsymbol{I} + \boldsymbol{U}_1$ обратим и обратный оператор $[\boldsymbol{I} + \boldsymbol{U}_1]^{-1}$ непрерывен, ограничен и определен на всем гильбертовом пространстве $\boldsymbol{L}_2$ (см. [49]). Поэтому оператор

$$[\boldsymbol{I} + \boldsymbol{U}_1]^{-1} \boldsymbol{U} = \boldsymbol{B}_1 \tag{25}$$

существует, ограничен и является оператором Гильберта–Шмидта.

Из соотношения (20) имеем

$$[\boldsymbol{I} + \boldsymbol{U}] x = \boldsymbol{U}\xi,$$

откуда

$$x = [\boldsymbol{I} + \boldsymbol{U}_1]^{-1} \boldsymbol{U}\xi = \boldsymbol{B}_1 \xi. \tag{26}$$

Если считать, что число -1 является регулярной точкой оператора $\boldsymbol{U}_1$, то, как отмечалось выше, оператор $[\boldsymbol{I} + \boldsymbol{U}_1]^{-1}$ существует, ограничен, непрерывен и определен на всем пространстве $\boldsymbol{L}_2$, а

$$\boldsymbol{B}_1 = [\boldsymbol{I} + \boldsymbol{U}_1]^{-1} \boldsymbol{U} \tag{27}$$

является оператором Гильберта–Шмидта.

Определим корреляционный оператор $\boldsymbol{R}_x$ гауссовского случайного элемента x. По известным правилам

$$\boldsymbol{R}_x^2 = \boldsymbol{B}_1 \boldsymbol{R}_\xi^2 \boldsymbol{B}_1^*. \tag{28}$$

Если предположить, что оператор $\boldsymbol{R}_x^2$ является ядерным оператором и допускает представление

$$\boldsymbol{R}_x^2 = \boldsymbol{R}_x \boldsymbol{R}_x^*, \tag{29}$$

то с учетом (11) из соотношения (28) получим

$$\boldsymbol{R}_x^2 = \boldsymbol{R}_x \boldsymbol{R}_x^* = \boldsymbol{B}_1 \boldsymbol{R}_\xi \boldsymbol{R}_\xi^* \boldsymbol{B}_1^*. \tag{30}$$

На основании этого операторы Гильберта–Шмидта $\boldsymbol{R}_x$ и $\boldsymbol{R}_x^*$ определяются из соотношений

$$\boldsymbol{R}_x = \boldsymbol{B}_1 \boldsymbol{R}_\xi \quad \text{и} \quad \boldsymbol{R}_x^* = \boldsymbol{R}_\xi^* \boldsymbol{B}_1^*. \tag{31}$$

Тогда уравнения (24) можно записать в виде

$$y+\boldsymbol{B}_1 f(\cdot,\ y)=x \tag{32}$$

или, как нелинейное преобразование в $\boldsymbol{L}_2$,

$$\boldsymbol{S}y\colon\ y+\boldsymbol{R}_x\boldsymbol{G}(\cdot,y)=x, \tag{32*}$$

где положено

$$\boldsymbol{B}_1 f(\cdot,\ y)=\boldsymbol{R}_x\boldsymbol{G}(\cdot,\ y). \tag{33}$$

В силу условия 3 функция $\boldsymbol{G}(\cdot,\ y)$ дифференцируема по y, так как $f(t,y)$ дифференцируема по y и, кроме того, $\boldsymbol{G}'_y(\cdot,\ y)$ является ограниченным оператором Гильберта–Шмидта. Легко показать, что если функция $\boldsymbol{G}(\cdot,\ y)$ принимает свои значения из пространства $\boldsymbol{R}_x\boldsymbol{L}_2$, то уравнение (33) однозначно разрешимо относительно $\boldsymbol{G}(\cdot,\ y)$:

$$\boldsymbol{G}(\cdot,\ y)=\boldsymbol{R}_x^{-1}\boldsymbol{B}_1 f(\cdot,\ y). \tag{34}$$

Можно найти другие условия или ограничения, дополнительно налагаемые на функцию $f(\cdot,\ y)$, которые будут обеспечивать существование и ограниченность функции $\boldsymbol{G}(\cdot,\ y)$, ее производной $\boldsymbol{G}'_y(\cdot,\ y)$ и обратимость отображения $Sy\colon \boldsymbol{T}x=S^{-1}x$, где $\boldsymbol{T}x$ является нелинейным преобразованием гауссовского элемента x,

$$\boldsymbol{T}x : x+\boldsymbol{R}_x\overline{\boldsymbol{G}}(\cdot,x)=y, \tag{34*}$$

здесь оператор $\overline{\boldsymbol{G}}(\cdot,x)$ определяется из соотношения (см. [46])

$$\overline{\boldsymbol{G}}(\cdot,x)=-\boldsymbol{G}(\cdot,\boldsymbol{T}x). \tag{35}$$

Для этого воспользуемся методикой, предложенной в работе [9]. Перепишем преобразования (32) и (34), а также формулы (33) и (35) в пространстве $\boldsymbol{H}$, т.е. вычислим их в точке t. Имеем

$$(\boldsymbol{S}y)_t : y(t)+\int_0^a R_x(t,s)G(s,\ y(s))\,ds=x(t), \tag{36}$$

$$(\boldsymbol{T}x)_t : x(t)+\int_0^a R_x(t,s)\overline{G}(s,x(s))ds=y(s), \tag{37}$$

$$\int_0^a B_1(t,s)f(s,\ y(s))\,ds=\int_0^a R_x(t,s)G(s,\ y(s))\,ds, \tag{38}$$

где $B_1(t,s)$ — ядро интегрального оператора $[\boldsymbol{I}+\boldsymbol{U}_1]^{-1}\boldsymbol{U}$ и (см. [9, 46])

$$\overline{G}(t,x(t))=-G(t,\boldsymbol{T}x(t)). \tag{39}$$

Из доказательства существования одной из величин в (39) следует существование второй величины. Обозначим μ_y и μ_x меры, порожденные решениями уравнений (36) и (37) случайными процессами $y(t)$ и $x(t)$ соответственно в гильбертовом пространстве $\boldsymbol{H}$. Задача заключается в установлении условий, при выполнении которых меры μ_y и μ_x эквивалентны ($\mu_y\sim\mu_x$), и в вычислении в явном виде их плотности Радона–Никодима $\dfrac{d\mu_y}{d\mu_x}$ и $\dfrac{d\mu_x}{d\mu_y}$. Ниже получены условия существования функции $G(t,\ y(t))$, ее производной $G'_y(t,\ y(t))$, а также их конструктивный вид.

Обозначим $\{\varphi_k(t)\}$ и $\{\lambda_k\}$ собственные функции и собственные числа корреляционной операторной функции $R_x^2(t,s)$. Тогда, как известно из теории случайных процессов, корреляционная операторная функция $R_x^2(t,s)$ разлагается в равномерно сходящийся ряд по собственным функциям:

$$R_x^2(t,s)=\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k\varphi_k(t)(\varphi_k(s),\cdot) \tag{40}$$

и действует по принципу

$$R_x^2(t,s)\beta(s)=\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k\varphi_k(t)(\varphi_k(s),\beta(s)). \tag{40*}$$

Поскольку оператор $R_x(t,s)$ есть «корень квадратный» от оператора $R_x^2(t,s)$, то разложение оператора $R_x(t,s)$ представится в виде

$$R_x(t,s)=\sum_{k=1}^{\infty}\sqrt{\lambda_k}\varphi_k(t)(\varphi_k(s),\cdot). \tag{41}$$

Поэтому правая часть выражения (38) будет иметь вид

$$\int_0^a R_x(t,s)G(s,y(s))ds=\sum_{k=1}^{\infty}\sqrt{\lambda_k}\varphi_k(t)\int_0^a(\varphi_k(s),G(s,y(s)))ds, \tag{42}$$

т.е.

$$\int_0^a R_x(t,s)G(s,y(s))ds=\sum_{k=1}^{\infty}\sqrt{\lambda_k}\varphi_k(t)G_k(y), \tag{43}$$

где

$$G_k(y)=\int_0^a(\varphi_k(s),G(s,y(s)))ds. \tag{44}$$

Введем последовательность функций $\{\psi_k(t)\}$:

$$\psi_k(t)=\frac{1}{\sqrt{\lambda_k}}\varphi_k(t). \tag{45}$$

Используя соотношения (41), (43) и (44), формула (38) примет вид

$$\int_0^a B_1(t,s)f(s,y(s))ds=\sum_{k=1}^{\infty}\sqrt{\lambda_k}\varphi_k(t)G_k(y). \tag{46}$$

Умножим обе части равенства (46) скалярно на $\varphi_k(t)$ и проинтегрируем от нуля до a, получим

$$\int_0^a\left(\int_0^a B_1(t,s)f(s,y(s))ds,\varphi_k(t)\right)dt=\sqrt{\lambda_k}G_k(y) \tag{47}$$

или

$$b_k(y)=\int_0^a(b(t,y),\varphi_k(t))dt=\sqrt{\lambda_k}G_k(y), \tag{48}$$

где функция $b(t,y)$ очевидно определяется из соотношения

$$b(t,y(\cdot))=\int_0^a B_1(t,s)f(s,y(s))ds. \tag{49}$$

Поэтому из (48) и (45) имеем

$$G_k(y)=\frac{1}{\sqrt{\lambda_k}}b_k(y)=\int_0^a\left(b(t,y(\cdot)),\frac{1}{\sqrt{\lambda_k}}\varphi_k(t)\right)dt=\int_0^a(b(t,y(\cdot)),\psi_k(t))dt. \tag{50}$$

Отсюда получаем оценку

$$G_k^2(y) = \left(\int_0^a (b(t, y), \psi_k(t))\, dt \right)^2 < \infty . \tag{51}$$

Очевидно, что $G_k(y)$ является коэффициентом Фурье в разложении функции $G(t, y(\cdot))$ в ряд,

$$G(t, y(\cdot)) = \sum_{k=1}^{\infty} G_k(y) \varphi_k(t), \tag{52}$$

и для того, чтобы ряд (52) сходился, достаточно, чтобы сходился ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \int_0^a (b(t, y(\cdot)), \psi_k(t))^2\, dt < \infty . \tag{53}$$

В этом случае ряд в правой части (52) сходится и функция $G(t, y(t))$ вычисляется по формуле

$$G(t, y(t)) = \sum_{k=1}^{\infty} G_k(y(\cdot)) \varphi_k(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^a (b(s, y(\cdot)), \psi_k(s))\, ds \varphi_k(t). \tag{54}$$

Чтобы воспользоваться результатами работы [9], необходимо определить условия, при которых существует и ограничен оператор $\boldsymbol{G}'_y(\cdot, y)$ в пространстве $\boldsymbol{L}_2$. Оператор $\boldsymbol{G}'_y(\cdot, y)$, если он существует, является интегральным оператором, порождаемым некоторой операторной функцией $K(t, s, y(\cdot))$ при каждом $t, s \in [0, a]$, действующей в $\boldsymbol{H}$ по принципу

$$(G'_y(\cdot, y) z)_t = \int_0^a K(t, s, y(\cdot))\, z(s)\, ds, \quad z \in \boldsymbol{L}_2 . \tag{55}$$

При этом из (54) формально следует

$$(G'_y(\cdot, y) z)_t = \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^a (b'_y(s, y(\cdot))\, z(s), \psi_k(s))\, ds \varphi_k(t) =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^a (b'^{*}_y(s, y(\cdot)) \psi_k(s), z(s))\, ds \varphi_k(t). \tag{56}$$

Сравнивая (55) и (56), имеем

$$\int_0^a K(t, s, y(\cdot))\, z(s)\, ds = \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^a (b'^{*}_y(s, y(\cdot)) \psi_k(s), z(s))\, ds \varphi_k(t). \tag{57}$$

Используя неравенство Коши–Буняковского и формулы (54)–(57), получаем оценку

$$\int_0^a \int_0^a (K(t, s, y(\cdot))\, z(s), K(t, s, y(\cdot)) z(s))\, dt\, ds =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \left(\int_0^a (b'^{*}_y(s, y(\cdot)) \psi_k(s), z(s))\, ds \right)^2 \le$$

$$\le \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^a | b'_y(s, y(\cdot)) \psi_k(s) |^2 ds \int_0^a | z(s) |^2 ds, \tag{58}$$

откуда вытекает

$$\int_0^a \int_0^a | K(t, s, y(\cdot)) |^2\, dt\, ds \le \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^a | b'_y(s, y(\cdot)) \psi_k(s) |^2\, ds; \tag{59}$$

и для существования и ограниченности оператора $\boldsymbol{G}'_y(\cdot, y)$ достаточно, чтобы сходился ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \int_0^a |b'_y(s, y(\cdot))\psi_k(s)|^2 ds < \infty . \tag{60}$$

В пространстве $\boldsymbol{L}_2 = \boldsymbol{L}_2\{[0, a], \boldsymbol{H}\}$ введем два оператора:

$$\boldsymbol{F}(\cdot, y) = \boldsymbol{G}'_y(\cdot, y)\boldsymbol{R}_x^2 \boldsymbol{G}_y^*(\cdot, y), \tag{61}$$

$$\boldsymbol{C}(\cdot, y) = \boldsymbol{R}_x \boldsymbol{G}'_y(\cdot, y) + \boldsymbol{G}'^*_y(\cdot, y)\boldsymbol{R}_x + \boldsymbol{R}_x \boldsymbol{G}'_y(\cdot, y)\boldsymbol{G}'^*_y(\cdot, y)\boldsymbol{R}_x. \tag{62}$$

Операторы $\boldsymbol{F}(\cdot, y)$ и $\boldsymbol{C}(\cdot, y)$ являются интегральными операторами в $\boldsymbol{L}_2$, а их ядра $F(t, s, y)$ и $C(t, s, y)$ — операторные функции, которые действуют в пространстве $\boldsymbol{H}$ для всех $t, s \in [0, a]$ и определяются из соотношений (61), (62) соответственно с учетом (55) следующим образом:

$$F(t, s, y) = \int_0^a \int_0^a K(t, u, y) R_x^2(u, v) K(v, s, y)\, du\, dv, \tag{63}$$

$$C(t, s, y) = \int_0^a R_x(t, u) K(u, s, y)\, du + \int_0^a K^*(t, u, y) R_x(u, s)\, du +$$

$$+ \int_0^a \int_0^a \int_0^a R_x(t, u) K(u, v, y), K^*(v, \theta, y) R_x(\theta, s)\, du\, dv\, d\theta . \tag{64}$$

В силу того, что $\boldsymbol{R}_x$ является оператором Гильберта–Шмидта, и вследствие условий (59) и (60) операторы $F(t, s, y)$ и $C^2(t, s, y)$ ограничены, поэтому имеют ограниченный след

$$\int_0^a \int_0^a \operatorname{Sp} F(t, s, y)\, dt\, ds < \infty, \quad y \in \boldsymbol{L}_2, \tag{65}$$

$$\int_0^a \int_0^a \operatorname{Sp} C^2(t, s, y)\, dt\, ds < \infty, \quad y \in \boldsymbol{L}_2. \tag{66}$$

Далее необходимо ввести дополнительное условие, обеспечивающее обратимость отображения $\boldsymbol{S}'$. Для этого преобразование (32*) запишем в пространстве $\boldsymbol{H}$

$$(\boldsymbol{S}' y)_t : y(t) + \int_0^a B_1(t, s) f(s, y(s))\, ds = x(t), \tag{67}$$

где $B_1(t, s)$ — ядро интегрального оператора $\boldsymbol{B}_1$.

Формально запишем преобразование $\boldsymbol{S}'$. Из (67) имеем

$$(\boldsymbol{S}' z)_t : z(t) + \int_0^a B_1(t, s) f'_y(s, y(s)) z(s)\, ds = u(t), \quad z \in \boldsymbol{L}_2, \tag{68}$$

или

$$(\boldsymbol{S}' z)_t : z(t) + \int_0^a M'_y(t, s, y(\cdot))\, z(s)\, ds = u(t), \quad z \in \boldsymbol{L}_2, \tag{69}$$

где положено

$$M(t, s, y(\cdot)) = B_1(t, s) f(s, y(s)), \tag{70}$$

$$M'_y(t, s, y(\cdot)) = B_1(t, s) f'_y(s, y(s)). \tag{70*}$$

Далее будем предполагать, что для всех $t, s \in [0, a]$

$$|M'_y(t, s, y(\cdot))| < c. \tag{71}$$

Тогда из (69) рекуррентно имеем

$$z(t)=u(t)-\int_0^a M'_y(t,s,y(\cdot))\,z(s)\,ds=u(t)-\int_0^a M'_y(t,s,y(\cdot))\,u(s)\,ds+$$

$$+\int_0^a\int_0^a M'_y(t,s_1,y(\cdot))\,M'_y(t,s_2,y(\cdot))\,u(s_2)\,ds_1\,ds_2+\ldots \tag{72}$$

Отсюда с учетом (71) имеем оценки

$$\|z(t)\|\le\|u(t)\|+ac\|u(t)\|+\frac{a^2c^2}{2}\|u(t)\|+\ldots$$

$$\ldots+\frac{a^nc^n}{n!}\|u(t)\|+\ldots=e^{ac}\|u(t)\| \tag{73}$$

и

$$\int_0^a\|z(t)\|^2\,dt\le e^{ac}\int_0^a\|u(t)\|^2\,dt. \tag{74}$$

Это значит, что

$$|\boldsymbol{S}'(z)^{-1}|=|\boldsymbol{T}(z)|\le e^{ac}, \tag{75}$$

т.е. всегда существует обратное к $\boldsymbol{S}'(z)$ преобразование $\boldsymbol{T}'(z)$. В $\boldsymbol{L}_2$, как это сделано выше для $\boldsymbol{S}(y)$, введем для преобразования $\boldsymbol{T}(x)$ интегральные операторы $\overline{\boldsymbol{F}}(\cdot,x)$ и $\overline{\boldsymbol{C}}(\cdot,x)$ с ядрами $\overline{F}(t,s,x)$ и $\overline{C}(t,s,x)$, которые определяются аналогично формулам (63) и (64),

$$\overline{F}(t,s,x)=\int_0^a\int_0^a\overline{K}(t,u,x)R_x^2(u,v)\overline{K}(v,s,x)\,du\,dv \tag{76}$$

и

$$\overline{C}(t,s,x)=\int_0^a R_x(t,u)\overline{K}(u,s,x)\,du+\int_0^a\overline{K}^*(t,u,x)R_x(u,s)\,du+$$

$$+\int_0^a\int_0^a\int_0^a R_x(t,u)\overline{K}(u,v,x),\overline{K}^*(v,\theta,x)R_x(\theta,s)\,du\,dv\,d\theta, \tag{76*}$$

где функции $\overline{K}(t,u,x)$ и $\overline{K}^*(t,u,x)$ являются ядрами интегральных операторов $\overline{\boldsymbol{G}}_x'(\cdot,x)$ и $\overline{\boldsymbol{G}}_x'^*(\cdot,x)$.

В силу соотношения (39), условий (53) и (60) операторные функции $\overline{F}(t,s,y)$ и $\overline{C}(t,s,y)$ существуют, ограничены, а также ограничен их след

$$\int_0^a\int_0^a \mathrm{Sp}\,\overline{F}(t,s,x)\,dt\,ds<\infty \tag{77}$$

и

$$\int_0^a\int_0^a \mathrm{Sp}\,\overline{C}^2(t,s,x)\,dt\,ds<\infty. \tag{78}$$

Обозначим $\{c_k(x)\}$ и $\{\widetilde{c}_k(x)\}$ собственные числа соответственно операторов $C(t,s,x)$ и $\overline{C}(t,s,x)$. Тогда, как известно из теории случайных процессов (см. [46]), по определителю преобразования и на основании формул (77) и (78) существуют и ограничены выражения

$$D(x)=\left[\prod_{k=1}^{\infty}(1+c_k(x))e^{-c_k(x)}\right]\exp\left\{\frac{1}{2}\int_0^a\int_0^a \mathrm{Sp}\,C^2(t,s,x)\,dt\,ds\right\}, \tag{79}$$

$$\widetilde{D}(x)=\left[\prod_{k=1}^{\infty}(1+\widetilde{c}_k(x))e^{-\widetilde{c}_k(x)}\right]\exp\left\{\frac{1}{2}\int_0^a\int_0^a \mathrm{Sp}\,\overline{C}^2(t,s,x)\,dt\,ds\right\}. \tag{80}$$

Наконец, введем обобщенную случайную величину, так называемый «белый шум», и с его помощью построим расширенный стохастический интеграл.

Воспользуемся формулой (63), где для данного случая взят гауссовский случайный элемент x с корреляционным оператором $\boldsymbol{R}_x^2$ в гильбертовом пространстве $\boldsymbol{L}_2$. В $\boldsymbol{H}$ строим винеровский процесс $w(t)$, определенный на интервале $[0, a]$, со значениями из $\boldsymbol{H}$ согласно методу, предложенному в работе [9], следующим образом:

$$x(t) = \int_0^a R_x(t, s)\, dw(s). \tag{81}$$

Теперь с помощью процесса $w(t)$ строим расширенные стохастические интегралы

$$\int_0^a \left\langle G(t, x(\cdot)), dw(t) \right\rangle = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{\lambda_k}} \int_0^a \int_0^a (G(t, x(\cdot)), \varphi_k(t))(x(s), \varphi_k(s))\, dt\, ds -$$
$$- \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^a \int_0^a \int_0^a (K(s, t, x(\cdot)) R_x(t, v) \varphi_k(v), \varphi_k(s))\, dt\, ds\, dv \tag{82}$$

и аналогично

$$\int_0^a \left\langle \overline{G}(t, x(\cdot)), dw(t) \right\rangle = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{\lambda_k}} \int_0^a \int_0^a (\overline{G}(t, x(\cdot)), \varphi_k(t))(x(s), \varphi_k(s))\, dt\, ds -$$
$$- \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^a \int_0^a \int_0^a (\overline{K}(s, t, x(\cdot)) R_x(t, v) \varphi_k(v), \varphi_k(s))\, dt\, ds\, dv\,, \tag{83}$$

где ряды в правой части формул (82) и (83) сходятся по мере μ_x из условий (53) и (60).

Таким образом, из проведенных выше исследований и полученных условий, а также на основании результатов работы [9] доказана следующая теорема.

Теорема 1. Пусть в гильбертовом пространстве $\boldsymbol{H}$ заданы два эволюционных дифференциальных уравнения: нелинейное (4) и линейное (14) с начальными условиями (5) и (15) соответственно, для которых выполняются условия 1–3, и, кроме того, нелинейная функция $f(t, y(t))$ удовлетворяет условиям (53), (60) и (71). Тогда имеют место следующие утверждения:

1) преобразования $\boldsymbol{S}$ (36) и $\boldsymbol{T}$ (37) взаимно однозначны, обратимы и имеют единственные решения $y(t)$ и $x(t)$, которые также являются решениями дифференциальных уравнений (4) и (14);

2) преобразование $\boldsymbol{S}'$ (68) существует и всегда обратимо, а также существует его ограниченное обратное преобразование $\boldsymbol{T}' = (\boldsymbol{S}')^{-1}$;

3) вероятностные меры μ_y и μ_x, порожденные решениями $y(t)$ и $x(t)$ соответственно дифференциальных уравнений (4) и (14), эквивалентны и их плотности Радона–Никодима вычисляются по формулам

$$\lambda(z) = \frac{d\mu_y}{d\mu_x}(z) = \widetilde{D}(z) \exp\left\{ -\int_0^a \left\langle \overline{G}(s, z(\cdot)), dw(s) \right\rangle - \frac{1}{2} \int_0^a \|\overline{G}(s, z(\cdot))\|^2\, ds \right\}, \tag{84}$$

$$\widetilde{\lambda}(z) = \frac{d\mu_x}{d\mu_y}(z) = D(z) \exp\left\{ -\int_0^a \left\langle G(s, z(\cdot)), dw(s) \right\rangle - \frac{1}{2} \int_0^a \|G(s, z(\cdot))\|^2\, ds \right\}. \tag{85}$$

Если, кроме того, известно, что существует соотношение

$$\int_0^a \operatorname{Sp} b'_z(t, z(\cdot))\, dt < \infty\,,\ \ z \in L_2, \tag{86}$$

то, используя результаты работ [41, 42], значительно упрощаются результаты теоремы 1, и тогда можно сформулировать следующую теорему.

Теорема 2. Пусть выполняются условия теоремы 1 и условие (86). Тогда имеют место все утверждения теоремы 1, а плотности Радона–Никодима вычисляются по формулам

$$\lambda(z)=\frac{d\mu_y}{d\mu_x}(z)=\exp\left\{-\frac{1}{2}\int_0^a \operatorname{Sp} b'_z(t, z(\cdot))\,dt-\int_0^a \left\langle \overline{G}(s, z(\cdot)), dw(s)\right\rangle -\right.$$
$$\left. -\int_0^a\int_0^a \operatorname{Sp}\overline{K}(t, s, z(\cdot))R_x(s,t)\,dt\,ds-\frac{1}{2}\int_0^a ||\overline{G}(s, z(\cdot))||^2\,ds\right\}, \qquad (87)$$

$$\widetilde{\lambda}(z)=\frac{d\mu_x}{d\mu_y}(z)=\exp\left\{-\frac{1}{2}\int_0^a \operatorname{Sp} b'_z(t, z(\cdot))\,dt-\int_0^a \left\langle G(s, z(\cdot)), dw(s)\right\rangle -\right.$$
$$\left. -\int_0^a\int_0^a \operatorname{Sp}K(t, s, z(\cdot))R_x(s,t)\,dtds-\frac{1}{2}\int_0^a ||G(s, z(\cdot))||^2\,ds\right\}. \qquad (88)$$

Как видим, в этом случае формулы плотностей Радона–Никодима имеют более замкнутое выражение, чем в (84) и (85).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Баклан В.В., Шаташвили А.Д. Условия абсолютной непрерывности вероятностных мер, соответствующих гауссовским случайным процессам в гильбертовом пространстве // ДАН УССР. — 1965. — № 1. — С. 23–26.
2. Баклан В.В., Шаташвили А.Д. Преобразования гауссовских мер при нелинейных преобразованиях в гильбертовом пространстве // Там же. — 1965. — № 9. — С. 1115–1117.
3. Далецкий Ю.Л., Белопольская Я.И. Стохастические уравнения и дифференциальная геометрия. — К.: Вища шк., 1989. — 296 с.
4. Далецкий Ю.Л., Сохадзе Г.А. Эквивалентность мер, сдвинутых вдоль траектории векторного поля / АН УССР. Ин-т математики. — Препр. — Киев, 1987. — 16 с.
5. Далецкий Ю.Л., Сохадзе Г.А. Абсолютная непрерывность гладких мер // Функциональный анализ и его приложения. — 1988 — **22**, вып. 2. — С. 77–78.
6. Далецкий Ю.Л., Фомин С.В. Меры и дифференциальные уравнения в бесконечномерных пространствах. — М.: Наука, 1983. — 384 с.
7. Далецкий Ю.Л., Шаташвили А.Д. Об оптимальном прогнозировании случайных величин, нелинейно связанных с гауссовскими // Теория случайных процессов. — 1975. — Вып. 3. — С. 30–33.
8. Далецкий Ю.Л., Шаташвили А.Д. О характеристическом функционале условного распределения // Там же. — 1976. — Вып. 4. — С. 49–51.
9. Скороход А.В., Шаташвили А.Д. Об абсолютной непрерывности гауссовских мер при нелинейных преобразованиях // Теория вероятностей и мат. статистика. — 1976. — Вып. 15. — С. 139–151.
10. Сохадзе Г.А. Об абсолютной непрерывности мер, соответствующих решениям дифференциальных уравнений 2-го порядка с неограниченными операторами // Докл. конф. молодых ученых по математике и механике. — Тбилиси, 1976. — С. 121–124.
11. Сохадзе Г.А. Абсолютная непрерывность мер, порожденных решениями некоторых краевых задач математической физики. — М., 1978. — 10 с. — Деп. в ВИНИТИ 10.11.78, № 2442.
12. Сохадзе Г.А. Формулы экстраполяции для решения дифференциальных уравнений с гауссовскими возмущениями // Тез. докл. VIII конф. математиков вузов ГССР. — Кутаиси, 1979. — С. 137–139.
13. Сохадзе Г.А. О мерах, порожденных решениями нелинейных уравнений эллиптического типа с гауссовскими возмущениями // Теория случайных процессов. — 1980. — Вып. 8. — С. 117–121.

14. С о х а д з е Г. А. Эквивалентность мер, порожденных решениями систем эллиптических дифференциальных уравнений // Респ. конф. молодых ученых и специалистов по актуальн. проблемам приклад. математики и механики. — Тбилиси, 1983.— С. 156–160.
15. С о х а д з е Г. А. О мерах, порожденных решениями характеристической задачи со случайным возмущением // Тез. докл. 20-й школы-коллоквиума по теории вероятностей и мат. статистике. — Тбилиси, 1986. — С. 105–106.
16. С о х а д з е Г. А. Абсолютно непрерывные преобразования гауссовской меры в гильбертовом пространстве // Изв. вузов. Математика. — 1987. — № 4 (299). — С. 65–68.
17. С о х а д з е Г. А. Абсолютная непрерывность распределений решений уравнений со случайным шумом // Статистика и управление случайными процессами. — М.: Наука, 1989. — С. 195–198.
18. С о х а д з е Г. А., Ш а т а ш в и л и А. Д. Об эквивалентности гауссовских мер при нелинейных преобразованиях в гильбертовом пространстве // Докл. АН СССР. — 1978. — **240**, № 4. — С. 790–793.
19. С о х а д з е Г. А., Ш а т а ш в и л и А. Д. Нелинейные преобразования гауссовских мер в гильбертовом пространстве // Теория случайных процессов. — 1979. — Вып. 7. — С. 109–114.
20. С о х а д з е Г. А., Ш а т а ш в и л и А. Д. Об эквивалентности распределений случайных полей, связанных с гауссовским полем нелинейными дифференциальными уравнениями // Тез. докл. IV конф. математиков вузов ГССР. — Батуми, 1981. — С. 208.
21. Ф о м и н а Т. А., Ш а т а ш в и л и А. Д. Об эквивалентности мер при некоторых линейных и нелинейных эволюционных преобразованиях гауссовских процессов в евклидовом и гильбертовом пространствах // Прикладна статистика. Актуарна та фінансова математика. — 2000. — № 2. — С. 105–119.
22. Ф о м и н а Т. А., Ш а т а ш в и л и А. Д. Некоторые необходимые и достаточные условия, обеспечивающие эквивалентность двух гауссовских мер, индуцируемых решениями дифференциальных уравнений в евклидовом и гильбертовом пространствах // Там же. — 2002. — № 1. — С. 61–80.
23. Ф о м и н а Т. А., Ш а т а ш в и л и А. Д. О мерах, порожденных уравнениями со случайными коэффициентами // Там же. — 2002. — № 2. — С. 61–80.
24. F o m i n a T. A., S h a t a s h v i l i A. D. Some necessary and sufficient conditions of the equivalence of two Gaussian measures induced by solutions of differential equations in a Euclid and Hilbert spaces // Random Oper. and Stoch. Equ. — 2003. — **11**, N 4. — P. 351–370.
25. S o k h a d z e G. A., F o m i n a T. A., S h a t a s h v i l i A. D. On measures generated by equations with random coefficients // Random Oper. and Stoch. Equ. — 2003. — **11**, N 3. — P. 267–274.
26. Ш а т а ш в и л и А. Д. О преобразовании гауссовских мер при линейных преобразованиях // ДАН УССР. — 1963. — № 4. — С. 437–440.
27. Ш а т а ш в и л и А. Д. О нелинейных преобразованиях континуальных интегралов по гауссовским мерам // Там же. — 1963. — № 6. — С. 717–719.
28. Ш а т а ш в и л и А. Д. Об абсолютной непрерывности мер, соответствующих гауссовским процессам при линейном преобразовании // Тр. Выч. центра АН ГССР. — 1963. — № 3. — С. 241–248.
29. Ш а т а ш в и л и А. Д. Некоторые нелинейные преобразования континуальных интегралов по гауссовским мерам // Тез. докд. VII всесоюз. совещания по теории вероятностей и мат. статистике. — Тбилиси, 1963. — С. 92–94.
30. Ш а т а ш в и л и А. Д. Об одном классе абсолютно непрерывных нелинейных преобразований гауссовских мер // Тр. Выч. центра АН ГССР. — 1965. — **5,** № 1. — С. 69–105.
31. Ш а т а ш в и л и А. Д. Абсолютная непрерывность гауссовских мер в некоторых функциональных пространствах // Сообщ. АН ГССР. — 1966. — **11,** № 2. — С. 277–284.
32. Ш а т а ш в и л и А. Д. О плотностях мер, соответствующих решениям стохастических дифференциальных уравнений, находящихся под воздействием гауссовских процессов // Тр. Выч. центра АН ГССР. — 1966. — **7,** № 1. — С. 43–58.

33. Ш а т а ш в и л и А . Д . Условия абсолютной непрерывности мер, соответствующих решениям систем дифференциальных уравнений, находящихся под воздействием гауссовских процессов // Мат. физика. — 1967. — № 4. — С. 198–199.

34. Ш а т а ш в и л и А . Д . Об оптимальном прогнозировании для некоторого класса случайных процессов // Теория вероятностей и мат. статистика. — 1970. — Вып. 1. — С. 222–239.

35. Ш а т а ш в и л и А . Д . Нелинейная фильтрация для решения некоторых стохастических дифференциальных уравнений // Кибернетика. — 1970. — № 3. — С. 97–102.

36. Ш а т а ш в и л и А . Д . О многомерном оптимальном прогнозировании и фильтрации одного класса многомерных случайных процессов // Мат. физика. — 1970. — № 7. — С. 178–185.

37. Ш а т а ш в и л и А . Д . Оптимальная экстраполяция и фильтрация для одного класса случайных процессов. I // Теория вероятностей и мат. статистика. — 1970. — Вып. 2. — С. 235–253.

38. Ш а т а ш в и л и А . Д . Оптимальная экстраполяция и фильтрация для одного класса случайных процессов. II // Там же. —1970. — Вып. 3. — С. 211–231.

39. Ш а т а ш в и л и А . Д . Прогноз и фильтрация функционалов от решений нелинейных дифференциальных уравнений со случайными функциями // Докл. АН СССР. — 1970. — **194**, № 1. — С. 35–37.

40. Ш а т а ш в и л и А . Д . О плотностях мер, соответствующих решениям некоторых дифференциальных уравнений со случайными коэффициентами // Там же. — 1970. — **194**, № 2. — С. 275–277.

41. Ш а т а ш в и л и А . Д . О преобразовании мер в гильбертовом пространстве с помощью линейных дифференциальных уравнений // Теория случайных процессов. — 1973. — Вып. 2. — С. 113–120.

42. Ш а т а ш в и л и А . Д . О преобразованиях гауссовской меры в гильбертовом пространстве, порожденных дифференциальными уравнениями // Там же. — 1973. — Вып. 2. — С. 120–128.

43. Б е р е з а н с к и й Ю . М . Разложение по собственным функциям самосопряженных операторов. — Киев: Наук. думка, 1965. — 799 с.

44. Ф о м и н а Т . А . , Ш а т а ш в и л и А . Д . Об эквивалентности вероятностных мер индуцируемых решениями нелинейных дифференциальных уравнений в евклидовом пространстве, возмущенных случайными гауссовскими полями // Прикладна статистика. Актуарна та фінансова математика. – 2007. — № 1. — С. 106–124.

45. К р е й н С . Г . Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве. — М.: Наука, 1967. — 464 с.

46. Г и х м а н И . И . , С к о р о х о д А . В . Теория случайных процессов. Т. 1. — М.: Наука, 1971. — 664 с.

47. D i n g X . On global random solutions for random integral and differential equations in Banach spaces // Zbornik Radova Universiteta. — 1984. — N 2 (14). — P. 101–109.

48. K r o v a r i t i s . Nonlinear random equations with nonconvergive operators in Banach spaces // J. Math. Analysis and Applications. — 1986. — N 120. — P. 572–583.

49. К о л м о г о р о в А . Н . , Ф о м и н С . В . Элементы теории функций и функционального анализа. — М.: Физматгиз, 1968. — 544 с.

Поступила 10.03.2010