УДК 519.6

Н.В. МАЙКО, В.Г. ПРИКАЗЧИКОВ, В.Л. РЯБИЧЕВ

ТОЧНОСТЬ РАЗНОСТНОЙ СХЕМЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ НА СОБСТВЕННЫЕ ЗНАЧЕНИЯ ДЛЯ ОПЕРАТОРА ЛАПЛАСА

Ключевые слова: *оператор Лапласа, собственные значения, разностная схема, скорость сходимости.*

В настоящей работе исследуется точность разностной аппроксимации задачи на собственные значения для оператора Лапласа с краевыми условиями Дирихле в двумерной области сложной формы. В научной литературе описаны различные дискретные аналоги оператора Лапласа, однако не все они оказываются самосопряженными разностными операторами (см., например, [1, с. 241]). В нашем случае используется такая же, как и в [2], аппроксимация оператора Лапласа на пятиточечном шаблоне неравномерной сетки, приводящая к самосопряженному разностному оператору.

В [2] исследована точность разностной схемы решения первой краевой задачи для эллиптического уравнения с переменными коэффициентами в двумерной области Ω сложной формы и получены оценки

$$\| y-u\|_{C(\omega)} \le Mh^2, \quad \| y-u\|_{W_2^1(\omega)} \le Mh^{3/2}$$

в предположении $u \in C^4(\overline{\Omega})$, где u, y — решения соответственно дифференциальной и разностной задач, M — положительная постоянная, не зависящая от шага h.

Разностная схема решения этой же задачи в предположении $u \in W_2^m(\Omega)$ при $m=2, 3$ исследована в [3], где получена оценка скорости сходимости

$$\| y-u\|_{W_2^1(\omega)} \le Mh^{m/2} \| u\|_{W_2^m(\Omega)} \quad \left(h=\sqrt{h_1^2+h_2^2} \right).$$

Цель данной работы — получение оценки того же типа при условии принадлежности обобщенных собственных функций классу $W_2^2(\Omega)$.

1. Рассмотрим задачу на собственные значения

$$-\Delta u \equiv -\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}=\lambda u, \quad x=(x_1, x_2) \in \Omega, \tag{1}$$

$$u=0, \quad x=(x_1, x_2) \in \Gamma \equiv \partial\Omega. \tag{2}$$

Напомним, что не равная нулю функция $u \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$ называется обобщенной собственной функцией первой краевой задачи, или задачи Дирихле, для оператора $L=-\Delta$, если существует число λ такое, что функция u при всех $v \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$ удовлетворяет интегральному тождеству

$$\iint\limits_{\Omega} \sum_{\alpha=1}^{2} \frac{\partial u}{\partial x_\alpha} \frac{\partial v}{\partial x_\alpha} dx = \lambda \iint\limits_{\Omega} uv\, dx.$$

Число λ называется собственным значением (с.з.), соответствующим собственной функции (с.ф.) u, которую считаем нормированной, например, условием $||u||_{L_2(\omega)} \equiv \left(\iint\limits_{\Omega} u^2(x)dx \right)^{1/2} = 1$.

Известно [4, 5], что задача (1), (2) имеет счетное множество положительных с.з.:

$$0 < \lambda_1 \le \lambda_2 \le \ldots \le \lambda_n \le \ldots \quad (\lim_{n\to\infty} \lambda_n = +\infty).$$

Кроме того, если $\partial\Omega \in C^k$ при некотором $k \ge 2$, то любая с.ф. u задачи (1), (2) принадлежит $W_2^k(\Omega)$ [4, с. 251]. Если $k \ge [n/2]+1$, то $u \in C^{k-[n/2]-1}(\overline{\Omega}) \subset \subset C(\overline{\Omega})$. Если $\partial\Omega \in C^2$, то с.ф. $u \in W_2^2(\Omega)$ и $u \in C(\overline{\Omega})$.

Известно также [4, с. 192], что в обобщенной постановке задача (1), (2) эквивалентна экстремальной задаче

$$\lambda_1 = \inf_{\substack{v \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega) \\ \|v\|_{L_2(\Omega)}=1}} \iint\limits_{\Omega} |\nabla v|^2 \, dx, \quad \lambda_k = \inf_{\substack{v \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega) \\ (v, u_j)_{L_2(\Omega)}=0,\ j=1,2,\ldots,k-1 \\ \|v\|_{L_2(\Omega)}=1}} \iint\limits_{\Omega} |\nabla v|^2 \, dx, \quad k = 2, 3, \ldots,$$

где u_k — k-я с.ф., λ_k — k-е с.з.

2. Предположим, что Ω — выпуклая область с границей $\Gamma \in C^2$. Следуя [3, с. 125], проведем прямые $x_\alpha = x_\alpha^{(i_\alpha)} = i_\alpha h_\alpha$, $i_\alpha = 0, \pm1, \pm2, \ldots$, перпендикулярные координатной оси Ox_α ($\alpha = 1, 2$). Множество принадлежащих Ω точек пересечения этих прямых обозначим ω и назовем множеством внутренних узлов. Множество точек пересечения прямых $x_\alpha = x_\alpha^{(i_\alpha)}$, $i_\alpha = 0, \pm1, \pm2, \ldots$, с границей Γ обозначим γ_α и назовем множеством граничных узлов по направлению x_α. Пусть γ_α^- и γ_α^+ — соответственно множества левых и правых граничных узлов по направлению x_α. Очевидно, $\gamma_\alpha = \gamma_\alpha^- \cup \gamma_\alpha^+$. Множество $\gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2$ назовем множеством граничных узлов.

Проведем прямые $x_\alpha = x_\alpha^{(i_\alpha+0,5)} = 0{,}5(x_\alpha^{(i_\alpha)} + x_\alpha^{(i_\alpha+1)})$, $i_\alpha = 0, \pm1, \pm2, \ldots$, $\alpha = 1, 2$. Для каждого узла $x = (x_1, x_2) \in \omega$ построим прямоугольник $\Pi(x)$, ограниченный отрезками этих прямых, и ячейку $\widetilde{e}(x) = \Omega \cap \Pi(x)$. Множество внутренних узлов, для которых $\widetilde{e}(x) \ne \Pi(x)$, обозначим ω_γ ($\omega_\gamma \subset \omega$). Ячейка $\widetilde{e}(x)$ ограничена двумя отрезками, перпендикулярными оси Ox_α; обозначим их l_α^- и l_α^+. Для узла $x \in \omega_\gamma$ ячейка $\widetilde{e}(x)$ ограничена также частью $\Delta\Gamma$ кривой Γ. Заменим дугу $\Delta\Gamma$ отрезком Δl. Обозначим $e(x)$ ячейку, ограниченную отрезками $l_\alpha^\pm$, $\alpha = 1, 2$, и отрезком Δl. Вследствие предположений относительно Ω и Γ площади $e(x)$ и $\widetilde{e}(x)$ отличаются на $O(h^2)$, $h^2 = h_1^2 + h_2^2$.

Середины отрезков, ограничивающих $\Pi(x)$ и перпендикулярных оси Ox_α, назовем потоковыми узлами по направлению x_α; множество всех таких узлов обозначим $\widetilde{\omega}_\alpha$, а множество всех потоковых узлов — $\widetilde{\omega} = \widetilde{\omega}_1 \cup \widetilde{\omega}_2$.

Аппроксимируем задачу (1), (2) разностной схемой

$$-\Lambda y \equiv -y_{x_1\hat{x}_1} - y_{x_2\hat{x}_2} = \lambda^h y, \ x = (x_1, x_2) \in \omega, \tag{3}$$

$$y = 0, \ x = (x_1, x_2) \in \gamma, \tag{4}$$

где $\quad y_{\hat{x}_\alpha} = \dfrac{y^{(+0,5_\alpha)} - y^{(-0,5_\alpha)}}{h_\alpha}, \quad y_{x_\alpha}^{(+0,5_\alpha)} = \dfrac{y^{(+1_\alpha)} - y}{h_\alpha^+}, \quad y_{x_\alpha}^{(-0,5_\alpha)} = \dfrac{y - y^{(-1_\alpha)}}{h_\alpha^-},$

$y^{(\pm 1_\alpha)} = y(x^{(\pm 1_\alpha)})$, $y^{(\pm 0,5_\alpha)} = y(x^{(\pm 0,5_\alpha)})$, $x^{(\pm 1_\alpha)}$ — узлы, соседние с узлом $x \in \omega$ по направлению x_α, $h_\alpha^\pm$ — расстояние между узлами x и $x^{(\pm 1_\alpha)}$ $(0 < h_\alpha^\pm \le h_\alpha)$, $y_{x_\alpha \hat{x}_\alpha} = \dfrac{1}{h_\alpha}\left(\dfrac{y^{(+1_\alpha)} - y}{h_\alpha^+} - \dfrac{y - y^{(-1_\alpha)}}{h_\alpha^-} \right)$, $\alpha = 1, 2$.

Введем пространства сеточных функций

$$Y = \{ y = y(x), x \in \omega \}, \quad \overset{\circ}{Y} = \{ y = y(x), x \in \overline{\omega};\ y = 0 \ \text{ при } \ x \in \gamma \}$$

и определим скалярные произведения и нормы:

$$(y, z)_\omega = \sum_{x \in \omega} h_1 h_2\, y(x) z(x), \ \| y \|_\omega = \sqrt{(y, y)_\omega},$$

$$(y, z)_{\widetilde{\omega}_\alpha} = \sum_{x' = x^{(\pm 0,5_\alpha)} \in \widetilde{\omega}_\alpha} h_\alpha^\pm h_{3-\alpha}\, y(x') z(x'), \ \| y \|_{\widetilde{\omega}_\alpha} = \sqrt{(y, y)_{\widetilde{\omega}_\alpha}},$$

$$(y, z)_{\widetilde{\omega}} = \sum_{\alpha=1}^{2} (y, z)_{\widetilde{\omega}_\alpha}, \ \| y \|_\omega = \sqrt{(y, y)_\omega},$$

$$\| y \|_{W_2^1(\omega)}^2 = \| y \|_\omega^2 + \| \nabla y \|_{\widetilde{\omega}}^2 = \| y \|_\omega^2 + \sum_{\alpha=1}^{2} \| y_{x_\alpha} \|_{\widetilde{\omega}_\alpha}^2,$$

$$\nabla y(x^{(\pm 0,5_\alpha)}) = y_{x_\alpha}^{(\pm 0,5_\alpha)} = y_{x_\alpha}(x^{(\pm 0,5_\alpha)}).$$

Лемма 1. Оператор $A = -\Lambda : \overset{\circ}{Y} \to Y$ самосопряжен и положительно определен.

Непосредственно устанавливается равенство $(y_{\hat{x}_\alpha}, z)_\omega = -(y, z_{x_\alpha})_{\widetilde{\omega}_\alpha}$. Тогда $(Ay, z)_\omega = -\sum_{\alpha=1}^{2} (y_{x_\alpha \hat{x}_\alpha}, z)_\omega = \sum_{\alpha=1}^{2} (y_{x_\alpha}, z_{x_\alpha})_{\widetilde{\omega}_\alpha}$, что и доказывает самосопряженность оператора. Отсюда вытекает полезное в дальнейшем соотношение

$$(Ay, y)_\omega = \sum_{\alpha=1}^{2} (y_{x_\alpha}, y_{x_\alpha})_{\widetilde{\omega}_\alpha} = \| \nabla y \|_{\widetilde{\omega}}^2.$$

Положительная определенность оператора и оценка $(Ay, y)_\omega \ge \delta \| y \|_\omega^2$, где $\delta = 4 / D^2$, D — диаметр области Ω, доказаны, например, в [3, с. 128]. □

Считаем, что с.ф. задачи (3), (4) нормированы условием $\| y \|_\omega = 1$.

Из леммы 1 следует, что задача (3), (4) эквивалентна экстремальной задаче

$$\lambda_1^h = \inf_v \| \nabla v \|_{\widetilde{\omega}}^2, \quad \lambda_s^h = \inf_v \| \nabla v \|_{\widetilde{\omega}}^2, \ s = 2, 3, \ldots,$$

при условиях $(v, v)_\omega = 1$, $(v, y^{(k)})_\omega = 0$, $k = 1, 2, \ldots, s-1$.

Легко устанавливаются соотношения

$$(y^{(k)}, y^{(k)})_\omega = 1, \quad \| \nabla y^{(k)} \|_{\widetilde{\omega}}^2 = \lambda_k^h, \quad \left(\left(y_{x_1 \hat{x}_1}^{(k)} + y_{x_2 \hat{x}_2}^{(k)} \right)^2, 1 \right)_\omega = (\lambda_k^h)^2$$

и двумерная оценка для с.ч. при $h < \min\left\{\frac{l_1}{3k_1}, \frac{l_2}{3k_2}\right\}$

$$9\left[\left(\frac{k_1}{L_1}\right)+\left(\frac{k_2}{L_2}\right)\right]^2 \le \lambda_k^h \equiv \lambda_{k_1k_2}^h \le \pi^2\left[\left(\frac{k_1}{l_1}\right)+\left(\frac{k_2}{l_2}\right)\right]^2,$$

где l_1, l_2, L_1, L_2 — длины сторон соответственно вписанного в Ω и описанного около Ω прямоугольников. Тогда по аналогии с работой [5] для некоторой подпоследовательности сгущающихся ($h \to 0$) прямоугольных сеток можно доказать: 1) сходимость разностных с.ч. λ_k^h к с.ч. λ_k исходной задачи; 2) сильную сходимость в $L(\Omega)$ кусочно-постоянных интерполяций сеточных с.ф. y_k и их первых разностных производных соответственно к с.ф. u_k и ее первым производным; 3) слабую сходимость кусочно-постоянных интерполяций вторых разностных производных с.ф. дискретной задачи ко вторым производным с.ф. исходной задачи.

В частности, учитывая слабую сходимость интерполяций сеточных с.ф., получаем соотношение $\lim\limits_{h\to 0}(u_k, y_k)_\omega = 1$, откуда следует используемая в п. 3 оценка $|(u_k, y_k)_\omega| \ge C > 0$ для всех достаточно малых шагов h.

3. Пусть $z = y - u$ — погрешность с.ф. номера k. Подставляя $y = z + u$ в разностную схему (3), (4), получаем для z задачу

$$-\Lambda z = \lambda^h z + \psi, \ x \in \omega, \tag{5}$$

$$z = 0, \ x \in \gamma, \tag{6}$$

где $\psi = \lambda^h u + \Lambda u$ — погрешность аппроксимации. Для представления ψ в дивергентном виде проинтегрируем уравнение (1) по ячейке $e(x)$ и разделим на $h_1 h_2$:

$$\lambda^h \frac{1}{h_1 h_2}\iint\limits_{e(x)} u\,dx + \frac{1}{h_1 h_2}\left(\sum_{\alpha=1}^{2}{}' \, l_\alpha^+ \overline{w}_\alpha^{(+0,5_\alpha)} - \sum_{\alpha=1}^{2}{}' \, l_\alpha^- \overline{w}_\alpha^{(-0,5_\alpha)} + \zeta(x)\Delta l \overline{w}^{(0)}\right),$$

где $\overline{w}_\alpha^{(\pm 0,5_\alpha)} = \frac{1}{l_\alpha^\pm}\int\limits_{l_\alpha^\pm}\frac{\partial u}{\partial x_\alpha}dx_{3-\alpha}$, $\overline{w}^{(0)} = \frac{1}{\Delta l}\int\limits_{\Delta l}\frac{\partial u}{\partial n}dl$, $\vec{n}$ — единичный вектор внешней нормали к границе ячейки $e(x)$, $\zeta(x) = \begin{cases} 1, & \text{если} \quad x \in \omega_\gamma, \\ 0, & \text{если} \quad x \in \omega \setminus \omega_\gamma. \end{cases}$ Штрих у знака первой (второй) суммы означает, что в ней отсутствует слагаемое, для которого $l_\alpha^+ = \varnothing$ ($l_\alpha^- = \varnothing$).

Лемма 2 [3, с. 129–132]. Для погрешности аппроксимации ψ имеет место представление

$$\psi = \lambda^h u + \Lambda u = (\lambda^h - \lambda)u + \lambda\theta + \sum_{\alpha=1}^{2}\eta_{\hat{x}_\alpha}, \tag{7}$$

где

$$\eta^{(\pm 0,5_\alpha)} = \begin{cases} u_{x_\alpha}^{(\pm 0,5_\alpha)} - \overline{w}_\alpha^{(\pm 0,5_\alpha)}, \ \text{если} \ l_\alpha^\pm = h_{3-\alpha}, \\ u_{x_\alpha}^{(\pm 0,5_\alpha)} - \overline{w}_\alpha^{(\pm 0,5_\alpha)} + \left(1 - \dfrac{l_\alpha^\pm}{h_{3-\alpha}}\right)(\overline{w}_\alpha^{(\pm 0,5_\alpha)} - \widetilde{w}_\alpha), \ \text{если} \ 0 < l_\alpha^\pm < h_{3-\alpha}, \\ u_{x_\alpha}^{(\pm 0,5_\alpha)} - \widetilde{w}_\alpha, \ \text{если} \ l_\alpha^\pm = 0, \end{cases}$$

$$\widetilde{w}_\alpha = \frac{1}{\Delta l}\int\limits_{\Delta l}\frac{\partial u}{\partial x_\alpha}dl, \ \theta = u - \frac{1}{h_1 h_2}\iint\limits_{e(x)} u\,dx.$$

Вследствие самосопряженности разностного оператора A из (5), (6) получим условие разрешимости $(\psi,\, y)_{\omega}=0$. Отсюда, учитывая представление (7), имеем

$$(\lambda^h-\lambda)(u,\, y)_{\omega}=\lambda(\theta,\, y)_{\omega}-\sum_{\alpha=1}^{2}(\eta,\, y_{x_\alpha})_{\widetilde{\omega}_\alpha}.$$

Применяя в правой части неравенство Коши–Буняковского, соотношение $||\eta||_{\widetilde{\omega}_\alpha}\le||\eta||_{\widetilde{\omega}}$ и равенство $||\nabla y||_{\omega}=\lambda^h||\, y||^2_{\omega}=\lambda^h$, получаем

$$|\lambda^h-\lambda|(u,\, y)_{\omega}\le\lambda||\theta||_{\omega}\,||\, y||_{\omega}+\sum_{\alpha=1}^{2}||\eta||_{\widetilde{\omega}_\alpha}\,||\, y_{x_\alpha}||_{\widetilde{\omega}_\alpha}\le$$

$$\le\lambda||\theta||_{\omega}\,||\, y||_{\omega}+||\eta||_{\widetilde{\omega}}\,||\nabla y||_{\widetilde{\omega}}\le\lambda||\theta||_{\omega}+\lambda^h||\eta||_{\widetilde{\omega}}.$$

Учитывая, что $|(u,\, y)_{\omega}|\ge\text{const}>0$ для всех достаточно малых h, имеем

$$|\lambda^h-\lambda|\le M(||\theta||_{\omega}+||\eta||_{\widetilde{\omega}}). \tag{8}$$

Здесь и далее M обозначает различные постоянные, не зависящие от h.

Представив z в виде суммы $z=v+w$, где v — решение задачи

$$-\Lambda v=\psi,\;\; x\in\omega, \tag{9}$$

$$v=0,\;\; x\in\gamma, \tag{10}$$

w — решение задачи

$$-\Lambda w=\lambda^h w+\lambda^h v,\;\; x\in\omega, \tag{11}$$

$$w=0,\;\; x\in\gamma. \tag{12}$$

Получим оценку для v:

$$||\nabla v||^2_{\widetilde{\omega}}\le(Av,v)_{\omega}=(\psi,v)_{\omega}=(\lambda^h-\lambda)(u,v)_{\omega}+\lambda(\theta,v)_{\omega}+\sum_{\alpha=1}^{2}(\eta_{\hat{x}_\alpha},v)_{\omega}=$$

$$=(\lambda^h-\lambda)(u,v)_{\omega}+\lambda(\theta,v)_{\omega}-\sum_{\alpha=1}^{2}(\eta,v_{x_\alpha})_{\widetilde{\omega}_\alpha}\le$$

$$\le|\lambda^h-\lambda|\,||u||_{\omega}\,||v||_{\omega}+\lambda||\theta||_{\omega}||v||_{\omega}+||\eta||_{\widetilde{\omega}}\,||\nabla v||_{\widetilde{\omega}}\le$$

$$\le\left(|\lambda^h-\lambda|\;||u||_{\omega}\,\frac{1}{\sqrt{\delta}}+\lambda||\theta||_{\omega}\,\frac{1}{\sqrt{\delta}}+||\eta||_{\widetilde{\omega}}\right)||\nabla v||_{\widetilde{\omega}}.$$

Отсюда с учетом неравенства (8) имеем

$$||\nabla v||_{\widetilde{\omega}}\le M(||\theta||_{\omega}+||\eta||_{\widetilde{\omega}}). \tag{13}$$

Установим оценку для w. Любое решение номера k задачи (11), (12) в случае, например, некратного λ^h_k можно представить в виде суммы $w_k=\overline{w}_k+\alpha_k y_k$, где $\overline{w}_k=\sum\limits_{j\ne k}\dfrac{\lambda^h_k(v_k,\, y_j)_{\omega}}{\lambda^h_j-\lambda^h_k}\,y_j$, α_k — постоянная, произвольность в выборе которой ограничена условием нормировки. (Разрешимость задачи (11), (12) гарантируется выполнением условия ортогональности $(v,\, y)_{\omega}=0$.) Имеем

$$||\nabla\bar{w}_k||^2_{\widetilde{\omega}} = (A\bar{w}_k, \bar{w}_k)_\omega = \left(\sum_{j\neq k} \frac{\lambda^h_k (v_k, y_j)_\omega}{\lambda^h_j - \lambda^h_k} Ay_j, \sum_{p\neq k} \frac{\lambda^h_k (v_k, y_p)_\omega}{\lambda^h_p - \lambda^h_k} y_p \right)_\omega =$$

$$= \sum_{j\neq k} \left(\frac{\lambda^h_k (v_k, y_j)_\omega}{\lambda^h_j - \lambda^h_k} \right)^2 \lambda^h_j = \sum_{j\neq k} \left(\frac{\lambda^h_k (v_k, y_j)_\omega}{\lambda^h_j - \lambda^h_k} \right)^2 (\lambda^h_j - \lambda^h_k + \lambda^h_k) =$$

$$= (\lambda^h_k)^2 \sum_{j\neq k} \frac{(v_k, y_j)^2_\omega}{(\lambda^h_j - \lambda^h_k)} + (\lambda^h_k)^3 \sum_{j\neq k} \frac{(v_k, y_j)^2_\omega}{(\lambda^h_j - \lambda^h_k)^2}.$$

Пусть λ_k — простое с.з. задачи (1), (2). Обозначим $a = \min\{|\lambda_k - \lambda_{k-1}|, |\lambda_k - \lambda_{k+1}|\}$, тогда $|\lambda_k - \lambda_j| \geq a$ для всех $j \neq k$. Не ограничивая общности, примем, что для всех $j \neq k$ $|\lambda^h_j - \lambda^h_k| \geq |\lambda^h_{k+1} - \lambda^h_k|$. Из сходимости $\lambda^h_k \to \lambda_k$, $\lambda^h_{k+1} \to \lambda_{k+1}$ при $h \to 0$ вытекают неравенства $|\lambda^h_k - \lambda_k| \leq a/4$, $|\lambda^h_{k+1} - \lambda_{k+1}| \leq a/4$ для всех достаточно малых h. Тогда

$$|\lambda^h_k - \lambda^h_{k+1}| = |\lambda^h_k - \lambda_k + \lambda_k - \lambda_{k+1} + \lambda_{k+1} - \lambda^h_{k+1}| \geq$$

$$\geq |\lambda_k - \lambda_{k+1}| - |\lambda^h_k - \lambda_k| - |\lambda_{k+1} - \lambda^h_{k+1}| \geq a - \frac{a}{4} - \frac{a}{4} = \frac{a}{2},$$

значит, $|\lambda^h_j - \lambda^h_k| \geq |\lambda^h_{k+1} - \lambda^h_k| \geq a/2$ для всех $j \neq k$. Следовательно,

$$||\nabla\bar{w}_k||^2_{\widetilde{\omega}} \leq \left((\lambda^h_k)^2 \frac{2}{a} + (\lambda^h_k)^3 \frac{4}{a^2} \right) \sum_{j\neq k} (v_k, y_j)^2_\omega \leq M||v_k||^2_\omega \leq M \frac{1}{\delta} ||\nabla v_k||^2_{\widetilde{\omega}}. \quad (14)$$

Оценим теперь параметр α_k. Имеем

$$z_k = v_k + w_k = v_k + \bar{w}_k + \alpha_k y_k = \bar{z}_k + \alpha_k y_k \quad (\bar{z}_k = v_k + \bar{w}_k).$$

Так как $(\bar{z}_k, y_k)_\omega = 0$, то

$$\alpha_k = (z_k, y_k)_\omega = (y_k - u_k, y_k)_\omega = 1 - (u_k, y_k)_\omega \to 0 \text{ при } h \to 0.$$

Обозначим $\rho_k = 1 - (u_k, u_k)_\omega$ погрешность аппроксимации условия нормировки $\iint\limits_\Omega u^2_k dx = 1$. Тогда

$$\rho_k = 1 - (u_k, u_k)_\omega = 1 - (y_k - z_k, y_k - z_k)_\omega = 2(y_k, z_k) - (z_k, z_k)_\omega =$$

$$= 2\alpha_k - (\bar{z}_k + \alpha_k y_k, \bar{z}_k + \alpha_k y_k)_\omega = 2\alpha_k - ||\bar{z}_k||^2_\omega - \alpha^2_k.$$

Отсюда получаем уравнение для определения α_k:

$$\alpha^2_k - 2\alpha_k + \rho_k + ||\bar{z}_k||^2_\omega = 0.$$

Поскольку $\alpha_k \to 0$ при $h \to 0$, то

$$|\alpha_k| = \left| 1 - \sqrt{1 - \rho_k - ||\bar{z}_k||^2_\omega} \right| = \frac{|\rho_k + ||\bar{z}_k||^2_\omega|}{1 + \sqrt{1 - \rho_k - ||\bar{z}_k||^2_\omega}} \leq |\rho_k| + ||\bar{z}_k||^2_\omega =$$

$$=|\rho_k|+||v_k+\overline{w}_k||_{\omega}^2\le|\rho_k|+2(||v_k||_{\omega}^2+||\overline{w}_k||_{\omega}^2)\le$$

$$\le|\rho_k|+\frac{2}{\delta}(||\nabla v_k||_{\widetilde{\omega}}^2+||\nabla\overline{w}_k||_{\widetilde{\omega}}^2)\le$$

$$\le|\rho_k|+\frac{2}{\delta}(||\nabla v_k||_{\widetilde{\omega}}^2+||\nabla\overline{w}_k||_{\widetilde{\omega}}^2)\le|\rho_k|+M||\nabla v_k||_{\widetilde{\omega}}^2. \qquad (15)$$

Собирая оценки (13)–(15) и опуская индекс k, имеем

$$||\nabla z_k||_{\widetilde{\omega}}=||\nabla(v_k+\overline{w}_k+\alpha_k y_k)||_{\widetilde{\omega}}\le||\nabla v_k||_{\widetilde{\omega}}+||\nabla\overline{w}_k||_{\widetilde{\omega}}+|\alpha_k|\cdot||\nabla y_k||_{\widetilde{\omega}}\le$$

$$\le M(||\theta||_{\omega}+||\eta||_{\widetilde{\omega}}+|\rho|+(||\theta||_{\omega}+||\eta||_{\widetilde{\omega}})^2).$$

Отсюда и из соотношения $||z||_{W_2^1(\omega)}^2=||z||_{\omega}^2+||\nabla z||_{\widetilde{\omega}}^2\le\frac{\delta+1}{\delta}||\nabla z||_{\widetilde{\omega}}^2$ получим

$$||z||_{W_2^1(\omega)}\le M(||\theta||_{\omega}+||\eta||_{\widetilde{\omega}}+|\rho|+(||\theta||_{\omega}+||\eta||_{\widetilde{\omega}})^2). \qquad (16)$$

4. Для $||\eta||_{\widetilde{\omega}}$ [3, с. 134] выполняется

$$||\eta||_{\widetilde{\omega}}\le Mh||u||_{W_2^2(\Omega)}. \qquad (17)$$

Оценим $||\theta||_{\omega}$. Если $x\in\omega\setminus\omega_{\gamma}$, то

$$e(x)=\Pi(x)=\{(\xi_1,\xi_2):\ x_{\alpha}-0{,}5h_{\alpha}<\xi_{\alpha}<x_{\alpha}+0{,}5h_{\alpha},\ \alpha=1,2\}.$$

Функционал

$$\theta=u(x_1,x_2)-\frac{1}{h_1h_2}\int\limits_{x_1-0,5h_1}^{x_1+0,5h_1}d\xi_1\int\limits_{x_2-0,5h_2}^{x_2+0,5h_2}u(\xi_1,\xi_2)d\xi_2=\left[\frac{\xi_{\alpha}-x_{\alpha}}{h_{\alpha}}=s_{\alpha}\right]=$$

$$=\widetilde{u}(0,0)-\int\limits_{-0,5h_1}^{0,5h_1}ds_1\int\limits_{-0,5h_2}^{0,5h_2}\widetilde{u}(s_1,s_2)ds_2$$

удовлетворяет условиям леммы Брэмбла–Гильберта [3, с. 111] и обращается в нуль на многочленах нулевой и первой степеней: $\theta[1]=\theta[s_1]=\theta[s_2]=0$, поэтому

$$|\theta(x)|\le Mh(h_1h_2)^{-1/2}|u|_{W_2^2(e(x))}. \qquad (18)$$

Если $x\in\omega_{\gamma}$, то $e(x)\subset\Pi(x)$. Продолжив функцию u с сохранением класса [6] на множество $\Pi(x)\setminus e(x)$, т.е. определив функцию $u^*\in W_2^2(\Pi(x))$ такую, что $u^*=u$ на $e(x)$ и для которой $||u^*||_{W_2^2(\Pi(x))}\le M||u||_{W_2^2(e(x))}$, получим

$$|\theta(x)|\le Mh(h_1h_2)^{-1/2}|u^*|_{W_2^2(\Pi(x))}\le Mh(h_1h_2)^{-1/2}|u|_{W_2^2(e(x))}. \qquad (19)$$

Тогда с учетом оценок (18) и (19) имеем

$$||\theta||_{\omega}\le Mh||u||_{W_2^2(\Omega_1)}+Mh||u||_{W_2^2(\Omega_2)}\le Mh||u||_{W_2^2(\Omega)}, \qquad (20)$$

где $\Omega_1=\bigcup\limits_{x\in\omega\setminus\omega_{\gamma}}e(x)$, $\Omega_2=\bigcup\limits_{x\in\omega_{\gamma}}e(x)$.

Оценим теперь

$$\rho = 1-(u,u)_\omega = \iint\limits_{\Omega} u^2(\xi)d\xi - \sum_{x\in\omega} u^2(x)h_1h_2 =$$

$$= \sum_{x\in\omega\backslash\omega_\gamma} \iint\limits_{\Pi(x)} (u^2(\xi)-u^2(x))d\xi + \sum_{x\in\omega_\gamma} \iint\limits_{\Pi(x)} (u^{*2}(\xi)-u^{*2}(x))d\xi -$$

$$-\sum_{x\in\omega_\gamma} \iint\limits_{\Pi(x)\backslash\widetilde{e}(x)} u^{*2}(\xi)d\xi + \iint\limits_{\Omega\backslash(\Omega_1\cup\Omega_3)} u^2(\xi)d\xi \equiv \sum_{s=1}^{4}\rho_s,$$

где $\Omega_3 = \bigcup\limits_{x\in\omega_\gamma} \widetilde{e}(x)$. Имеем

$$\iint\limits_{\Pi(x)} |u^2(\xi)-u^2(x)|\, d\xi \le M \iint\limits_{\Pi(x)} |u(\xi)-u(x)|\, d\xi =$$

$$= M \iint\limits_{\Pi(x)} \left| \int\limits_{x_2}^{\xi_2} \frac{\partial u}{\partial t_2}(\xi_1,t_2)dt_2 + \int\limits_{x_1}^{\xi_1} \frac{\partial u}{\partial t_1}(t_1,x_2)dt_1 \right| d\xi =$$

$$= M \iint\limits_{\Pi(x)} \left| \int\limits_{x_2}^{\xi_2} \frac{\partial u}{\partial t_2}(\xi_1,t_2)dt_2 + \int\limits_{x_1}^{\xi_1} dt_1 \int\limits_{\xi_2}^{x_2} \frac{\partial^2 u}{\partial t_1\partial t_2}(t_1,t_2)dt_2 + \int\limits_{x_1}^{\xi_1} \frac{\partial u}{\partial t_1}(t_1,\xi_2)dt_1 \right| d\xi \le$$

$$\le M \iint\limits_{\Pi(x)} \left(\int\limits_{x_2-0,5h_2}^{x_2+0,5h_2} \left|\frac{\partial u}{\partial t_2}(\xi_1,t_2)\right| dt_2 + \int\limits_{x_1-0,5h_1}^{x_1+0,5h_1} dt_1 \int\limits_{x_2-0,5h_2}^{x_2+0,5h_2} \left|\frac{\partial^2 u}{\partial t_1\partial t_2}(t_1,t_2)\right| dt_2 + \right.$$

$$\left. + \int\limits_{x_1-0,5h_1}^{x_1+0,5h_1} \left|\frac{\partial u}{\partial t_1}(t_1,\xi_2)\right| dt_1 \right) d\xi \le M \left(h_2 \int\limits_{x_1-0,5h_1}^{x_1+0,5h_1} d\xi_1 \int\limits_{x_2-0,5h_2}^{x_2+0,5h_2} \left|\frac{\partial u}{\partial t_2}(\xi_1,t_2)\right| dt_2 + \right.$$

$$+ h_1h_2 \int\limits_{x_1-0,5h_1}^{x_1+0,5h_1} dt_1 \int\limits_{x_2-0,5h_2}^{x_2+0,5h_2} \left|\frac{\partial^2 u}{\partial t_1\partial t_2}(t_1,t_2)\right| dt_2 +$$

$$\left. + h_1 \int\limits_{x_2-0,5h_2}^{x_2+0,5h_2} d\xi_2 \int\limits_{x_1-0,5h_1}^{x_1+0,5h_1} \left|\frac{\partial u}{\partial t_1}(t_1,\xi_2)\right| dt_1 \right) \le$$

$$\le M \left(h_2\sqrt{h_1h_2} \left(\iint\limits_{\Pi(x)} \left|\frac{\partial u}{\partial t_2}(\xi_1,t_2)\right|^2 d\xi_1 dt_2 \right)^{1/2} + \right.$$

$$+ h_1h_2\sqrt{h_1h_2} \left(\iint\limits_{\Pi(x)} \left|\frac{\partial^2 u}{\partial t_1\partial t_2}(t_1,t_2)\right|^2 dt_1 dt_2 \right)^{1/2} +$$

$$\left. + h_1\sqrt{h_1h_2} \left(\iint\limits_{\Pi(x)} \left|\frac{\partial u}{\partial t_1}(t_1,\xi_2)\right|^2 dt_1 d\xi_2 \right)^{1/2} \right) \le$$

$$\leq M\left(h_2\sqrt{h_1\,h_2}\,|u|_{W_2^1(\Pi(x))}+h_1h_2\sqrt{h_1\,h_2}\,|u|_{W_2^2(\Pi(x))}+h_1\sqrt{h_1\,h_2}\,|u|_{W_2^1(\Pi(x))}\right)\leq$$

$$\leq Mh^2||u||_{W_2^2(\Pi(x))}.$$

Тогда $|\rho_1|\leq \sum_{x\in\omega\setminus\omega_\gamma} Mh^2||u||_{W_2^2(\Pi(x))}\leq Mh^2||u||_{W_2^2(\Omega)}$. Аналогично выводим оценки и для ρ_2, ρ_3, ρ_4. Окончательно имеем (см. [7, с. 378, 379])

$$|\rho|\leq Mh^2||u||_{W_2^2(\Omega)}. \qquad (21)$$

Подставляя оценки (17), (20) в (8), а (17), (20), (21) — в (16), получаем соответственно

$$|\lambda^h-\lambda|\leq Mh||u||_{W_2^2(\Omega)},$$
$$||z||_{W_2^1(\omega)}\leq Mh||u||_{W_2^2(\Omega)}. \qquad (22)$$

Таким образом, доказано следующее утверждение.

Теорема. Пусть граница Г двумерной выпуклой области Ω принадлежит классу C^2. Тогда разностная схема (3), (4) сходится в сеточной норме $W_2^1(\omega)$ со скоростью $O(h)$, причем имеют место оценки (22).

Дискретный аналог спектральной задачи исследован также в [8].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Самарский А.А. Теория разностных схем. — М.: Наука, 1977. — 656 с.
2. Самарский А.А., Фрязинов И.В. О разностных методах аппроксимации задач математической физики // УМН. — 1976. — **39**, вып. 6 (192). — С. 167–197.
3. Самарский А.А., Лазаров Р.Д., Макаров В.Л. Разностные схемы для дифференциальных уравнений с обобщенными решениями. — М.: Высш. шк., 1987. — 296 с.
4. Михайлов В.П. Дифференциальные уравнения в частных производных. — М.: Наука, 1983. — 424 с.
5. Приказчиков В.Г. Точность дискретного аналога спектральной задачи для оператора линейной теории упругости // Диф. уравнения. — 1999. — **35**, № 2. — С. 273–279.
6. Оганесян Л.А., Руховец Л.А. Вариационно-разностные методы решения эллиптических уравнений. — Ереван: Изд-во Арм. АН ССР, 1979. — 335 с.
7. Вазов В., Форсайт Дж. Разностные методы решения дифференциальных уравнений в частных производных. — М.: Изд-во иностр. лит. 1963. — 487 с.
8. Майко Н.В., Приказчиков В.Г. Точность разностной аппроксимации задачи на собственные значения // Кибернетика и системный анализ. — 2003. — № 3. — С. 159–169.

Поступила 17.05.2010